

Mécanique quantique et couche anti-reflet

L'effet RAMSAUER-TOWNSEND (1922) montre la transparence de l'hélium gazeux pour un faisceau d'électrons pour certaines valeurs de l'énergie E des électrons comme par exemple $E = 0,7 \text{ eV}$. En modélisant un atome d'hélium comme un puits de potentiel carré de profondeur $-V_0 < 0$ et de largeur $a = 0,2 \text{ nm}$ pour les électrons, on peut expliquer ce phénomène d'absence de réflexion de l'onde associée au quanton représentant l'électron. Les développements qui permettent de comprendre ce phénomène sont identiques à ceux que l'on rencontre dans le cadre de la réalisation d'une couche anti-reflet dans le domaine de l'Optique ou celui de l'utilisation d'un gel pour la réalisation d'une échographie médicale.

L'étude est basée sur l'évolution de la fonction d'onde $\varphi(x)$ d'un quanton non localisé, non relativiste dans le cadre de l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \quad \text{dont l'analogie en Optique est} \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + n_i^2 \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x) = 0$$

Les fonctions d'onde dépendantes du temps en Mécanique quantique et en Optique :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \exp i(kx - \frac{E}{\hbar}t) \quad \text{et} \quad \psi(x, t) = \psi_0 \exp i(kx - \omega t)$$

1 Réflexion et transmission à une interface

1.1 Le point sur les vecteurs d'onde

Les milieux de propagation n'absorbent pas l'onde, ils sont considérés comme transparents. On envisage une interface entre un milieu 1 où le vecteur d'onde est k_1 et un milieu 2 caractérisé par k_2 . En Optique, dans un milieu d'indice n , le vecteur d'onde est donné par :

$$k_i = n_i \frac{\omega}{c} = n_i \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}}$$

La longueur d'onde dans un milieu est plus courte que dans le vide, en effet la célérité des ondes étant plus faible, la distance parcourue par l'onde pendant une période est plus petite. On a : $\lambda_1 = \lambda_{\text{vide}}/n_1$. Toujours en Optique, on est souvent confronté à une interface entre l'air $n_1 = 1,00$ et le verre d'indice de réfraction $n_2 = 1,50$. Les vecteurs d'onde sont :

$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

Dans le cas d'une interface air-verre, on constate que $k_2 > k_1$.

En Mécanique quantique, on retrouve une situation analogue dans le cas de l'évolution du potentiel $V(x)$ représenté sur le graphique de la figure 1. En effet, les vecteurs d'ondes des milieux 1 et 2 sont :

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

Dans ce cas, on peut faire l'analogie de l'interface située en $x = 0$ avec l'interface air-verre dont nous venons de parler puisque dans les deux cas, on trouve $k_2 > k_1$.

1.2 L'onde arrive du milieu 1 sur le milieu 2

1.2.1 La situation

On considère une onde incidente représentée par l'amplitude complexe qui arrive depuis le milieu 1 sur l'interface 1 – 2 sous une incidence normale. Pour simplifier les calculs, l'interface 1 – 2 est placée est $x = 0$. L'onde incidente est représentée par l'amplitude complexe $A_1 \exp ik_1 x$. Elle génère une onde réfléchie dans le milieu 1 décrite par l'amplitude complexe $B_1 \exp -ik_1 x$ et une onde transmise d'amplitude complexe $A_2 \exp ik_2 x$. On a donc une onde dans le milieu 1 qui est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et une onde uniquement progressive dans le sens x croissant dans le milieu 2 :

$$\varphi_1(x) = A_1 \exp ik_1 x + B_1 \exp -ik_1 x \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = A_2 \exp ik_2 x$$

1.2.2 Conditions de raccordement

À l'interface nous allons écrire la continuité de la fonction d'onde ainsi que de sa dérivée. En Mécanique quantique, les arguments sont l'obligation de la continuité de la densité de probabilité pour la continuité de $\varphi(x)$ et le caractère borné du potentiel $V(x)$ qui impose - au travers de l'équation de SCHRÖDINGER - la continuité de la dérivée de la fonction d'onde. En Optique, les milieux de propagation sont des diélectriques, c'est-à-dire des isolants qui interdisent la possibilité de distributions surfaciques de charges et de courants à l'interface 1 – 2. Il s'en suit la continuité des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} . Si la fonction d'onde représente le champ électrique alors sa dérivée spatiale représente le champ magnétique. Les conditions de raccordement sont donc du même type dans les deux cas. Il est bien évident qu'une telle situation ne se limite pas aux ondes de probabilité ou aux ondes électromagnétiques, elle est très générale dans l'étude des ondes qui changent de milieu de propagation. On pourra l'illustrer à la fin de cette étude par l'exemple des ondes ultrasonores utilisées lors des échographies médicales. Les conditions de raccordement sont donc :

$$\varphi_1(x=0) = \varphi_2(x=0) \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\varphi_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\varphi_2}{dx} \right|_{x=0}$$

