

## Angle solide

Cette notion généralise celle d'angle définie dans un plan. Pour l'angle traditionnel, on caractérise une portion de courbe plane depuis un point origine. Pour l'angle solide, on caractérise une portion de surface toujours depuis un point origine.

### 1 Angle plan

#### 1.1 Angle sur une portion de cercle depuis le centre

L'angle en radian sous lequel on voit une portion de courbe circulaire plane depuis le centre de cette courbe est défini par :

$$\theta = \frac{\ell}{R} \quad \text{ou} \quad \ell = R\theta$$

si  $R$  est le rayon du cercle et  $\ell$  la longueur de la portion circulaire envisagée. Voir le schéma de la figure 1a).

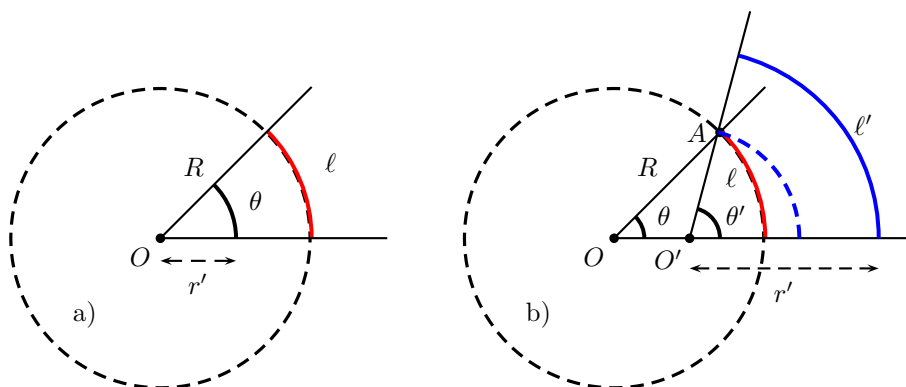


FIGURE 1 – Angle plan

On retrouve l'expression du périmètre d'un cercle lorsque la longueur interceptée représente la totalité du cercle :

$$\theta = 2\pi \quad \text{et} \quad \ell = 2\pi R$$

On peut constater que la définition de l'angle est finalement indépendante du rayon pour toute portion de cercle de centre  $O$  puisque la longueur de l'arc qui matérialise  $\theta$  sur le schéma de la figure 1 est  $\ell' = r'\theta$ . Une fois les deux droites précisant les limites de la zone dont on veut évaluer l'angle définies, on a  $\theta = \frac{\ell'}{r'}$ .

#### 1.2 Angle sur une portion de cercle depuis un point autre que le centre

Ce paragraphe a pour but de nous sensibiliser à l'importance du point choisi comme origine pour l'évaluation d'un angle. On choisit un cas relativement simple. Sur la figure 1b), on considère comme origine le point  $O'$  situé par exemple au milieu du rayon  $OO' = R/2$ . L'angle  $\theta'$  sous lequel on voit la portion de cercle de longueur  $\ell$  depuis  $O'$  est nécessairement différent de  $\theta = \ell/R$ . L'intuition nous indique que cet angle est plus grand que celui évalué depuis  $O$ . Comment le déterminer ? Nous venons de voir qu'il suffit d'effectuer le rapport entre une longueur  $\ell'$  de rayon quelconque  $r'$  et de centre  $O'$  :  $\theta' = \ell'/r'$  en notant bien que la longueur  $\ell'$  est définie par les deux droites limites qui sélectionnent la longueur  $\ell$ . On peut utiliser la longueur  $\ell'$  apparaissant sur le schéma de la figure 1b). Mais il est important de la relier à la courbe de longueur  $\ell$ , c'est-à-dire soit à  $\ell$  soit à l'angle  $\theta$ . Le choix d'un rayon  $r'$  quelconque n'est alors pas le plus habile. Si l'on choisit comme rayon de cercle  $r' = O'A$ , on voit de façon maintenant évidente que l'angle  $\theta'$  sera plus grand que l'angle  $\theta$  puisque la longueur du parcours  $\ell'$  en pointillés est plus grande que  $\ell$ . Pour relier  $\theta$  et  $\theta'$ , on pourra appliquer des règles de trigonométrie classique ce qui va nous amener à écrire que :

$$\tan \theta' = \frac{R \sin \theta}{R \cos \theta - R/2} = \frac{2 \sin \theta}{2 \cos \theta - 1} = \tan \theta \frac{1}{1 - 1/(2 \cos \theta)}$$

