Systèmes de coordonnées - Analyse vectorielle

1 Coordonnées cartésiennes

Le repérage d'un point de l'espace est réalisé par la donnée de trois longueurs algébriques x, y et z évaluées par rapport à trois axes perpendiculaires, voir la figure 1.

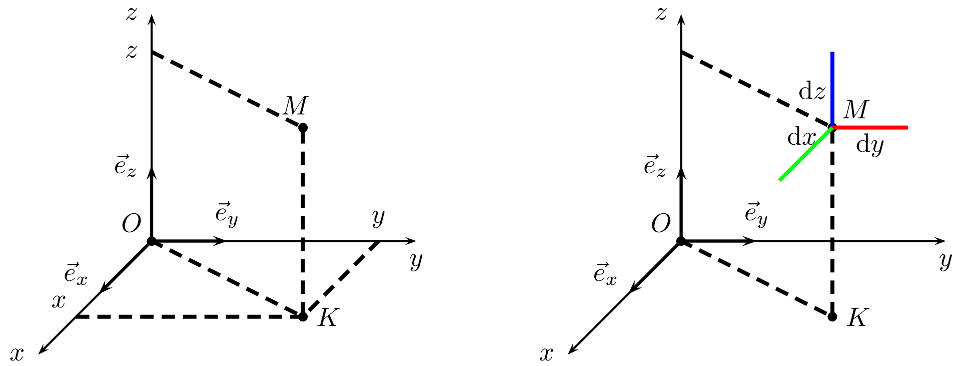

FIGURE 1 – Coordonnées cartésiennes

Le vecteur position s'exprime par $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Comme les vecteurs unitaires intervenant dans son expression sont indépendants de la position du point M, sa différentielle encore appelée *déplacement élémentaire* est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$$

Ce vecteur est constitué de trois vecteurs qui génèrent trois surfaces par produit vectoriel de deux d'entre eux et un volume par réalisation du produit mixte entre les trois. On obtient :

$$\mathrm{d}\vec{S}_1 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z \quad \mathrm{d}\vec{S}_2 = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y \quad \mathrm{d}\vec{S}_3 = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Considérons une fonction scalaire f fonction des coordonnées x, y et z d'origine O et du temps : $f = f(x, y, z, t)$.

Le *gradient* de cette fonction scalaire est un vecteur qui est défini par :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Ce vecteur permet de visualiser les évolutions de la fonction f avec les variables x, y et z. La différentielle de la fonction f s'exprime par définition selon : $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$. Ce rappel de la notion de différentielle nous amène à observer la relation importante suivante, valable dans tous les systèmes de coordonnées :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

On appelle *laplacien scalaire* de la fonction scalaire f, l'opérateur suivant noté Δf :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Soit $\vec{A}$ un vecteur fonction des coordonnées cartésiennes (on devrait plutôt parler de *champ de vecteurs*). La forme la plus générale de ce vecteur fait intervenir 3 composantes A_x, A_y et A_z relative à chacun des vecteurs de la base cartésienne. L'expression la plus générale du vecteur est :

$$\vec{A} = A_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + A_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + A_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$$

Il existe des opérateurs qui agissent sur un tel vecteur.

On appelle *divergence* du vecteur $\vec{A}$, l'opérateur noté div qui engendre la fonction scalaire suivante :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

On peut observer que le *laplacien scalaire* peut s'obtenir par : $\Delta f = \mathrm{div}\,\overrightarrow{grad}\,f$.
On appelle *rotationnel* du vecteur $\vec{A}$, l'opérateur noté $\overrightarrow{rot}$ qui engendre le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En cartésien, on retiendra que l'opérateur *laplacien vecteur* construit un vecteur après action du *laplacien scalaire* sur chaque composante de ce vecteur :

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{e}_x + \Delta A_y\vec{e}_y + \Delta A_z\vec{e}_z$$

avec par exemple : $\Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$.

En coordonnées cartésiennes, on peut présenter les différents opérateurs précédents en utilisant un unique opérateur : l'opérateur *nabla* défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

Grâce au *nabla*, on peut écrire que :
- $\overrightarrow{grad}\,f = \vec{\nabla}\,f$
- $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$
- $\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$
- $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

2 Coordonnées cylindriques

Le repérage d'un point de l'espace est réalisé par la donnée de deux longueurs l'une positive r, l'autre algébrique z et d'un angle θ, voir la figure 2.

