

Diffusion d'une onde électromagnétique

La diffusion d'une onde électromagnétique par les molécules de l'atmosphère est un exemple très important d'application de la théorie du rayonnement dipolaire. Nous allons reprendre les résultats du rayonnement dipolaire pour présenter le modèle de l'*électron élastiquement lié*. Nous terminerons par présenter les bases de la compréhension de la lumière diffusée par le ciel dont la principale caractéristique est d'être bleue.

1 Préliminaires

1.1 Un peu d'histoire

RAYLEIGH a proposé en 1871 d'expliquer la couleur du ciel par une diffusion de la lumière par les constituants du milieu considéré. Pour les couleurs du ciel, il indique que ce sont les constituants de l'air qui en sont directement à l'origine. RAYLEIGH a écrit que le ciel serait bleu même en l'absence de particules étrangères en suspension. L'étude théorique de RAYLEIGH fait suite aux observations expérimentales de TYNDALL en 1868 de la diffusion de la lumière par un milieu contenant des particules dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde.

Dans l'étude du rayonnement dipolaire, nous avons vu que les champs rayonnés, comme par exemple, le champ électrique évolue en fonction de ω^2 où ω est la pulsation du dipôle oscillant :

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

Comme la puissance correspond au carré des champs, l'évolution de celle-ci sera en ω^4 . En utilisant le fait que $k = \omega/c$ et, par conséquent, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, on peut donc écrire que :

$$P_{ray,dip} = P_m \frac{L^4}{\lambda^4}$$

Les molécules de l'atmosphère se comportent comme des dipôles oscillants. Leur oscillation est excitée par le rayonnement solaire qui comporte toutes les fréquences du visible. Soumis à ce rayonnement, les électrons des molécules ou des atomes oscillent autour de leur position d'équilibre. L'atome ou la molécule constitue alors un dipôle. Par conséquent, les dipôles vont émettre une puissance qui évolue en $1/\lambda^4$. Même si le spectre du Soleil n'est pas homogène du bleu jusqu'au rouge, il y a un facteur 8 entre la puissance émise dans le bleu et celle émise dans le rouge puisque l'on a $\lambda_{rouge} = 750 \text{ nm}$ et $\lambda_{bleu} = 450 \text{ nm}$. On a donc $\lambda_{rouge} \simeq 1,67 \lambda_{bleu}$. On a donc :

$$\frac{P_{bleu}}{P_{rouge}} = \left(\frac{\lambda_{rouge}}{\lambda_{bleu}} \right)^4 = 1,67^4 = 8$$

Le bleu du ciel est partout perceptible, quelle que soit la direction dans laquelle on observe. Ceci est une conséquence du fait que, compte tenu du nombre très élevé de dipôles et du mécanisme d'émission, toutes les directions d'émission sont représentées. Lorsque l'on regarde dans la direction du Soleil - en évitant évidemment de le faire à l'œil nu - la lumière directe du Soleil couvre largement les effets de la diffusion. Mais dès que l'on s'en écarte, c'est la diffusion qui prend le pas... et le ciel est bleu!

Historiquement, la dépendance en $1/\lambda^4$ de la puissance rayonnée a été justifiée par RAYLEIGH en utilisant des arguments très simples : une particule petite devant la longueur d'onde λ de la lumière qui la stimule produit un champ électrique rayonné (ou champ diffusé) d'amplitude E_s proportionnelle à son volume V et à l'amplitude E_m du champ incident. La loi de conservation de l'énergie rayonnée requiert que le champ diffusé diminue avec l'inverse de la distance r à la particule comme il se doit pour une onde sphérique. Le champ électrique rayonné est donc :

$$E_s = \alpha \frac{V}{r} E_m$$

où α est un facteur de proportionnalité. Afin que cette loi de décroissance soit formulée de façon dimensionnellement homogène, il n'y a d'autre choix que de faire intervenir la seule longueur caractéristique non encore utilisée : la longueur d'onde λ ! De la sorte, on accède à une nouvelle forme de la relation exprimant le champ électrique diffusé :

$$E_s = \beta \frac{V}{r\lambda^2} E_m$$

où β est un facteur de proportionnalité sans dimension. Pour passer à la puissance, on élève au carré et on retrouve bien alors la dépendance de la puissance rayonnée en $1/\lambda^4$.

