

## Dipôle électrostatique et dipôle magnétostatique

On étudie un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  ou un dipôle magnétostatique de moment dipolaire  $\vec{m} = m\vec{e}_z$  constants dans le système des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de base locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ . Les deux dipôles sont localisés à l'origine  $O$  du repère. L'étude est limitée aux points  $M$  de l'espace situés à une distance  $r$  grande devant la distance caractéristique des deux dipôles. Pour le dipôle électrostatique, on note  $a$  la distance qui sépare le barycentre des charges négatives du barycentre des charges positives. Pour le dipôle magnétostatique, on propose l'image d'une spire circulaire parcourue par un courant.  $a$  est le rayon de cette spire. Les moments dipolaires sont respectivement  $\vec{p} = qa\vec{e}_z$  et  $\vec{m} = i\pi a^2\vec{e}_z$ . On travaille donc pour  $r \gg a$ .

### 1 Analogie

Les résultats établis en Physique montrent qu'il y a une grande analogie entre les expressions des potentiels et des champs pour les dipôles actifs. Il en va de même lorsque ces dipôles sont considérés comme subissant un champ extérieur uniforme ou non uniforme.

#### 1.1 Les dipôles actifs

Le potentiel électrostatique  $V(M)$  et le potentiel vecteur<sup>1</sup>  $\vec{A}(M)$  possèdent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} & \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{e}_r}{r^2} \\ V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} & \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  et le champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) & \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right] & \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right] \end{aligned}$$

#### 1.2 Les dipôles passifs

On étudie le cas du dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$  et celui du dipôle magnétostatique plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0$ . Les dipôles subissent les actions mécaniques suivantes :

Dipôle électrostatique	Somme des forces subies	Dipôle magnétostatique
$\vec{F} = \vec{0}$		$\vec{F} = \vec{0}$
	Somme des moments des forces subies	
$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$		$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$
	Énergie potentielle	
$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$		$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$

Plongés dans un champ uniforme, les dipôles ne subissent pas de force résultante. Leur centre d'inertie reste immobile ou bien continue à se déplacer à la même vitesse. Si les champs extérieurs n'étaient pas uniformes, il y aurait une force résultante entraînant une modification du mouvement de leur centre d'inertie. Seul le cas du champ extérieur uniforme est au programme, les dipôles ne subissent donc qu'un moment. La situation mécanique est celle d'un couple. L'action se résume donc à un effet de rotation par rapport à un axe perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $(\vec{p}, \vec{E}_0)$  ou  $(\vec{m}, \vec{B}_0)$ . On relève deux positions d'équilibre, la position d'équilibre stable où le moment dipolaire est colinéaire et de même sens que le champ et la position instable où le moment dipolaire et le champ sont parallèles mais de sens contraire.

1. Notion hors-programme.

Dans un champ électrique non uniforme  $\vec{E}_1$  ou d'un champ magnétique non uniforme  $\vec{B}_1$ , le dipôle va subir une force résultante d'expression :

Dipôle électrostatique

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}_1$$

Somme des forces subies

Dipôle magnétostatique

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}_1$$

## 2 Carte des équipotentiels et des lignes du champ créé par les dipôles

Le potentiel électrostatique ne dépend que de  $r$  et de  $\theta$ . Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  dépend de  $\varphi$  dans sa direction puisque  $\vec{A} = A_\varphi(r, \theta)\vec{e}_\varphi$  mais pas dans sa norme. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont contenus dans le plan  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . Le graphique de la figure 1 est réalisé dans un plan  $\varphi$  fixé. Les équipotentiels électriques correspondent à un potentiel électrique fixé. Elles répondent à l'équation  $r^2 = r_0^2 \cos \theta$ . Les équipotentiels (en norme) du potentiel vecteur ne sont pas représentées sur la figure. Les lignes de champ sont identiques pour le champ électrostatique et pour le champ magnétostatique. Elles sont données par  $\vec{E} \wedge d\vec{OM}$  ou  $\vec{B} \wedge d\vec{OM}$ . Avec  $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi$ , on obtient l'équation différentielle  $2 \cos \theta r dr = \sin \theta d\theta$  qu'on intègre pour obtenir l'équation d'une ligne de champ de la forme  $r = r_0 \sin^2 \theta$ .