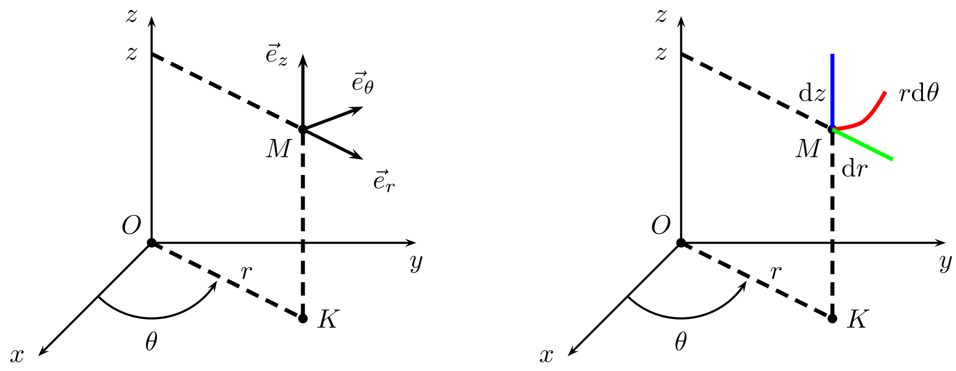

Figure 2 – Coordonnées cylindriques

Le vecteur position s'exprime par $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$. Ici, le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ intervenant dans l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dépend de la position de M puisque son orientation sera fonction de la valeur de l'angle θ. On a $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta)$. Le *déplacement élémentaire* est $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\vec{e}_r + \mathrm{d}z\vec{e}_z$. On peut montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e}_\theta$ et par conséquent on a :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$$

Ce vecteur est constitué de trois vecteurs qui génèrent trois surfaces par produit vectoriel de deux d'entre eux et un volume par réalisation du produit mixte entre les trois. On obtient :

$$\mathrm{d}\vec{S}_1 = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\vec{e}_z \quad \mathrm{d}\vec{S}_2 = \mathrm{d}r\mathrm{d}z\vec{e}_\theta \quad \mathrm{d}\vec{S}_3 = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\tau = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Le gradient d'une fonction scalaire est $f(r,\theta,z,t)$:

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Le *laplacien scalaire* de la fonction scalaire f est :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Soit $\vec{A}$ un vecteur fonction des coordonnées cylindriques, l'expression la plus générale du vecteur est :

$$\vec{A} = A_r(r,\theta,z,t)\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,z,t)\vec{e}_\theta + A_z(r,\theta,z,t)\vec{e}_z$$

La *divergence* du vecteur $\vec{A}$ est :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le *rotationnel* du vecteur $\vec{A}$ est :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

3 Coordonnées sphériques

Le repérage d'un point de l'espace est réalisé par la donnée d'une longueur positive r et deux angles θ et φ, voir la figure 3.

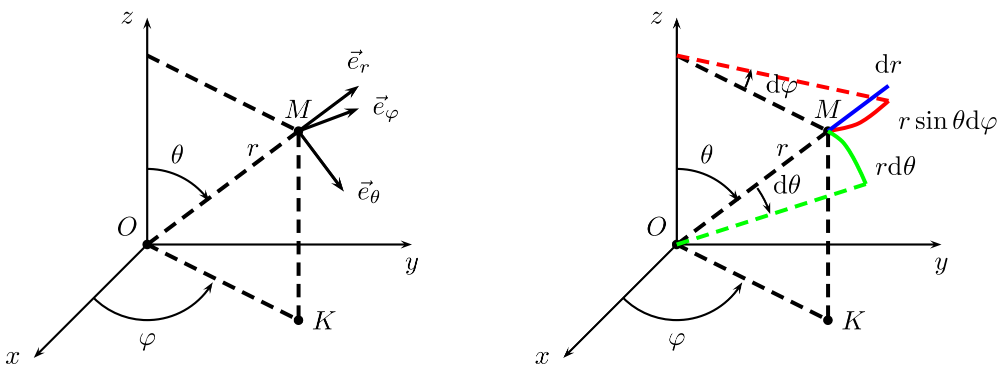

FIGURE 3 – Coordonnées sphériques

Le vecteur position s'exprime par $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. Ici, le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ intervenant dans l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dépend de la position de M puisque son orientation sera fonction de la valeur des angles θ et φ. On a $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta,\varphi)$. Le *déplacement élémentaire* est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$$

Ce vecteur est constitué de trois vecteurs qui génèrent trois surfaces par produit vectoriel de deux d'entre eux et un volume par réalisation du produit mixte entre les trois. On obtient :

$$\mathrm{d}\vec{S}_1 = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\varphi \quad \mathrm{d}\vec{S}_2 = r\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\theta \quad \mathrm{d}\vec{S}_3 = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\tau = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Le gradient d'une fonction scalaire est $f(r,\theta,\varphi,t)$:

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

Le *laplacien scalaire* de la fonction scalaire f est :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Soit $\vec{A}$ un vecteur fonction des coordonnées sphériques, l'expression la plus générale du vecteur est :

$$\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_\varphi$$

La *divergence* du vecteur $\vec{A}$ est :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta A_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Le *rotationnel* du vecteur $\vec{A}$ est :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

4 Analyse vectorielle

Double produit vectoriel

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

On peut retenir par le moyen mnémotechnique : *Bac - Cab*.