Cette expression montre bien que  $\theta' > \theta$ . Sur le schéma de la figure 1, on avait  $\theta = 45^\circ$ . On trouve alors  $\theta' = 74^\circ$ . En conclusion, on retiendra que :

Depuis  $O$ , on voit  $\ell$  sous un angle  $\theta = 45^\circ$ . Depuis  $O'$ , on voit  $\ell$  sous un angle  $\theta' = 74^\circ$

### 1.3 Angle de vue d'une portion de courbe plane quelconque

La distance depuis le centre d'évaluation de l'angle à savoir le point  $O$  varie, voir le schéma de la figure 2. L'angle sous lequel on voit la portion de courbe  $AB$  depuis  $O$  est la somme de toutes les contributions élémentaires des portions infinitésimales  $d\vec{\ell}(M)$  pour laquelle on a un angle  $d\theta = \frac{d\vec{\ell} \cdot \vec{e}_\theta}{r(M)}$ .

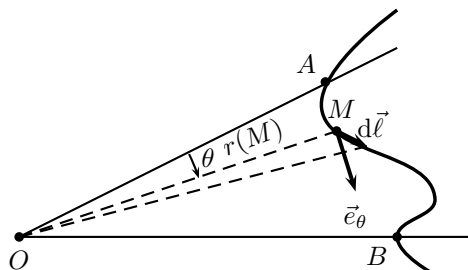


FIGURE 2 – Portion de courbe plane quelconque

On peut donc en déduire que l'angle  $\theta$  est donné par :

$$\theta = \int_A^B \frac{d\vec{\ell} \cdot \vec{e}_\theta}{r(M)}$$

Cette intégrale est en général peu facile à évaluer.

### 1.4 Diamètre apparent

L'expression *diamètre apparent* intervient souvent en optique lorsqu'on évalue la taille d'un objet éloigné de l'instrument d'optique que l'on utilise. Cet objet peut être terrestre mais la plupart du temps, c'est un objet céleste. Le cas le plus classique est le *diamètre apparent* de la Lune ou du Soleil. Cette taille est évaluée par l'angle sous lequel on voit l'objet depuis un point  $O$  où se trouve l'instrument d'optique. Le *diamètre apparent* est donc un angle contrairement à ce que laisse penser son nom. C'est l'angle sous lequel on voit les bords opposés de l'objet. Comme dans la plupart des cas, les objets célestes sont à symétrie sphérique, le *diamètre apparent* est le même quels que soient les bords considérés. Une lunette astronomique a comme fonction de modifier le trajet des rayons lumineux de telle sorte que le l'angle sous lequel on voit l'objet soit plus grand, on dit couramment qu'on voit l'objet plus gros.

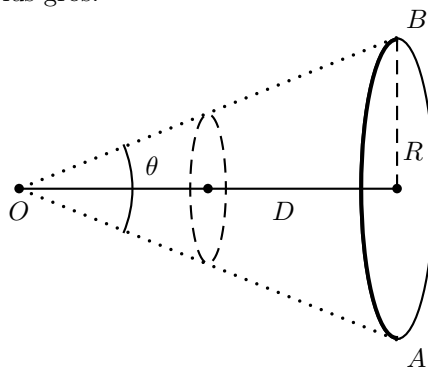


FIGURE 3 – Diamètre apparent

Le fait que l'objet observé soit très éloigné du point  $O$ , centre d'observation, signifie que  $R \ll D$ . On peut écrire, dans ces conditions, que :

Diamètre apparent :  $\theta = \frac{2R}{D}$

On a assimilé dans l'expression précédente la corde  $AB = 2R$  et l'arc correspondant à la portion de cercle de centre  $O$ , de rayon  $OA = OB = \sqrt{D^2 + R^2}$ , délimité par les points  $A$  et  $B$ .