1.2 Modèle planétaire de l'atome de Bohr

Comme nous l'avons vu dans le cadre de l'étude du rayonnement, une particule chargée dotée d'une accélération rayonne et par conséquent perd de l'énergie. On considère le modèle de BOHR de l'atome d'hydrogène avec un électron en mouvement circulaire et uniforme de rayon a autour du proton qui constitue le noyau supposé fixe de l'atome. La force d'interaction est la force électrostatique de COULOMB. L'écriture de la relation de Dynamique pour l'électron de masse m donne :

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_r = -\frac{mv^2}{a} \vec{e}_r$$

L'énergie mécanique du système est constituée de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique et de l'énergie cinétique de l'électron. L'énergie cinétique de l'électron s'exprime simplement à partir de l'expression précédente : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$. On peut en déduire l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_{mec} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Ce modèle planétaire est caractérisé par un moment dipolaire $p = ea$. Nous avons vu que la puissance moyenne rayonnée est donnée par :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p^2 \omega^4}{3c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2 \omega^4}{3c^3}$$

La pulsation ω est reliée à la vitesse v par $v = a\omega$. On peut donc écrire, grâce à l'expression de la vitesse v , que :

$$\langle P_{ray} \rangle = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{e^6}{3m^2 c^3 a^4}$$

Nous justifierons a posteriori le raisonnement en moyenne sur l'évolution de l'énergie qui indique que la puissance rayonnée doit correspondre à une baisse de l'énergie du système :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -\langle P_{ray} \rangle \quad \text{conduit à} \quad \frac{da}{dt} = -\frac{2e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 3m^2 c^3} \frac{1}{a^2}$$

On peut intégrer en considérant qu'à la date $t = 0$ le rayon de l'orbite est a_0 . On arrive à :

$$\left(\frac{a}{a_0} \right)^3 = 1 - \frac{e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 a_0^3} t$$

On constate que le rayon de l'orbite circulaire diminue au cours du temps. On peut mettre en évidence la durée caractéristique τ_r telle que :

$$\tau_r = \frac{8\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 a_0^3}{e^4}$$

Si pour un ordre de grandeur raisonnable de $a_0 = 100$ pm, on évolue l'ordre de grandeur de la durée caractéristique de l'évolution du rayon, on trouve $\tau_r \simeq 10^{-10}$ s. Cet ordre de grandeur justifie le raisonnement basé sur la puissance moyenne de rayonnement car la moyenne est calculée sur la période $T = 2\pi/\omega \simeq 10^{-15}$ s d'une onde électromagnétique dans le visible. On notera que le raisonnement ne sera plus valable lorsque $a \rightarrow 0$ car τ temps alors, lui aussi, vers 0. Mais là n'est pas l'essentiel. Il est important de comprendre que le modèle planétaire n'est pas adapté s'il n'est pas réapprovisionné en énergie !

Nous allons voir le modèle linéaire de l'électron élastiquement lié qui figure au programme.

2 Modèle de l'électron élastiquement lié

2.1 Le modèle

2.1.1 L'onde électromagnétique excitatrice

On considère une onde électromagnétique plane sinusoïdale polarisée rectilignement qui se propage selon un axe Oz de pulsation ω . On choisit pour le champ électrique de l'onde l'axe Ox . On a donc :

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_m \exp i(\omega t - kz)$$

On choisit un milieu suffisamment dilué - à l'image de l'atmosphère - comme milieu de propagation. On pourra donc considérer que $v_\varphi \simeq v_g \simeq c$. Le champ magnétique est donné par la relation de structure :

$$\vec{B} = \vec{e}_y \frac{E_m}{c} \exp i(\omega t - kz)$$

Le vecteur de POYNTING de l'onde est :

$$\vec{\Pi} = \vec{e}_z \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \quad \text{d'où} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle_t = \vec{e}_z \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} c$$

La puissance moyenne qui traverse une section unitaire de l'espace ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) perpendiculairement à l'axe Oz est $\frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} c$.