Produit mixte

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A}) = \mathrm{Det}(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = [\vec{A},\vec{B},\vec{C}]$$

Le produit mixte autorise la permutation circulaire.

Règles sur les opérateurs

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,f = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = 0$$

et aussi

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \overrightarrow{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Les opérations gradient, divergence et rotationnel étant fabriquées à partir d'opération de dérivation, on pourra voir dans ce qui suit une analogie (certes lointaine. . .) avec $(fg)' = f'g + fg'$:

$$\overrightarrow{rot}\,(f\vec{A}) = f\overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \overrightarrow{grad}\,f\wedge\vec{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\,(f\vec{A}) = f\mathrm{div}\,\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{grad}\right)f$$

Théorèmes importants

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée entourant un volume τ : le flux d'un vecteur sur la surface S orientée vers l'extérieur est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur tout le volume τ.

Green - Ostrogradski $$\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\tau/S} \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée sur laquelle s'appuie une surface Σ : la circulation d'un vecteur le long de $\mathcal{C}$ est égale au flux du rotationnel de ce vecteur à travers Σ orientée selon la règle du tire-bouchon.

Stokes $$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma}$$

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée sur laquelle s'appuie une surface Σ : le premier théorème de Kelvin permet de transformer une intégrale sur le contour en une intégrale sur la surface.

Kelvin 1 $$\oint_{\mathcal{C}} (\vec{r}\cdot\vec{A})\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} -\overrightarrow{grad}\,(\vec{r}\cdot\vec{A})\wedge\mathrm{d}\vec{\Sigma}$$

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée entourant un volume τ : le second théorème de Kelvin permet de transformer une intégrale vectorielle de surface en une intégrale de volume.

Kelvin 2 $$\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}S\vec{n} = \iiint_{\tau/S} \overrightarrow{grad}\,f\,\mathrm{d}\tau$$

4.1 Théorème de Green - Ostrogradski

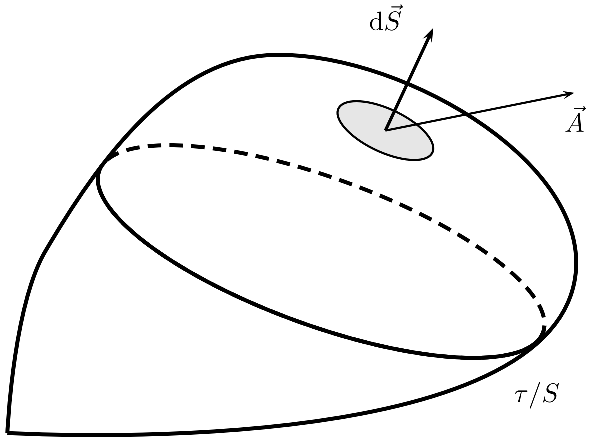

Figure 4 – Théorème de Green-Ostrogradski

$$\textbf{Green - Ostrogradski} \quad \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\tau/S} \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

4.2 Théorème de Stokes

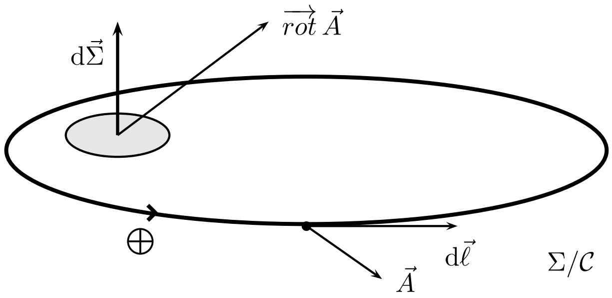

FIGURE 5 – Théorème de Stokes

$$\textbf{Stokes} \qquad \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\,\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma}$$

5 Surfaces - Volumes

5.1 Expressions générales

Une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ est le produit vectoriel de deux déplacements élémentaires $\mathrm{d}\vec{\ell_1} = \mathrm{d}\ell_1\vec{e_1}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell_2} = \mathrm{d}\ell_2\vec{e_2}$ où $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_s} = \vec{e_1}\wedge\vec{e_2}$ sont des vecteurs unitaires :

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}\vec{\ell_1}\wedge\mathrm{d}\vec{\ell_2} = \mathrm{d}\ell_1\mathrm{d}\ell_2\sin\alpha\,\vec{e_s}$$

où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.