Des calculs élémentaires conduisent aux deux équations suivantes :

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad \text{et} \quad k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2$$

1.2.3 Réflexion et transmission

Nous allons nous intéresser aux coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} définis par :

$$r_{12} = \frac{B_1}{A_1} \quad \text{et} \quad t_{12} = \frac{A_2}{A_1}$$

Ces coefficients sont des coefficients portant sur les amplitudes des ondes, ils ne doivent pas être confondus avec les coefficients R et T tels que $R + T = 1$ qui concernent les densités de courant de probabilité en Mécanique quantique et la puissance - ou l'énergie - à travers le vecteur de POYNTING dans le cas des ondes électromagnétiques. Des calculs simples conduisent à :

$$r_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad t_{12} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Nous allons donner une forme un peu différente à ces coefficients pour généraliser plus facilement leur forme. ici, on travaille avec une onde incidente arrivant du milieu 1 de vecteur d'onde k_1 pour se réfléchir et se transmettre dans le milieu 2 de vecteur d'onde k_2 . On va poser ε_{12} le rapport des vecteurs d'onde dans le sens 1 → 2 défini par :

$$\varepsilon_{12} = \frac{k_1}{k_2}$$

On constate que dans le cas de l'interface air-verre ou bien de l'interface arrivée sur le puits de potentiel, on a $k_1 < k_2$. Dans ces deux exemples, on a $\varepsilon_{12} < 1$. On en déduit la forme d'écriture suivante des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

$$r_{12} = -\frac{1 - \varepsilon_{12}}{1 + \varepsilon_{12}} \quad \text{et} \quad t_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{1 + \varepsilon_{12}}$$

Une petite remarque qui paraît anodine au premier abord. Lorsqu'en Optique une onde se réfléchit sur un milieu plus réfringent - c'est-à-dire un milieu d'indice de réfraction plus élevé - comme c'est le cas de l'interface air-verre, on a $\varepsilon_{12} < 1$ et donc $r_{12} < 0$: la réflexion s'effectue avec un changement de signe pour le champ

électrique, si on a défini r par rapport à ce champ. C'est pourquoi, dans les études d'optique ondulatoire comme les interférences, nous avons ajouté un déphasage de π à l'amplitude d'une onde ou $\lambda/2$ à la différence de marche de l'onde qui subissait une telle réflexion. Le coefficient de transmission, lui, est toujours positif.

1.2.4 Courant de probabilité - puissance

Nous allons exprimer les coefficients R et T de réflexion et de transmission de la densité de courant de probabilité en Mécanique quantique qui correspond à la puissance ou encore à l'énergie en Optique. La relation $R+T=1$ garantit la conservation de l'énergie ou encore la normalisation de la probabilité, si le quanton possède 70% chances d'être réfléchi, il a alors 30% de chances d'être transmis. En Mécanique quantique la densité de courant de probabilité est définie par :

$$J_i = |\varphi|_{\text{incident}}^2 v_{\text{quanton}} = |\varphi|_{\text{incident}}^2 \frac{\hbar k_i}{m}$$

La densité de courant de probabilité incidente correspond à $\varphi_{\text{incident}} A_1 \exp ik_1 x$, la densité réfléchie J_r à $B_1 \exp -ik_1 x$ et celle transmise J_t à $A_2 \exp ik_2$. Les coefficients de réflexion et de transmission correspondent à :

$$R_{12} = \frac{J_r}{J_i} \quad \text{et} \quad T_{12} = \frac{J_t}{J_i}$$

Avec les expressions des fonctions d'onde et en tenant compte des vecteurs d'ondes, on trouve facilement que :

$$R_{12} = \frac{B_1^2}{A_1^2} = r_{12}^2 \quad \text{et} \quad T_{12} = \frac{A_2^2 k_2}{A_1^2 k_1} = t_{12}^2 \frac{k_2}{k_1}$$

Nous avons défini $\varepsilon_{12} = k_1/k_2$. En utilisant ce coefficient, on obtient les expressions suivantes des coefficients :

$$R_{12} = \left(\frac{1 - \varepsilon_{12}}{1 + \varepsilon_{12}} \right)^2 \quad \text{et} \quad T_{12} = \frac{4\varepsilon_{12}}{(1 + \varepsilon_{12})^2}$$

On voit très facilement grâce à ces expressions que la relation $R_{12} + T_{12} = 1$ est bien vérifiée. N'oublions pas que les expressions sont totalement identiques pour l'Optique ou l'Électromagnétisme de façon plus générale. En effet, ces coefficients sont définis à partir des vecteurs de POYNTING en moyenne temporelle, vecteurs associés à l'onde incidente, à l'onde réfléchie et à l'onde transmise. Or, ce vecteur est défini par $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$. Dans le cas d'une onde plane progressive sinusoïdale, la relation de structure impose $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$. Si $\varphi(x)$ représente l'amplitude complexe du champ électrique, l'amplitude du champ magnétique sera alors en $\varphi(x) k$. On comprend alors aisément que l'amplitude du vecteur de POYNTING sera bien en $|\varphi|^2 k$. Il y a analogie complète avec la définition de la densité de courant de probabilité.