2.1.2 Le modèle mécanique

On considère un atome positionné à l'abscisse $z = 0$ pour simplifier l'écriture soumis à l'onde électromagnétique précédente. On considère un modèle unidimensionnel sur Ox où l'effet de l'onde se traduit par un atome constitué d'un électron unique de charge $-e$ décalé de la position du noyau et d'un noyau par conséquent. Cette approche traduit le fait que, sans influence extérieure, le barycentre des charges positives et celui des charges négatives coïncident à la position de l'atome alors que s'il y a influence du champ électrique de l'onde, ces deux barycentres n'occupent plus le même lieu et il est créé un moment dipolaire oscillant - comme le champ électrique excitateur - qui rayonne. On supposera que le référentiel d'étude est galiléen. Le bilan des forces subies par l'électron est :

- La force électrique due au champ électrique : $-e E_m \exp i\omega t \vec{e}_x$. On négligera la force magnétique de LORENTZ en supposant très raisonnablement que l'électron n'est pas relativiste.
- Une force de rappel de l'électron à sa position d'équilibre. On la suppose linéaire, de raideur $k = m\omega_0^2$ où ω_0 est alors la pulsation propre de l'électron dans ses oscillations libres autour de sa position d'équilibre. La force est donc : $-m\omega_0^2 x \vec{e}_x$.
- Une force de frottement visqueux modélisant les interactions avec l'environnement au sens large du terme. On la supposera caractérisée par un coefficient de frottement $h = \frac{m}{\tau}$ où τ est un temps caractéristique de l'amortissement de l'oscillateur libre. On a donc la force : $-\frac{m}{\tau} \dot{x} \vec{e}_x$.

La relation de la Dynamique projetée sur l'axe Ox est :

2.2 Calcul du moment dipolaire

$$\underline{p} = \underline{p}_m \exp i\omega t \quad \text{avec} \quad \left| \underline{p}_m \right|^2 = \frac{e^4 E_m^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

La puissance moyenne rayonnée par le dipole est :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{\left| \underline{p}_m \right|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

2.3 Calcul de la puissance moyenne rayonnée

$$\langle P_{ray} \rangle = P_{\infty} \frac{\omega_0^2 \tau^2 u^2}{1 + \omega_0^2 \tau^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)^2} \quad \text{avec} \quad P_{\infty} = \frac{e^4 E_m^2}{12\pi m^2 \varepsilon_0 c^3} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

2.4 Diffusion Rayleigh

La diffusion RAYLEIGH correspond au cas où $\omega \ll \omega_0$, c'est-à-dire $u \ll 1$. Ce cas - qui est le seul au programme - correspond à la situation de la diffusion de la lumière par l'atmosphère. En effet, les fréquences $f = \omega/2\pi$ sont dans le visible de l'ordre de 10^{15} Hz alors que les études des comportements de l'atome montrent que la fréquence propre f_0 est située dans l'UV vers 10^{17} Hz. La diffusion RAYLEIGH est à l'origine de l'explication du bleu du ciel. La puissance rayonnée évolue selon :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{e^4 E_m^2}{12\pi m^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} = P_\infty \frac{\omega^4}{\omega_0^4} = P_\infty \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

2.5 Diffusion Thomson

L'étude de ce cas ne figure pas au programme. Il correspond à $\omega \gg \omega_0$ ou $u \gg 1$. Si on reprend le cas des molécules de l'atmosphère, cela se produira pour $f \gg f_0 = 10^{17}$ Hz. Cela correspond à la diffusion des rayons X ou des rayons γ ! Heureusement pour nous, il y en a très peu qui atteignent l'atmosphère...