Pour la Lune de rayon  $R_L = 1740$  km et de distance à la Terre  $D_{TL} = 384\,000$  km, on trouve que  $\theta_L = 9,1 \times 10^{-3}$  rad, c'est à dire 31' minutes d'arc. Pour le Soleil, on a  $R_S = 700\,000$  km et  $D_{TS} = 150 \times 10^6$  km. Il

est assez curieux de constater que les deux diamètres apparents sont quasiment égaux :  $\theta_S = 9,3 \times 10^{-3}$  rad, c'est-à-dire 32' minutes d'arc. Cette situation nous montre bien que sur la figure 3, l'angle sous lequel on voit le diamètre du petit disque est le même que celui sous lequel on voit le grand, ce qui compte se sont les deux droites passant par les bords opposés.

## 2 Angle solide

### 2.1 Angle solide sur une portion de sphère depuis le centre

L'angle plan correspond, nous l'avons vu avant, à la délimitation d'une zone de l'espace à deux dimensions (le plan. . .) correspondant à une portion de courbe plane. Pour l'angle solide, il en va de même mais en considérant cette fois la délimitation d'une zone de l'espace à trois dimensions. À la place de raisonner sur un cercle, on raisonne sur une sphère, voir le schéma de la figure 4. L'angle solide  $\Omega$  est perçu comme définissant un cône de sommet  $O$ , d'angle  $\alpha$ , dont on a représenté deux génératrices  $OA$  et  $OB$ .

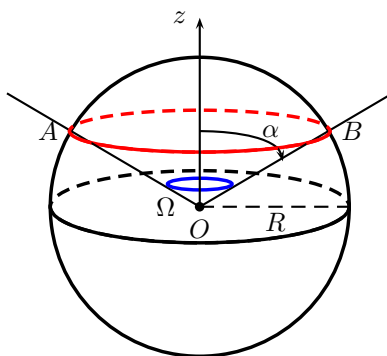


FIGURE 4 – Angle solide

Soit  $S_c$  la surface sphérique en forme de calotte délimitée par le cône. L'angle solide sous lequel on voit la surface  $S_c$  depuis  $O$  est défini par :

$$\Omega = \frac{S_c}{R^2}$$

Cet angle peut s'exprimer à l'aide de l'angle plan  $\alpha$ . En effet, si on considère les coordonnées sphériques d'axe  $Oz$  traditionnelles  $(r, \theta, \varphi)$ , la calotte sphérique est caractérisée par  $r = R$ ,  $\theta \in [0, \alpha]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Ces données nous permettent de calculer  $S_c$ . Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques est  $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$ . La surface élémentaire sur la sphère ( $r = R$  et  $dr = 0$ ) correspond à  $dS_c = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ . On a donc  $S_c = R^2 \int_0^\alpha \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$ . Cette surface est donc :  $S_c = R^2(1 - \cos\alpha)2\pi$ . On en déduit que l'angle solide est :

$$\Omega = \frac{S_c}{R^2} = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

On peut définir l'angle solide élémentaire  $d\Omega$  comme celui sous lequel on voit une surface élémentaire sphérique  $dS_c$  depuis le point  $O$ . On a alors :

$$d\Omega = \frac{dS_c}{R^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

On notera que la vision complète de tout l'espace correspond à un angle  $\alpha = \pi$ . L'angle solide maximal est  $\Omega = 4\pi$  stéradian. L'angle solide s'exprime en stéradian autrement dit « radian stérique », le terme stérique étant employé au sens d'espace. On rappelle que l'angle plan maximal est  $\theta = 2\pi$  radian. On terminera en notant que si l'on se place en un point  $O'$  de l'axe  $Oz$  situé au-dessus de  $O$  avec  $0 < z_{O'} < R$ , l'angle solide sous lequel on verra la surface  $S_c$  sera plus grand que  $\Omega$  :  $\Omega(O) < \Omega(O')$ . On peut concrétiser cette perception en évoquant une salle de cinéma. Lorsqu'on est placé dans les premiers rangs, il est difficile d'englober d'un seul regard la totalité des grands écrans proposés à l'heure actuelle. Souvent, ces places sont délaissées par les spectateurs au profit des places situées dans le fond de la salle. L'angle solide sous lequel on voit l'écran depuis sa place est nettement plus grand dans les premiers rangs que dans les derniers.