1.3 L'onde arrive du milieu 2 sur le milieu 1

1.3.1 La situation

On conserve la même interface 1 – 2 ou air-verre mais maintenant on envisage une onde qui arrive depuis la droite, c'est-à-dire que l'on va travailler de 2 vers 1. L'onde incidente est représentée par l'amplitude complexe $B'_2 \exp -ik_2x$. Elle génère une onde réfléchie dans le milieu 2 décrite par l'amplitude complexe $A'_2 \exp ik_2x$ et une onde transmise d'amplitude complexe $B'_1 \exp -ik_1x$. On a donc une onde dans le milieu 2 qui est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et une onde uniquement progressive dans le sens x décroissant dans le milieu 1 :

$$\varphi'_2(x) = A'_2 \exp ik_2x + B'_2 \exp -ik_2x \quad \text{et} \quad \varphi'_1(x) = B'_1 \exp -ik_1x$$

1.3.2 Coefficients de réflexion et de transmission

Les conditions de raccordement sont les mêmes. Il y a continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée au passage de l'interface. On obtient alors les relations suivantes :

$$A'_2 + B'_2 = B'_1 \quad \text{et} \quad k_2(A'_2 - B'_2) = -k_1B'_1$$

Comme nous l'avons fait avant, on pose $\varepsilon_{21} = k_2/k_1$. On définit le coefficient de réflexion comme $r_{21} = A'_2/B'_2$ et le coefficient de transmission $t_{21} = B'_1/B'_2$. Les mêmes calculs que ceux effectués précédemment permettent d'arriver facilement aux expressions suivantes :

$$r_{21} = -\frac{1 - \varepsilon_{21}}{1 + \varepsilon_{21}} \quad \text{et} \quad t_{21} = \frac{2\varepsilon_{21}}{1 + \varepsilon_{21}}$$

On constate qu'elles sont en tout point identiques à celles que nous avons établies pour l'interface 1 – 2 en permutant le rôle de ε_{12} pour ε_{21} . Cela revient à intervertir les rôles des vecteurs d'onde k_1 et k_2 . Que l'on aborde une interface dans un sens x croissant ou x décroissant, cela n'a aucune importance. Ce qui compte, c'est le passage d'une interface de k_1 vers k_2 ou de k_2 vers k_1 . Comme nous l'avons fait précédemment, nous allons envisager la réflexion d'une onde lumineuse se propageant dans le verre et se réfléchissant à l'interface avec de l'air - on sort d'une lame de verre par exemple -. Dans ce cas $k_2 > k_1$ puisque $n_2 > n_1 = 1,00$. On a donc $\varepsilon_{21} > 1$. On constate que le coefficient de réflexion $r_{21} > 0$, pas de changement de signe pour l'amplitude de l'onde.

En conclusion, nous avons justifié l'attitude que nous avons adopté en Optique ondulatoire, en particulier dans l'étude des interférences. Lors d'une réflexion de l'air sur le verre, on a compté un changement de signe de l'amplitude de l'onde lumineuse alors que lors d'une réflexion depuis verre sur l'air, il n'y a pas de changement de signe. Ceci s'est avéré important pour la détermination de la différence de marche et ensuite pour trouver les positions des franges brillantes et des franges sombres.

2 Une double interface et le phénomène anti-reflet

2.1 La situation

La situation de double interface est très courante en Optique, c'est la situation de la lame de verre placée sur le parcours des rayons lumineux. En Mécanique quantique, c'est la situation d'un puits de potentiel de profondeur finie, puits symétrique ou dissymétrique, falaise de potentiel à paliers... Nous nous plaçons plutôt dans le cadre de la Mécanique quantique pour continuer même si cela ne restreint en rien la généralité de l'étude comme nous le verrons ensuite.