Pour $u \gg 1$, on fait évoluer l'expression de la puissance rayonnée :

$$\langle P_{ray} \rangle = P_\infty \frac{\omega_0^2 \tau^2 u^2}{1 + \omega_0^2 \tau^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)^2} \simeq P_\infty \frac{\omega_0^2 \tau^2 u^2}{\omega_0^2 \tau^2 u^2}$$

La puissance rayonnée est donc :

$$\langle P_{ray} \rangle = P_\infty = \frac{e^4 E_m^2}{12\pi m^2 \varepsilon_0 c^3}$$

2.6 Diffusion résonante et cas général

Ce cas n'est pas au programme. La diffusion résonante peut se produire en fonction de la valeur de $\omega_0\tau$. On peut réécrire la puissance moyenne rayonnée selon :

$$\langle P_{ray} \rangle = P_\infty \frac{\omega_0^2 \tau^2 u^4}{u^2 + \omega_0^2 \tau^2 (u^2 - 1)^2} = P_\infty \frac{u^4}{\alpha^2 u^2 + (u^2 - 1)^2} = P_\infty f(u)$$

en ayant posé $\alpha = 1/\omega_0\tau$. Calculons la dérivée de $f(u)$:

$$\frac{df}{du} = \frac{4u^3[u^4 + (\alpha^2 - 2)u^2 + 1] - u^4[4u^3 + 2(\alpha^2 - 2)u]}{[u^4 + (\alpha^2 - 2)u^2 + 1]^2}$$

L'annulation de cette dérivée conduit à l'équation suivante définissant u_r^2 , valeur de u_r s'il y a résonance :

$$u_r^2 = \frac{2}{2 - \alpha^2} = \frac{2\omega_0^2 \tau^2}{2\omega_0^2 \tau^2 - 1}$$

L'existence de u_r est liée à $u_r^2 > 0$ et donc à la condition $\omega_0\tau > 1/\sqrt{2}$.

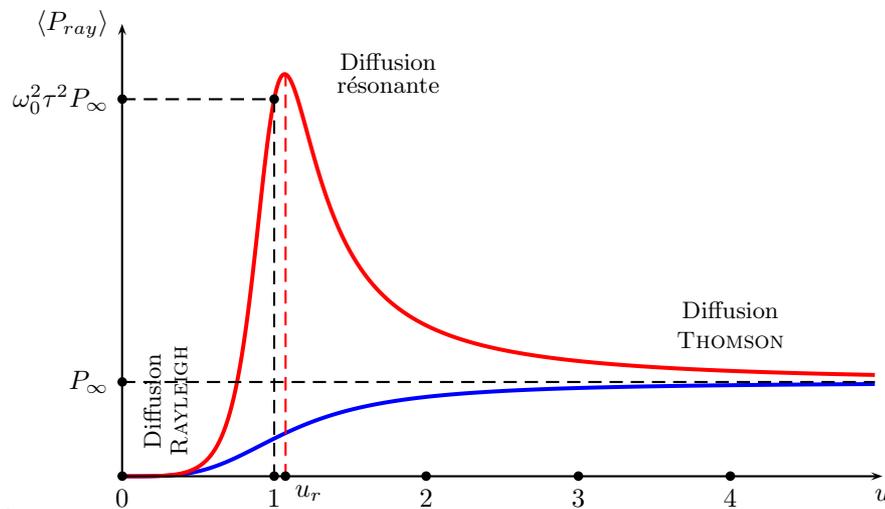


FIGURE 1 – Évolution de la puissance moyenne rayonnée en fonction de la pulsation réduite de l'onde excitatrice $u = \omega/\omega_0$ avec et sans résonance pour respectivement $\omega_0\tau > 1/\sqrt{2}$ et $\omega_0\tau \leq 1/\sqrt{2}$.

3 Observations

Conclure à l'aide de la théorie de RAYLEIGH que le ciel est bleu peut être discuté. Les physiciens BOHREN et FRASEN ont soulevé, puis éliminé, une objection à la démonstration de RAYLEIGH : puisque les rayonnements de plus courte longueur d'onde sont violets dans le spectre visible, pourquoi le ciel n'est-il pas violet plutôt que bleu ? Ils ont trouvé deux explications. Premièrement, la composante violette de la lumière solaire est moins intense que la composante bleue, de sorte que moins de violet est diffusé vers l'observateur, voir la figure 2.