Nous allons voir dans ce qui suit - sur un exemple - que l'évaluation de l'angle solide ne dépend pas en fait de la nature de la surface observée depuis  $O$  mais uniquement du cône qui définit cette surface. En clair, si l'on

imagine une surface ouverte de forme plane s'appuyant sur le contour circulaire passant par  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire un disque, l'angle solide sera toujours  $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ . De la même façon si cette surface est *gondolée* mais toujours appuyée sur le contour circulaire passant par  $A$  et  $B$ , l'angle solide sera encore  $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ . Dans les deux cas cités, le calcul de l'angle solide nécessite l'utilisation de la définition la plus générale de l'angle solide que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

## 2.2 Angle solide pour une surface quelconque

L'évaluation d'un angle solide ne se fait pas seulement pour une surface sphérique. Les exemples pris précédemment le prouvent. Nous allons commencer par donner la définition de l'angle solide élémentaire en considérant un point d'observation  $O$  et une surface élémentaire  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à cette surface. Soit  $M$  le point de l'espace qui localise la surface considérée, voir le schéma de la figure 5 où la taille de la surface a été grossie pour faciliter la compréhension.

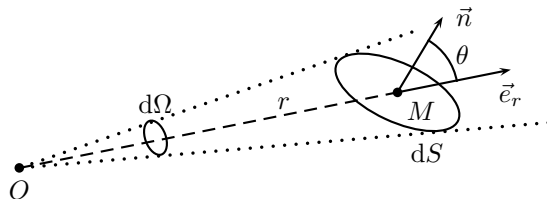


FIGURE 5 – Angle solide élémentaire

L'angle solide élémentaire est une grandeur scalaire algébrique définie par :

$$d\Omega = \frac{dS\vec{n} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \quad \text{et} \quad \Omega = \iint_S \frac{dS\vec{n} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

On notera que le signe de l'angle solide dépend de l'orientation de la normale à la surface, si  $(\vec{n}, \vec{e}_r) < \pi/2$  alors  $d\Omega > 0$  et si  $(\vec{n}, \vec{e}_r) > \pi/2$  alors  $d\Omega < 0$ . Nous allons mettre en pratique cette définition pour le calcul de l'angle solide d'un disque s'appuyant sur le contour circulaire  $AB$  évoqué avant, voir le schéma de la figure 6.

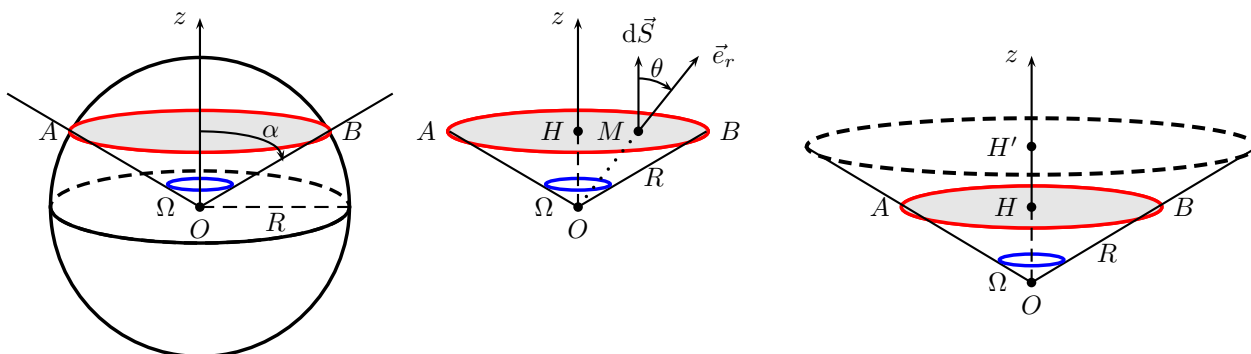


FIGURE 6 – Angle solide d'un disque

Sur la figure 6, on note  $\rho = HM$  et  $\varphi$  l'angle des coordonnées sphériques défini par rotation autour de l'axe  $Oz$ . La surface élémentaire située à la distance  $r = OM$  du point d'observation  $O$  est  $d\vec{S} = \rho d\rho d\varphi \vec{e}_z$ . L'angle solide élémentaire est donc  $d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{\rho d\rho d\varphi \cos \theta}{r^2}$ . On note  $h = OH = R \cos \alpha$  puisque les bords opposés du disque sont définis par l'angle  $\alpha$ . On a  $h = r \cos \theta$  et  $\rho = h \tan \theta$ , cette dernière expression permet d'écrire que  $d\rho = \frac{h d\theta}{\cos^2 \theta}$ . On a donc  $d\Omega = \frac{(h^2 \tan \theta / \cos^2 \theta) \cos \theta d\theta d\varphi}{h^2 / \cos^2 \theta}$ . Après simplification cette expression donne  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  qu'on intègre pour  $\theta \in [0, \alpha]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . On trouve donc que pour le disque s'appuyant sur le contour circulaire passant par  $AB$  l'angle solide est :

$$\Omega_{\text{disque}} = 2\pi(1 - \cos \alpha) = \Omega_{\text{calotte sphérique}}$$