Le puits de potentiel est représenté sur la figure 1. Il est représenté sous une forme dissymétrique pour plus de généralité. On considère $V_0 > 0$ et $V'_0 \geq 0$. Sur la figure, on a $V'_0 < V_0$ mais on peut envisager d'autres cas comme les pointillés de la figure 1 le suggère. Ceci sera discuté après la mise en place de la condition d'anti-reflet. L'énergie du quanton est E , le quanton est supposé provenir depuis $-\infty$ sur le puits de potentiel. On étudie les états stationnaires donnés par l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

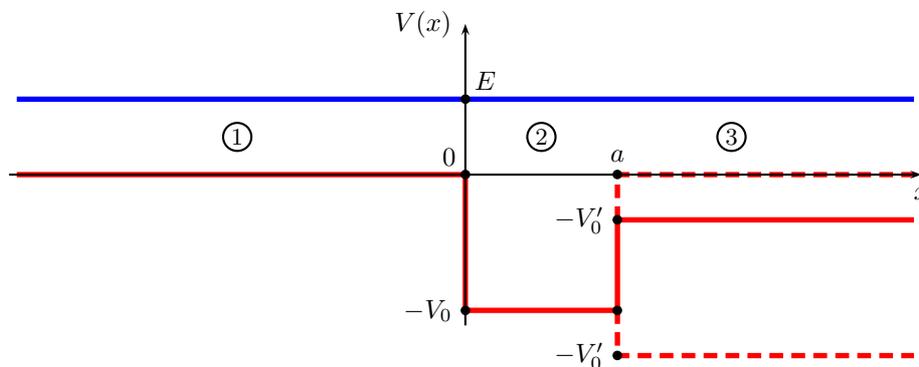


FIGURE 1 – Puits de potentiel symétrique ou dissymétrique ou falaise de potentiel

Dans la zone 1, on pose $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, dans la zone 2 $k_2^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}$ et dans la zone 3 $k_3^2 = \frac{2m(E + V'_0)}{\hbar^2}$.

2.2 Interférences multiples

2.2.1 Description des ondes

Comme le montre de façon très schématique la figure 2, la fonction d'onde va subir plusieurs fois des réflexions et des transmissions qui vont affecter l'amplitude de l'onde et son signe. Nous nous intéressons particulièrement à l'onde transmise par la double interface.

2.2.2 Les amplitudes transmises

Nous commençons par évaluer l'amplitude de l'onde $A_{3,1}$ qui est issue d'une double transmission par rapport à l'onde incidente d'amplitude A_1 . En utilisant les coefficients de transmission sur les interfaces 1 – 2 et 2 – 3, on comprend facilement que l'on peut écrire que :

$$A_{3,1} = A_1 t_{12} t_{23}$$

Il faut toutefois remarquer que la relation précédente est discutable car l'onde sortant du puits ou de la lame de verre est déphasée par rapport à l'onde incidente sur l'interface $x = 0$. En effet, il y a un parcours a dans le milieu 2, cela correspond à un déphasage $k_2 a$. Il faudrait le faire figurer donc multiplier l'expression précédente de l'amplitude transmise par $\exp(jk_2 a)$. Nous ne le ferons pas en choisissant comme référence des phases l'onde d'amplitude $A_{3,1}$.

L'amplitude de la seconde onde transmise est le résultat d'une transmission par t_{12} , d'une réflexion par r_{23} , puis d'une réflexion par le coefficient r_{21} et enfin d'une transmission par t_{23} . La seconde onde est déphasée par rapport la première car elle a parcouru 2 fois l'épaisseur de la lame de verre ou la largeur du puits de potentiel. Nous allons noter $\phi = k_2 2a$ ce déphasage. L'amplitude de cette onde est donc :

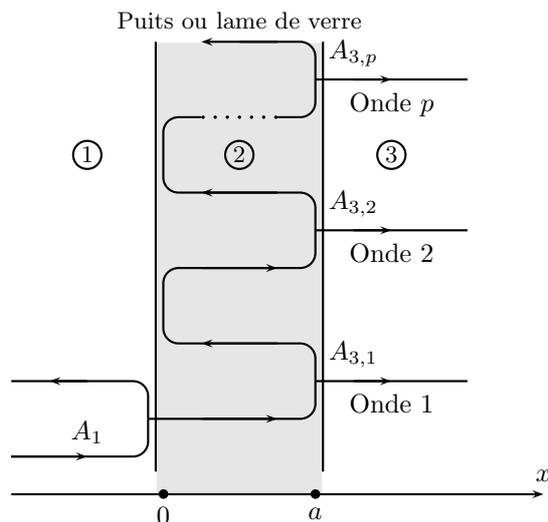


FIGURE 2 – Réflexions et transmissions successives d’une onde. Les décalages transversaux sont fictifs et ont pour seul but de faciliter la lecture.