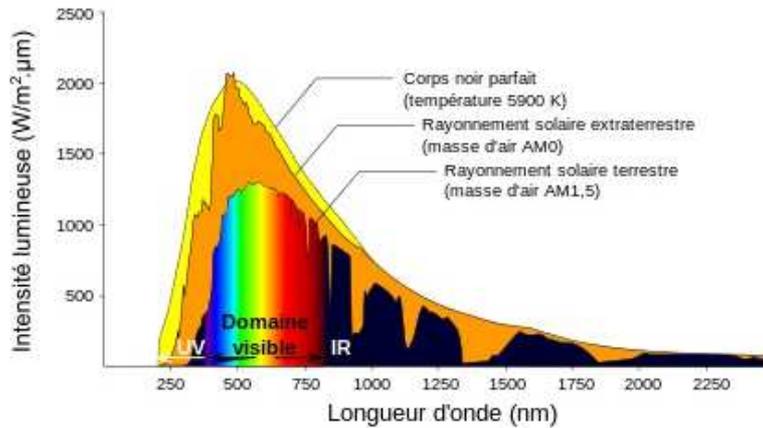


FIGURE 2 – Spectre solaire

Deuxièmement, notre œil est beaucoup moins sensible au violet qu'au bleu, voir la figure 3.

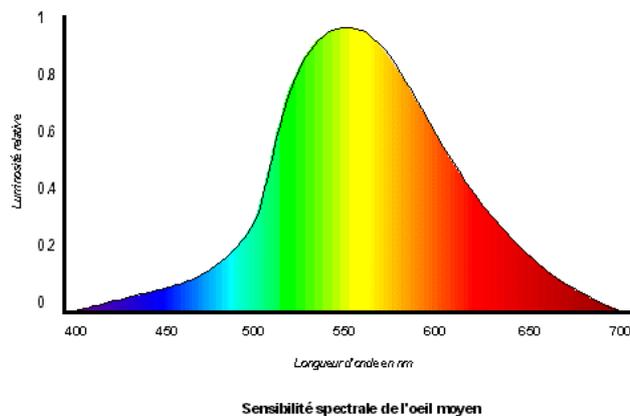


FIGURE 3 – Sensibilité spectrale de l'œil humain

Le ciel est bleu par la diffusion de RAYLEIGH comme on peut le comprendre avec le schéma de la figure 4. Mais comme cette diffusion dans toutes les directions privilégie le bleu, automatiquement la lumière directe s'appauvrit en bleu. Elle apparaît plus rouge qu'elle n'était au départ. La diffusion de la lumière et le renforcement du rouge dans la lumière directe sera d'autant plus importante que l'épaisseur d'atmosphère traversée est grande. Lorsqu'on observe dans la direction du Soleil au zénith, l'effet de rougissement n'est pas perceptible car l'épaisseur d'atmosphère est trop petite. Par contre, au crépuscule il n'en est pas de même. La lumière directe est nettement rouge tant il y a de diffusion du bleu à la traversée de l'atmosphère.

On constate aussi que le ciel diurne apparaît blanc au voisinage de l'horizon alors qu'il est bleu dans les autres directions de l'espace. Ceci est aussi une conséquence du phénomène de diffusion. Pour le comprendre, il faut toutefois songer aux multiples diffusions successives que subit l'onde lumineuse qui parvient à l'œil de l'observateur. Ces multiples diffusions appauvrissent la lumière en bleu et renforcent son caractère rouge. Mais cette perception se superpose au bleu diffusé par des molécules plus éloignées. L'impression qui résulte des deux effets est donc d'avoir affaire à une lumière blanche, voir la figure 5. L'effet est le même lorsqu'on observe par beau temps des montagnes. Les montagnes proches sont toujours un peu bleutées parce la diffusion s'effectue sur