Nous avons illustré le fait que l'angle solide est le même pour toutes les surfaces  $\mathcal{S}_i$  (ouvertes) s'appuyant un même contour  $\mathcal{C}$  orienté. Nous admettrons que cette propriété est très générale. Dans le calcul de l'angle solide pour le disque, on voit que la hauteur  $h = OH$  se simplifie. On constate donc que si l'on effectue le calcul pour le disque de hauteur  $h' = OH'$ , on obtiendra exactement le même angle solide  $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ . Finalement, ce qui compte pour l'angle solide, c'est le cône de sommet  $O$  qui délimite la surface que l'on observe depuis  $O$  et donc ni la forme de la surface, ni sa distance depuis  $O$ . Ce résultat très important va nous servir par la suite.

### 2.3 Angle solide pour une surface fermée vue depuis l'intérieur

Imaginons maintenant que le rayon du disque  $HB = h \tan \theta$  tende vers l'infini en se plaçant toujours au niveau du point  $O$  pour l'observation, c'est-à-dire en fait en maintenant  $h$  fixé. Cela revient à dire que  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  et par conséquent que l'angle solide sous lequel on voit le plan infini depuis  $O$  est par conséquent  $\Omega_{\text{plan infini}} = 2\pi$ . On comprend aisément que, puisque le plan observé est infini, la distance  $h$  est tout à fait indifférente tant qu'elle reste bornée.

Considérons maintenant un second plan infini symétrique du premier par rapport au point  $O$ . Ce dernier est vu, lui aussi, depuis le point  $O$  sous un angle solide  $\Omega_{\text{plan infini}} = 2\pi$ . Les deux plans parallèles se rejoignent à l'infini et forment une surface fermée, certes un peu particulière, mais non contestable. L'angle solide sous lequel, on voit la totalité de la surface fermée depuis le point  $O$  intérieur à cette surface est donc la somme des deux valeurs précédentes :

$$\boxed{\Omega_{\text{surface fermée vue depuis l'intérieur}} = 4\pi}$$

Ce résultat est totalement indépendant du point  $O$  choisit pourvu qu'il soit à l'intérieur de la surface fermée considérée. On peut remarquer que la valeur  $\Omega = 4\pi$  stéradian est identique à celle de la sphère vue depuis son centre. Nous venons d'illustrer en quelque sorte la même propriété que celle vue pour le disque et la calotte sphérique mais au niveau d'une surface fermée. On retiendra le résultat général suivant : l'angle solide sous lequel on voit une surface fermée depuis un point quelconque intérieur à celle-ci est toujours  $\Omega = 4\pi$  quelle que soit la forme de la surface fermée. Par exemple, si on considère un point  $O$  d'observation intérieur à un cube, on peut affirmer que l'angle solide total sous lequel on voit la totalité du cube est  $\Omega = 4\pi$ , voir le schéma de la figure 7.

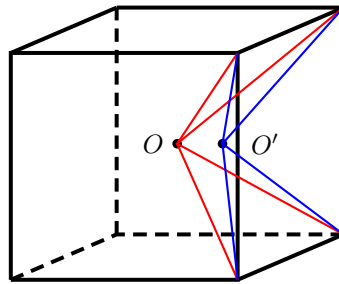


FIGURE 7 – Cube

Que l'on se place en  $O'$  ou bien en  $O$  (centre du cube), l'angle solide sous lequel on voit la totalité du cube (surface fermée) reste égal à  $4\pi$ . Par contre, l'angle solide sous lequel on voit la face de droite du cube (surface ouverte) dépend du point d'observation. On a évidemment  $\Omega(O') > \Omega(O)$ . On peut même écrire que  $\Omega(O') > \frac{2\pi}{3}$  stéradian du fait du caractère particulier du point  $O$ .  $O$  est en effet le centre du cube. On voit donc par symétrie depuis  $O$  avec le même angle solide toutes les faces puisque depuis  $O$  elles sont toutes équivalentes. L'angle solide total étant  $4\pi$ , et tout l'espace étant constitué de 6 faces carrées équivalentes depuis  $O$ , on a  $\Omega_{\text{face}} = \frac{4\pi}{6}$  et donc  $\Omega(O) = \frac{2\pi}{3}$  stéradian pour une face carrée du cube.