$$A_{3,2} = A_1 t_{12} t_{23} r_{21} r_{23} \exp j\phi$$

Nous allons pouvoir passer à la troisième onde. On suit son chemin pas à pas et on constate qu’elle fera de toute façon toujours deux transmissions correspondant à t_{12} et t_{23} mais sur le plan de la réflexion il y aura deux réflexions sur l’interface 2 – 3 ce qui génère un coefficients r_{23}^2 et, bien sûr, aussi deux réflexions sur l’interface 2 – 1 de coefficient r_{21}^2 . Il ne faut pas oublier que l’onde parcourt 4 fois la largeur du puits. On a donc :

$$A_{3,3} = A_1 t_{12} t_{23} (r_{21} r_{23})^2 \exp j2\phi$$

Vous avez compris ce qu’il se passe. Pour obtenir l’onde i , il suffit d’incrémenter la puissance des coefficients de réflexion et du déphasage :

$$A_{3,i} = A_1 t_{12} t_{23} (r_{21} r_{23} \exp j\phi)^{i-1}$$

2.2.3 Amplitude transmise

L’amplitude totale transmise est la somme de toutes les amplitudes transmises dans notre raisonnement pour i allant de 1 jusqu’à l’infini. L’amplitude transmise est donc :

$$A_3 = A_1 t_{12} t_{23} \sum_{i=1}^{\infty} (r_{21} r_{23} \exp j\phi)^{i-1}$$

La somme est celle d’une suite géométrique de raison $r_{21} r_{23} \exp j\phi$. Le module de cette raison est inférieur à 1 puisque la valeur absolue de chaque coefficient de réflexion est inférieure à 1 comme en atteste les expressions que nous avons établies avant. La somme converge. Heureusement pour la Physique car, dans le cas contraire, cela voudrait dire que l’énergie disponible en sortie de la lame de verre divergerait ou que la probabilité de présence au-delà du puits de potentiel divergerait. Le calcul de la somme infinie est donc aisé et on obtient :

$$A_3 = A_1 \frac{t_{12} t_{23}}{1 - r_{21} r_{23} \exp j\phi}$$

2.2.4 Courant de probabilité transmis

Nous allons concentrer notre attention sur le coefficient de transmission T_{13} que l’on va définir par :

$$T_{13} = \frac{A_3^2 k_3}{A_1^2 k_1} = \epsilon_{31} \frac{t_{12}^2 t_{23}^2}{1 + r_{21}^2 r_{23}^2 - 2r_{21} r_{23} \cos \phi}$$

Si l’on veut maximiser ce coefficient qui exprime en quelque sorte la probabilité transmise, il faut obligatoirement jouer sur la fonction $\cos \phi$ pour minimiser le dénominateur de T_{13} . Il faut le faire en prenant garde au

fait que les coefficients de réflexion en amplitude r_{21} et r_{23} peuvent être positifs ou négatifs. Il faut donc faire attention au signe du produit $r_{21}r_{23}$ car tous les cas de figure peuvent se produire.

2.2.5 Recherche des conditions de l'effet anti-reflet pour $r_{21}r_{23} > 0$

Commençons donc par supposer $r_{21}r_{23} > 0$. Le dénominateur sera minimal lorsque $\cos \phi = 1$. Cela signifie que la phase vérifie $k_2 2a = p 2\pi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ puisqu'avec les définitions que nous avons posées, k_2 négatif ou nul n'aurait pas sens. L'obtention de l'effet anti-reflet s'obtient avec une condition de quantification mais cela n'est pas suffisant, il faut effectuer le calcul de T_{13} pour le rendre égale à 1 ou alors réaliser $R_{13} = 0$. Avec la condition précédente $\cos \phi = 1$, on observe que l'expression de T_{13} évolue pour devenir :

$$T_{13} = \varepsilon_{31} \frac{t_{12}^2 t_{23}^2}{(1 - r_{21}r_{23})^2} = \varepsilon_{31} \left(\frac{t_{12} t_{23}}{1 - r_{21}r_{23}} \right)^2 = \varepsilon_{31} \alpha^2$$

Pour débiter le calcul de α , rappelons que $t_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{1 + \varepsilon_{12}} = \frac{2}{1 + \varepsilon_{21}}$ puisque $\varepsilon_{21}\varepsilon_{12} = 1$. En effet, le coefficient ε_{ij} a été défini par $\varepsilon_{ij} = k_i/k_j$. Nous avons aussi $t_{23} = \frac{2\varepsilon_{23}}{1 + \varepsilon_{23}}$ et $r_{21} = -\frac{1 - \varepsilon_{21}}{1 + \varepsilon_{21}}$ ainsi que $r_{23} = -\frac{1 - \varepsilon_{23}}{1 + \varepsilon_{23}}$.