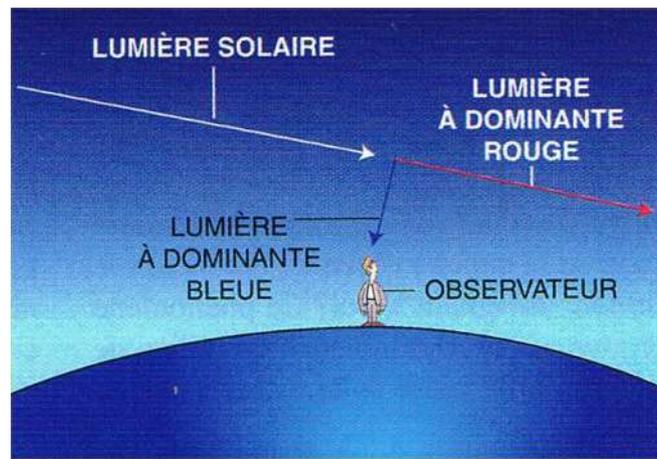


FIGURE 4 – Le ciel est bleu

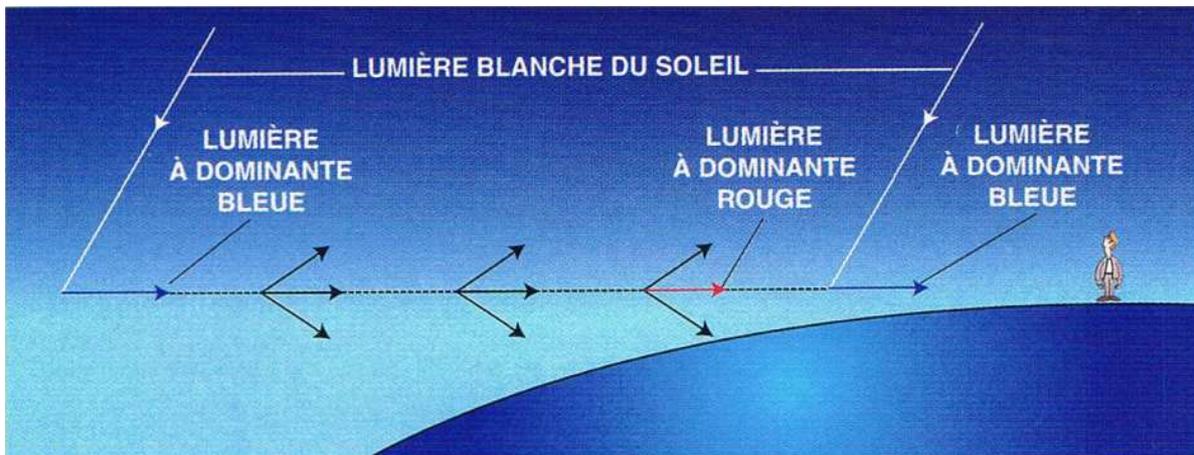


FIGURE 5 – Le ciel est blanc au niveau de l'horizon

des distances modestes. Au contraire, les montagnes éloignées paraissent blanches comme c'est le cas lorsqu'on regarde à l'horizon.

Un dernier point intéressant est à signaler. Les nuages sont en général blancs. Cela est dû au fait qu'ils renferment des particules de glace ou des gouttes d'eau dont les tailles sont aisément de quelques microns. Cette taille est donc nettement supérieure à la longueur d'onde. La théorie qui explique la diffusion de la lumière est la théorie de MIE. Cette théorie complexe - dont la portée peut être discutée car elle a été établie uniquement pour des particules sphériques - montre que la diffusion ne dépend pas - en simplifiant un peu - de la longueur d'onde. Toutes les couleurs du spectre solaire sont donc traitées de façon équivalente. La lumière diffusée est donc blanche. Lorsque le nuage est épais, il paraît gris car il se produit toujours un peu d'absorption. Les nuages noirs sont des nuages très épais qui ne laissent plus passer de lumière solaire. Les nuages prennent la couleur de la lumière qui les éclaire. C'est pour cela qu'ils paraissent rouges le soir au crépuscule.

4 Polarisation

Dès le début du XIX^e siècle, on a observé le fait que la lumière diffusée par l'atmosphère était polarisée dans certaines directions d'observation. La lumière émise par le Soleil qui est à l'origine de la diffusion n'est pas polarisée. C'est le physicien français ARAGO qui a particulièrement étudié ce phénomène. Si l'on utilise des lunettes de soleil à verres polarisés, lunettes qui sont de plus en plus courantes de nos jours, on voit facilement que la perception du ciel avec et sans lunettes est nettement différente.