### 2.4 Angle solide pour une surface fermée vue depuis l'extérieur

Pour commencer, on considère deux surfaces ouvertes élémentaires  $dS_1$  et  $dS_2$  interceptées par un même cône de sommet  $O$ . Ces deux surfaces font partie d'une surface fermée  $\mathcal{S}$  et on considère que  $O$  est un point extérieur à la surface fermée  $\mathcal{S}$ , voir le schéma de la figure 8.

Pour une surface fermée, la convention d'orientation du vecteur normal est que ce dernier pointe de la surface vers l'extérieur. On peut en voir l'application sur le schéma de la figure 8. Les deux surfaces  $dS_1$  et  $dS_2$  sont définies par le même cône élémentaire défini depuis  $O$ . Elles sont donc vues sous le même angle solide élémentaire en valeur absolue mais, compte tenu de l'orientation des vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  par rapport à  $\vec{e}_r$ , on a la relation :

$$d\Omega_2 = -d\Omega_1$$

Cette relation va être lourde de conséquences au niveau de l'évaluation de l'angle solide sous lequel on voit une surface fermée depuis un point extérieur à celle-ci. En effet, considérons une surface fermée représentée sur la figure 9 uniquement par sa projection dans un plan.

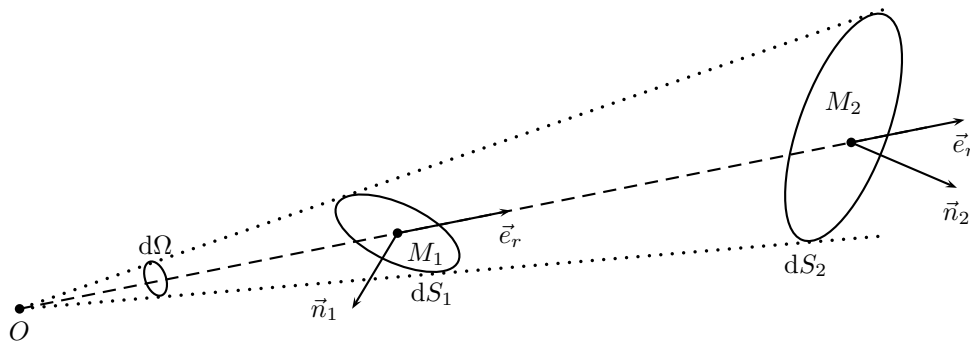


FIGURE 8 – Angle solide élémentaire vu depuis l'extérieur

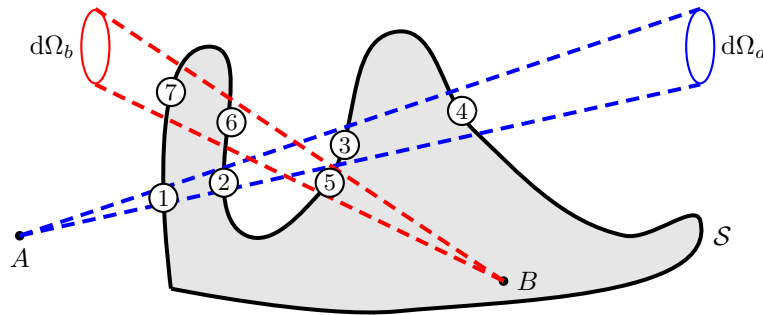


FIGURE 9 – Angle solide pour une surface fermée

Sur cette figure, on considère que  $d\Omega_a > 0$  et  $d\Omega_b > 0$ . Si on considère le point  $A$  placé à l'extérieur, l'angle solide élémentaire sous lequel on voit la surface est  $d\Omega_A = d\Omega_1 + d\Omega_2 + d\Omega_3 + d\Omega_4$  en comptabilisant les deux entrées et les deux sorties de  $\mathcal{S}$ . Comme on l'a vu avant, on a  $d\Omega_a = d\Omega_2 = d\Omega_4 = -d\Omega_1 = -d\Omega_3$  à cause de l'orientation de la normale vers l'extérieur. On a donc  $d\Omega_A = 0$ . Si l'on se place à l'intérieur de la surface, l'angle solide élémentaire sous lequel on voit la surface est  $d\Omega_B = d\Omega_5 + d\Omega_6 + d\Omega_7$ . Il y a forcément une sortie de plus que d'entrées dans  $\mathcal{S}$  si l'on est à l'intérieur. On a alors  $d\Omega_b = d\Omega_5 = d\Omega_7 = -d\Omega_6$ . L'angle solide est  $d\Omega_B = d\Omega_b > 0$ . En intégrant sur tous les cônes qui sont nécessaires depuis  $A$  pour observer la totalité de la surface  $\mathcal{S}$  (et respectivement sur tous ceux nécessaires depuis  $B$  pour observer  $\mathcal{S}$ ), on obtient le résultat fondamental suivant :

$$\boxed{A \text{ extérieur à } \mathcal{S} : \Omega_A = 0 \quad \text{et} \quad B \text{ intérieur à } \mathcal{S} : \Omega_B = 4\pi}$$