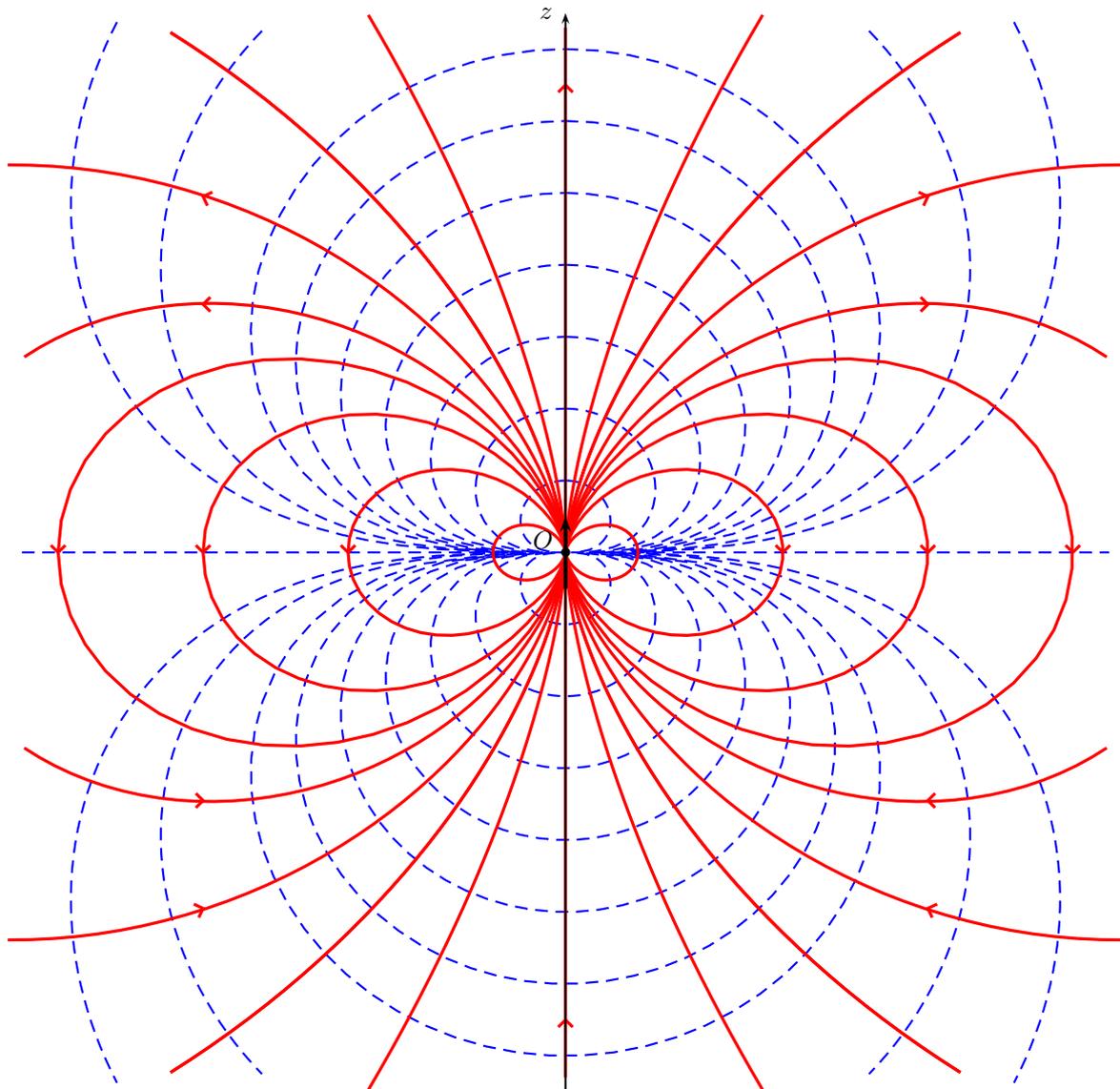


FIGURE 1 – Équipotentiels et lignes de champ