Dans le cas des coordonnées cartésiennes, on vérifie donc que $\mathrm{d}\vec{S_2} = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e_y}$ puisque $\mathrm{d}\vec{S_2} = \mathrm{d}z\vec{e_z}\wedge\mathrm{d}x\vec{e_x}$. Le produit vectoriel $\mathrm{d}x\vec{e_x}\wedge\mathrm{d}z\vec{e_z}$ possède le signe opposé, il faut donner l'indication de l'orientation pour qu'il n'y ait pas d'équivoque. Dans le théorème de STOKES, on est contraint par le choix d'une orientation sur le contour $\mathcal{C}$. On trouvera une surface par intégration de la surface élémentaire.

Un volume élémentaire est le produit mixte de trois déplacements élémentaires :

$$\mathrm{d}\tau = \left(\mathrm{d}\vec{\ell_1}\wedge\mathrm{d}\vec{\ell_2}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell_3} = \left(\mathrm{d}\vec{\ell_3}\wedge\mathrm{d}\vec{\ell_1}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell_2} = \left(\mathrm{d}\vec{\ell_2}\wedge\mathrm{d}\vec{\ell_3}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell_1}$$

Le produit mixte autorise les permutations cycliques, ce qui est rappelé dans la formule ci-dessus.

On peut retrouver facilement l'expression du volume élémentaire en cartésien puisque les trois déplacements élémentaires sont orthogonaux entre eux :

$$\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}x\,\vec{e_x}\wedge\mathrm{d}y\,\vec{e_y})\cdot\mathrm{d}z\,\vec{e_z} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\vec{e_z}\cdot\mathrm{d}z\,\vec{e_z} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Un volume sera ensuite déterminé par intégration du volume élémentaire.

5.2 Surfaces et volumes en cylindriques

L'objectif de ce paragraphe est de gagner en aisance pour exprimer divers éléments de surface et de volume dans le cas d'une situation physique décrite à l'aide des coordonnées cylindriques. On mettra en place des calculs autour d'un cylindre de hauteur h et de rayon R représenté à la figure 6.

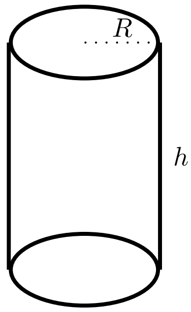

FIGURE 6 – Cylindre à base circulaire

- Retrouver par intégration la surface du disque comme celui de la face inférieure (ou supérieure) du cylindre.
- En déduire l'expression de la surface d'un disque troué de rayon extérieur R et de largeur e.
- Déterminer l'expression de la surface élémentaire d'un disque élémentaire troué de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$. Faire un schéma et commenter.
- Retrouver par intégration le volume du cylindre.
- En déduire l'expression du volume d'une portion de cylindre définie par un angle α (imaginer une portion de camembert).
- Exprimer le volume d'un tuyau de hauteur h, de rayon extérieur R et d'épaisseur e.
- Exprimer le volume élémentaire d'un tuyau de hauteur h, de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$. Faire un schéma et commenter.

5.3 Surfaces et volumes en sphériques

L'objectif de ce paragraphe est de gagner en aisance pour exprimer divers éléments de surface et de volume dans le cas d'une situation physique décrite à l'aide des coordonnées sphériques. On mettra en place des calculs autour d'une boule de rayon R représenté à la figure 7.

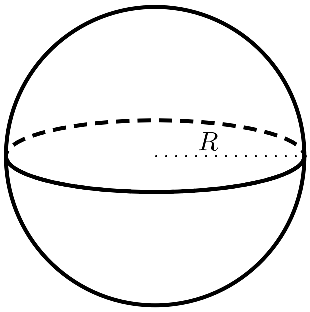

FIGURE 7 – Boule

— Retrouver par intégration la surface de la sphère de rayon R qui enferme la boule.
— Déterminer la surface d'une portion de la sphère de demi-angle au sommet α ($\theta \in [0, \alpha]$).
— Déterminer l'expression de la surface élémentaire d'une couronne élémentaire comprise entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$.
— Retrouver par intégration le volume de la boule.
— En déduire l'expression du volume d'une boule trouée de rayon extérieur R et d'épaisseur e.
— Exprimer le volume élémentaire d'une boule trouée (peau d'orange en quelque sorte) de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$. Faire un schéma et commenter.