### 3 Utilisations de l'angle solide

#### 3.1 Démonstration du théorème de Gauss

On considère une situation comme celle de la figure 9 où l'on a placé une charge ponctuelle  $q_A$  au point  $A$  et une charge ponctuelle  $q_B$  au point  $B$ . On calcule le flux du champ électrique créé par ces deux charges sur la surface fermée  $\mathcal{S}$ . On peut décomposer ce champ en un champ créé par  $q_A$  et un champ créé par  $q_B$ . On a  $\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$ . Le flux du champ électrique est donc : 
$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \iint_S \frac{q_A \vec{e}_r(A) \cdot d\vec{S}}{r^2(A)} + \iint_S \frac{q_B \vec{e}_r(B) \cdot d\vec{S}}{r^2(B)} \right).$$
 On voit apparaître, après avoir sorti la charge de l'intégrale, les angles solides sous lesquels on voit la surface fermée depuis  $A$  et depuis  $B$  :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q_A \Omega_A + q_B \Omega_B)$$

Or, nous venons de voir que  $\Omega_A = 0$  puisque  $A$  est extérieur à la surface et que  $\Omega_B = 4\pi$  puisque  $B$  est intérieur à  $\mathcal{S}$ . Ce résultat, montré à l'aide de deux charges ponctuelles, se généralise de façon évidente à toute distribution de charges : seules les charges intérieures à la surface fermée  $\mathcal{S}$  vont contribuer au flux du champ électrique :

$$\boxed{\text{Théorème de GAUSS : } \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}}$$

### 3.2 Champ électrique créé par une surface

On envisage ici le calcul du champ électrique créé par une surface uniformément chargée possédant un axe de symétrie que nous noterons  $Oz$ . La charge surfacique uniforme de la surface est notée  $\sigma$ . Voir le schéma de la figure 10. Le champ électrique créé en  $M$  par l'élément de surface  $d\vec{S}$  est donné par :  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{e}_r$ . Puisque l'axe  $Oz$  est un axe de symétrie, le champ électrique totale est de la forme  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$ . Donc seule la projection de  $d\vec{E}$  sur l'axe  $Oz$  contribue au champ électrique. On a donc  $dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS \cos\theta}{r^2}$ . Or, nous avons vu que  $d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2}$ , on peut donc écrire que le champ électrique élémentaire  $dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$  où  $d\Omega$  est l'angle solide élémentaire sous lequel on voit la surface  $dS$  depuis  $M$ .

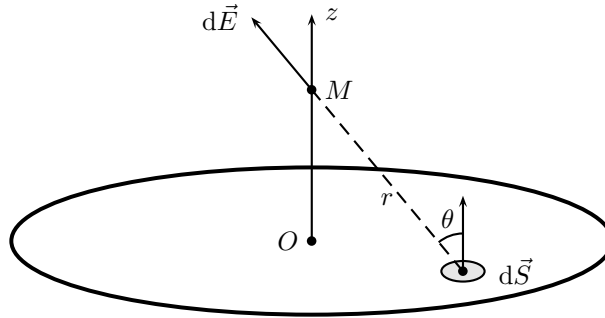


FIGURE 10 – Surface possédant un axe de symétrie

En conclusion, pour toute surface plane possédant un axe de symétrie, le champ électrique sur l'axe est donné par :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi} \vec{e}_z$$

où  $\Omega$  est l'angle solide sous lequel on voit la surface chargée à l'origine du champ depuis le point  $M$ .