À partir de ces expressions, on arrive dans un premier temps à $\alpha = \frac{2\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23}} = \frac{2}{1 + \varepsilon_{31}}$. Il ne reste plus qu'à utiliser cette expression dans celle donnant $T_{13} = \varepsilon_{31} \alpha^2$. En utilisant $\varepsilon_{13}\varepsilon_{31} = 1$, on aboutit à :

$$T_{13} = \frac{4\varepsilon_{13}}{(1 + \varepsilon_{13})^2} = \frac{4k_1 k_3}{(k_1 + k_3)^2} \quad \text{et} \quad R_{13} = 1 - T_{13} = \left(\frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3} \right)^2$$

Malgré la minimisation du dénominateur, il faut encore, pour annuler R_{13} , que $k_1 = k_3$. Cela signifie que les milieux de propagation 1 et 3 sont les mêmes. Résumons nous. Nous avons trouvé deux conditions pour l'observation du phénomène anti-reflet :

Effet anti-reflet dans le cas $k_1 = k_3$ avec $k_2 2a = p 2\pi$

On peut observer pour finir que la condition $k_1 = k_3$ suffit à observer $r_{21}r_{23} > 0$ puisque ce produit possède le signe de $(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)$. Si k_2 est le plus petit des vecteurs d'onde, les deux différences seront négatives et si k_2 est le plus grand alors elles seront positives. Dans tous les cas, la condition sur les coefficients de réflexion des amplitudes sera respectée. Passons au second cas.

2.2.6 Recherche des conditions de l'effet anti-reflet pour $r_{21}r_{23} < 0$

Supposer $r_{21}r_{23} < 0$ impose le fait que le dénominateur sera minimal lorsque $\cos \phi = -1$. Cela signifie que la phase vérifie $k_2 2a = (p + \frac{1}{2}) 2\pi$ avec $p \in \mathbb{N}$ puisqu'avec les définitions que nous avons posées, k_2 négatif n'aurait pas sens. L'obtention de l'effet anti-reflet s'obtient avec une condition de quantification mais cela n'est pas suffisant, il faut effectuer le calcul de T_{13} pour le rendre égale à 1 ou alors réaliser $R_{13} = 0$. Avec la condition précédente $\cos \phi = -1$, on observe que l'expression de T_{13} évolue pour devenir :

$$T_{13} = \varepsilon_{31} \frac{t_{12}^2 t_{23}^2}{(1 + r_{21}r_{23})^2} = \varepsilon_{31} \left(\frac{t_{12} t_{23}}{1 + r_{21}r_{23}} \right)^2 = \varepsilon_{31} \beta^2$$

On reprend la même démarche de calcul que dans le paragraphe précédent pour obtenir β . On arrive à l'expression suivante $\beta = \frac{2\varepsilon_{23}}{1 + \varepsilon_{21}\varepsilon_{23}}$. On peut déterminer les coefficients en densité de courant ou en énergie :

$$T_{13} = \frac{4\varepsilon_{21}\varepsilon_{23}}{(1 + \varepsilon_{21}\varepsilon_{23})^2} = \frac{4k_1 k_3 k_2^2}{(k_1 k_3 + k_2^2)^2} \quad \text{et} \quad R_{13} = 1 - T_{13} = \left(\frac{k_2^2 - k_1 k_3}{k_2^2 + k_1 k_3} \right)^2$$

Comme dans le paragraphe précédent, une condition s'impose sur les vecteurs d'onde pour obtenir l'effet anti-reflet $k_2 = \sqrt{k_1 k_3}$. cette condition assure la relation d'ordre $k_1 < k_2 < k_3$, l'onde progresse dans des milieux de plus en plus réfringents. Ceci assure automatiquement la condition $r_{21}r_{23} < 0$. Résumons nous. Nous avons trouvé deux conditions pour l'observation du phénomène anti-reflet :

Effet anti-reflet dans le cas $k_2 = \sqrt{k_1 k_3}$ avec $k_2 2a = (p + \frac{1}{2}) 2\pi = (2p + 1)\pi$

3 Puits ou falaise de potentiel

3.1 Puits dissymétrique $0 < V'_0 < V_0$

Les vecteurs d'onde dans les trois milieux sont donnés par :

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad ; \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar} \quad ; \quad k_3 = \frac{\sqrt{2m(E + V'_0)}}{\hbar}$$

Compte tenu des hypothèses faites sur les valeurs de V_0 et V'_0 , on peut organiser la relation d'ordre entre les vecteurs d'onde :

$$k_1 < k_3 < k_2$$

Les coefficients de réflexion dont on doit discuter le signe sont tous les deux positifs puisque :

$$r_{21} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} > 0 \quad ; \quad r_{23} = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} > 0 \quad \text{donc} \quad r_{21}r_{23} > 0$$

Il y a possibilité d'anti-reflet si $k_2 2a = p 2\pi$ avec dans le même temps $k_1 = k_3$. Ici, c'est impossible puisque $k_3 > k_1$. Il est donc impossible d'espérer un phénomène d'anti-reflet avec un puits dissymétrique tel que celui que nous avons envisagé.