L'onde électromagnétique rayonnée dans le cadre dipôle de HERTZ possède la structure d'une onde plane locale car elle est observée dans la zone de rayonnement (voir cours sur le dipôle rayonnant $r \gg \lambda$). Les champs électrique et magnétique sont situés dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Dans ces conditions, on peut comprendre en observant le schéma de la figure 6 que en fonction de la direction d'observation, la lumière que l'on perçoit n'est pas polarisée et ou bien l'est. Si l'on regarde dans la direction incidente, le champ électrique \vec{E} présente toutes les directions possibles du plan d'onde qui nous fait face. Par contre, si l'on observe dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière, on peut voir le plan d'onde par la tranche en quelque sorte. Le vecteur champ électrique \vec{E} est évolue dans une direction unique : on perçoit alors une onde polarisée rectilignement. Entre ces deux directions, tous les cas intermédiaires de polarisation partielle existent. On parle de polarisation partielle lorsque la composante du champ électrique \vec{E} est plus élevée dans une direction donnée que dans la direction qui lui est perpendiculaire.

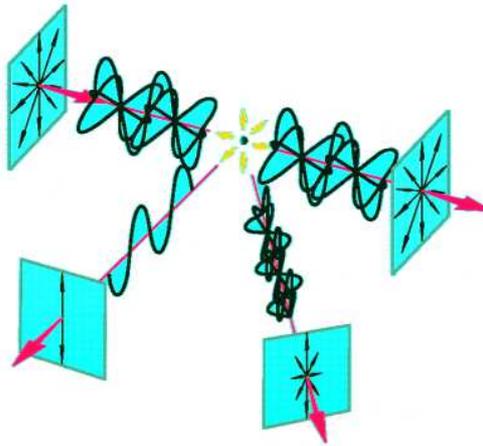


FIGURE 6 – Perception de la lumière polarisée du ciel en fonction de la direction d'observation

Sur les photographies de la figure 7, on peut voir qu'en fonction de l'orientation d'un polariseur rectiligne présent devant l'objectif de l'appareil photo, l'intensité lumineuse du ciel est très atténuée. On voit donc que dans la direction d'observation, on perçoit une lumière bleue du ciel fortement polarisée puisque pour une direction verticale du polariseur, il y a quasiment extinction de MALUS.

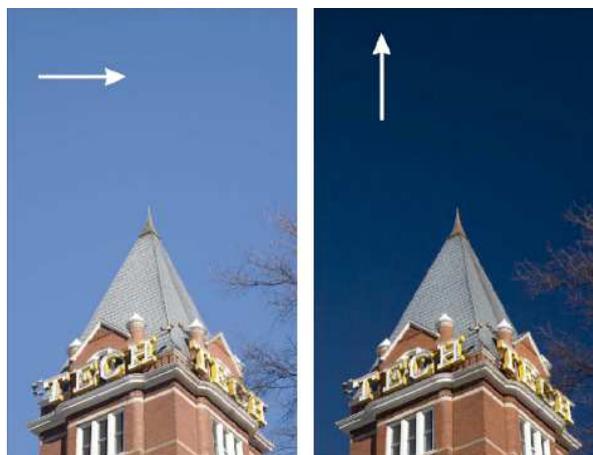


FIGURE 7 – Effet d'un polariseur placé devant l'objectif photographique

Comme nous venons de le dire, dans une observation perpendiculairement à la direction de propagation de la lumière, on devrait avoir une lumière parfaitement polarisée rectilignement. En pratique, ce n'est pas exactement le cas pour diverses raisons : les particules diffusantes sont asymétriques et d'orientations aléatoires, les diffusions sont multiples, de la lumière est réfléchi sur le sol. . . On peut voir sur la photographie de la figure 8 que l'effet du polariseur rectiligne placé devant l'objectif de l'appareil photo n'est pas le même. La photographie a été réalisée avec un objectif dit *grand angle*, c'est-à-dire un objectif qui permet d'embrasser de très nombreuses directions autour de la direction de l'axe optique.



FIGURE 8 – Photographie du ciel prise avec un objectif grand angle de 20 mm muni d'un polariseur