On peut donner deux applications simples de cette loi : dans le cas du plan infini on a vu que  $\Omega_{\text{plan infini}} = 2\pi$ , on retrouve l'expression classique du champ créé de part et d'autre :  $\vec{E}_{\text{plan}} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$  pour chaque demi-espace délimité par ce plan. On peut aussi facilement déterminer le champ créé par une surface carrée au point  $O$  de la figure 11. Dans ce cas, le point  $O$  est le centre de l'hypothétique cube formé de six faces carrées dont l'une (en gris sur la figure) est caractérisée par une distribution surfacique uniforme  $\sigma$ .

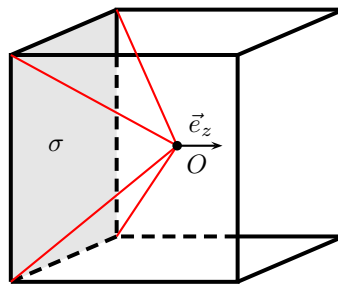


FIGURE 11 – Cube possédant une face chargée

Nous avons vu que depuis le point  $O$  la surface carrée est vue sous un angle solide  $\Omega_{\text{carré}} = \frac{2\pi}{3}$ . On en déduit donc que :

$$\vec{E}_{\text{carré en } O} = \frac{\sigma}{6\epsilon_0} \vec{e}_z$$

### 3.3 Puissance solaire reçue par la Terre

La notion d'angle solide permet d'exprimer la puissance reçue par la Terre en provenance du Soleil. Ici, on ne se préoccupe pas de l'émission de puissance sous forme d'ondes électromagnétiques par le Soleil. On note simplement  $P_S$  la puissance émise par le Soleil. On appelle  $d$  la distance séparant le Soleil de la Terre ( $d \simeq 150$  millions de kilomètres). On considère le Soleil comme ponctuel situé en  $O$  origine de l'évaluation des angles

solides. La puissance solaire se dilue progressivement sur une sphère dont la surface augmente comme son rayon au carré. La Terre représente une toute petite portion de cette surface sphérique puisque son rayon  $R_T$  est très petit devant  $d$ . Il peut s'avérer pratique d'utiliser la notion d'angle solide pour caractériser cette portion de surface sphérique. Comme  $R_T \ll d$ , on peut considérer que la portion de surface occupée par la Terre est assimilable à la surface du disque terrestre à savoir  $\pi R_T^2$ . Par conséquent, l'angle solide sous lequel on voit la Terre depuis le Soleil<sup>1</sup> est :

$$\Omega_{\text{Terre}} = \frac{\pi R_T^2}{d^2}$$

L'émission du Soleil étant isotrope, la puissance reçue par la Terre est dans le rapport de l'angle solide à l'angle solide total de la puissance émise. On a :

$$P_{\text{reçue par la Terre}} = \frac{\Omega_{\text{Terre}}}{4\pi} P_S = \frac{R_T^2}{4d^2} P_S$$

### 3.4 Intensité, éclairement

En optique, nous utilisons très souvent ces deux grandeurs. Elles découlent de la puissance correspondant à l'onde électromagnétique. Cette puissance qu'on notera  $\mathcal{P}$  est proportionnelle au carré du champ électrique, on retiendra que  $\mathcal{P} \propto \vec{E}^2$ . L'intensité  $\mathcal{I}$  et l'éclairement  $\mathcal{E}$  lumineux sont définis à partir de la puissance selon :

$$\mathcal{I} = \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} \text{ en W par stéradian} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \frac{d\mathcal{P}}{dS} \text{ en W} \cdot \text{m}^{-2}$$

En optique, on utilisera indifféremment l'intensité ou l'éclairement bien que ces deux grandeurs ne soient pas équivalentes.

1. Ici, on ne considère pas la Terre comme constituant une surface fermée, ce qui annulerait l'angle solide, car elle n'est éclairée que sur une face, le calcul du flux solaire est limité à un côté.