Pas d'effet anti-reflet dans le cas du puits dissymétrique (V_0, V'_0) avec $0 < V'_0 < V_0$

3.2 Puits symétrique

On revient dans le cas du problème de RAMSAUER-TOWNSEND avec le puits symétrique à savoir $V'_0 = 0$. Cela change pas mal de chose comme nous allons le constater puisque $k_1 = k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Les relations d'ordre entre les vecteurs d'onde sont :

$$k_1 = k_3 < k_2$$

Dans ces conditions, on a $r_{21}r_{23} > 0$. Puisque la condition $k_1 = k_3$ est assurée, il ne reste plus qu'à imposer celle liée au déphasage de deux ondes consécutives. On doit donc avoir :

$$k_2 2a = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar} 2a = p 2\pi$$

Une quantification de l'énergie apparaît. En élevant au carré, on peut écrire que l'énergie est donnée par :

$$E_p = p^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} - V_0$$

Si l'on considère que la valeur de $E = 0,7 \text{ eV}$ fournie correspond à la plus basse énergie possible permettant à un faisceau d'électrons de traverser de l'hélium comme s'il était transparent alors cela revient à choisir $p = 1$. L'application numérique en électron-volt permet de trouver que $\frac{\hbar^2}{8ma^2 e} = 9,4 \text{ eV}$. Comme ce terme représente $E_1 + V_0$ et que $E_1 = 0,7 \text{ eV}$, on peut en déduire la profondeur du puits de potentiel $V_0 = 8,7 \text{ eV}$. Le phénomène de transparence se reproduit par exemple pour l'énergie $E_2 = 28,9 \text{ eV}$. Selon un modèle classique basé sur l'étude des collisions entre les électrons de basse énergie et les atomes d'hélium, la transparence du gaz rare devrait croître de façon monotone avec l'énergie E des électrons du faisceau. Or, l'observation expérimentale effectuée indépendamment par RAMSAUER et TOWNSEND a montré qu'il n'en était rien ! La transparence présentait des pics pour certaines valeurs de l'énergie ! Seule la Mécanique quantique a été capable d'expliquer le phénomène que nous présentons à travers le modèle simplifié du puits de potentiel symétrique, les énergies favorables à la transparence étant les valeurs de E_p définies ci-dessus.

Effet anti-reflet possible dans le cas du puits symétrique - Effet Ramsauer-Townsend

3.3 Falaise de potentiel à paliers $V'_0 > V_0$

L'évolution de la loi de potentiel $V(x)$ proposée ne permet plus de qualifier la situation de puits. Le terme falaise est plus adapté. Dans ce cas de figure, on considère une seconde chute de potentiel en $x = a$ à savoir $V'_0 > V_0$. On peut voir un second tracé en pointillés sur le schéma de la figure 1. La relation d'ordre entre les vecteurs d'onde est alors :

$$k_1 < k_2 < k_3$$

puisque les vecteurs d'ondes sont définis de la façon suivante avec $E > 0$ et $V_0 < V'_0$:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad ; \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar} \quad ; \quad k_3 = \frac{\sqrt{2m(E + V'_0)}}{\hbar}$$

Dans cette situation, les coefficients de réflexion possède des signes opposés :

$$r_{21} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} > 0 \quad ; \quad r_{23} = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} < 0 \quad \text{donc} \quad r_{21}r_{23} < 0$$

Comme nous l'avons démontré avant, il y a possibilité de phénomène d'anti-reflet à condition de vérifier les deux relations :

$$k_2 = \sqrt{k_1 k_3} \quad \text{et} \quad k_2 2a = (2p + 1)\pi$$

L'énergie est aussi quantifiée dans ce cas de figure :

$$E_p = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} - V_0$$

Effet anti-reflet possible dans le cas de la falaise de potentiel avec $0 < V_0 < V'_0$

Le phénomène d'anti-reflet sera observé lorsque l'énergie prendra les valeurs prévues dans la loi de quantification précédente, encore faut-il assurer la relation entre les valeurs des vecteurs d'onde $k_2 = \sqrt{k_1 k_3}$. Considérons que E_p et V_0 sont fixés, l'effet sera observé pour une valeur du potentiel V'_0 vérifiant la relation issue de la précédente :

$$E_p(E_p + V'_0) = (E_p + V_0)^2$$

Un calcul élémentaire permet de trouver la condition sur le second palier de la falaise de potentiel :

$$V'_0 = V_0 \left(2 + \frac{V_0}{E_p}\right)$$

On peut remarquer que V'_0 est bien supérieur à V_0 comme l'hypothèse de départ le mentionnait. On peut même voir que $V'_0 > 2V_0$ pour espérer avoir l'effet anti-reflet.

La situation de la falaise de potentiel a, à ma connaissance, beaucoup plus d'applications dans le domaine de la propagation des ondes classiques comme les ondes lumineuses ou les ondes sonores comme nous allons le comprendre dans ce qui suit que dans le domaine des ondes de probabilité.

4 Couche anti-reflet en Optique

On se trouve dans le cas de la falaise de potentiel que nous venons d'étudier. En effet, on envisage le dépôt d'une couche de matériau transparent d'indice n_2 et de largeur a entre l'air d'indice de réfraction $n_1 = 1,00$ et le verre d'indice $n_3 = 1,50$. La lumière arrive depuis l'air et traverse le verre et donc avant le verre la couche constituée pour faire l'effet anti-reflet. Nous nous trouvons bien dans la situation de la falaise de potentiel puisque les vecteurs d'onde sont :

$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \quad ; \quad k_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \quad ; \quad k_3 = n_3 \frac{\omega}{c}$$

Pour obtenir l'effet anti-reflet, il faut vérifier les deux conditions :

$$k_2 2a = n_2 \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}} 2a = (2p + 1) \pi \quad \text{et} \quad n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$$

On prend l'exemple d'un rayonnement dans le jaune de longueur d'onde $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ - dans le vide - qui correspond au maximum de sensibilité de l'œil et au maximum dans le spectre de la lumière du Soleil. La plus petite épaisseur de la couche anti-reflet sera obtenue pour $p = 0$ et donc pour la condition $n_2 4a = \lambda$. On trouve tout d'abord $n_2 = \sqrt{n_1 n_3} = 1,23$ et $a = 0,11 \mu\text{m}$. Une telle couche maximise la transmission de la lumière à la longueur d'onde $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$, c'est-à-dire dans le jaune.

5 Gel pour les échographies

Nous savons tous que lors d'une échographie utilisant la propagation des ondes ultrasonores, le médecin dépose un peu de gel à la surface du corps afin que ce gel serve d'intermédiaire entre la sonde émettrice-réceptrice qu'il manipule et le corps. Dans un cas comme celui-ci, on enchaîne trois milieux de propagation successifs : l'air, le gel et le corps. Cela correspond à la situation de la falaise vue avant. Dans ce domaine, on parle plutôt en terme d'impédance, au sens de l'impédance acoustique. L'impédance acoustique¹ est définie en Mécanique des fluides et plus particulièrement en ondes sonores planes par :

$$Z_{\text{acoustique}} = \frac{p}{v} = \rho_0 c$$

où p est la surpression acoustique qui est à l'origine de l'onde sonore, v la vitesse de déplacement des couches de fluide consécutive au passage de l'onde sonore, ρ_0 la masse volumique du fluide au repos et c la célérité des ondes sonores dans le fluide. On peut démontrer que les coefficients $\varepsilon_{12} = k_1/k_2$ et $\varepsilon_{23} = k_2/k_3$ qui définissent le rapport des vecteurs d'onde correspondent au rapport des impédances acoustiques des différents milieux. On a donc $\varepsilon_{12} = Z_1/Z_2$ et $\varepsilon_{23} = Z_2/Z_3$. L'air possède une impédance acoustique $Z_1 = 4 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, le corps $Z_3 = 1,7 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. On comprend donc qu'il est possible de favoriser la transmission des ondes ultrasonores dans le corps en utilisant un gel d'impédance acoustique :

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3} = 2,6 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

On dit que l'on a adapté l'impédance pour éviter le phénomène de réflexion. Un bon fonctionnement de cette couche de gel anti-reflet nécessite aussi de gérer l'épaisseur de la couche de gel. Dans le gel, la célérité des ondes ultrasonores est $c \simeq 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la fréquence des appareils d'échographie médicale de l'ordre de 1 MHz. La longueur d'onde est donc de l'ordre de 1 mm. Une couche de gel dans cet ordre de grandeur conviendra. Il est bien évident que le médecin ne peut pas mesurer précisément l'épaisseur de la couche de gel qu'il utilise. Il fait cela à la louche, mais une fois qu'il appuie la sonde sur le corps, on peut imaginer facilement que l'épaisseur de la couche de gel est dans le bon ordre de grandeur. Le gel utilisé possède aussi l'avantage de limiter la présence d'air entre la sonde et le corps. L'un dans l'autre, le gel favorise la transmission des ondes et aussi ... leur réception. Avec les fréquences utilisées, on atteint couramment une résolution de l'ordre de la longueur d'onde, c'est-à-dire de 1 mm. Avec des fréquences comprises entre 30 et 40 MHz, on descend en dessous.

6 Câble coaxial

Le phénomène d'adaptation d'impédance a été aussi vu dans l'étude théorique et expérimentale du câble coaxial. Lorsqu'en bout de câble, on plaçait une impédance correspondant à l'impédance caractéristique du câble coaxial (en TP $Z_c = 75 \Omega$), on pouvait voir la disparition du phénomène de réflexion en bout de câble. Cette situation n'est pas tout à fait comparable à celle de notre couche anti-reflet mais sur le fond le problème est le même.

1. En acoustique, l'impédance acoustique possède un signe qui est fonction du sens de parcours de l'onde dans le sens x croissant ou dans le sens x décroissant. On a $Z_{\rightarrow} = +\rho_0 c$ et $Z_{\leftarrow} = -\rho_0 c$.

