

Électronique non linéaire

L'électronique non linéaire ne figure pas au programme. Toutefois, elle est omniprésente dès que l'on réalise des opérations de traitement d'un signal qu'il soit analogique ou numérique. Il est donc indispensable de posséder quelques connaissances sur ce thème. De plus, les questions de puissance et d'énergie mettent en jeu des produits de grandeurs comme la tension et l'intensité, elles ne relèvent donc pas du domaine linéaire.

1 Modèle de Drude de la conduction

Ce modèle donne naissance à la loi d'OHM dont vous connaissez la forme globale qui s'applique à un conducteur ohmique. La tension est proportionnelle à l'intensité qui le traverse : $u = Ri$. Ici, il s'agit de donner une description des phénomènes à l'échelle des charges qui constituent, par leur déplacement, le courant.

1.1 Mouvement d'une charge

On considère un milieu conducteur où les charges mobiles sont des électrons de charge $-e$. Un conducteur sera d'autant meilleur - toute chose gale par ailleurs - que la quantité de charges disponibles pour assurer le passage du courant est élevée. Cette quantité de charge est caractérisée par une densité volumique d'électrons dits libres qu'on note en général n . Pour fixer les idées, $n \simeq 10^{28} \text{ m}^{-3}$ pour un très bon conducteur comme par exemple le cuivre. Pour les semi-conducteurs comme le silicium qu'on utilise beaucoup dans le domaine de l'électronique, on a $n \simeq 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Enfin, dans un milieu conducteur très peu dense comme peut l'être l'ionosphère - couche de l'atmosphère terrestre située à environ 80 km d'altitude, on a $n \simeq 10^{12} \text{ m}^{-3}$. On note $\rho_m = -ne$ la charge volumique disponible pour l'obtention des courants.

Le modèle de DRUDE est un modèle mécanique simple qui propose d'étudier l'équation du mouvement d'un électron libre de masse m dans le référentiel associé au fil considéré comme galiléen. L'électron subit les forces suivantes :

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - m\vec{g} \quad \text{ou encore} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{h\vec{v}}{m} = -\frac{e}{m}\vec{E} + \frac{e}{m}\vec{B} \wedge \vec{v} + \vec{g}$$

Dans cette équation différentielle, il est intéressant et habituel de poser des constantes de nature temporelle. On pose $\tau = \frac{m}{h}$ un temps caractéristique. Une étude microscopique plus détaillée montrerait qu'il correspond

au temps moyen qui s'écoule entre deux chocs de l'électron libre avec d'autres électrons, avec les ions constituant le réseau cristallin du métal. τ est une durée caractéristique des interactions de l'électron libre avec son environnement.

On définit aussi une pulsation $\vec{\omega}_c$, appelée pulsation cyclotron¹. On pose :

$$\vec{\omega}_c = \frac{e\vec{B}}{m} \quad \text{ou bien} \quad \vec{\omega}_c = \frac{-q\vec{B}}{m}$$

pour une particule de charge q . En faisant intervenir ces deux caractéristiques de nature temporelle ou fréquentielle, l'équation du mouvement de l'électron libre est :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E} + \vec{\omega}_c \wedge \vec{v} + \vec{g}$$

Le poids est une force en général négligeable devant les forces électromagnétiques lorsque l'on s'intéresse à des particules élémentaires comme c'est le cas de l'électron. On raisonnera ensuite sur l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E} + \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}$$

1.2 Modèle classique sans champ magnétique

Dans un conducteur traditionnel, on rencontre de nombreux cas où l'influence du champ magnétique est négligeable. Nous étudierons plus loin un cas de figure où cela ne sera pas le cas. Dans un milieu conducteur comme l'ionosphère où peuvent se propager des ondes électromagnétiques, l'influence du champ magnétique de l'onde électromagnétique est très souvent - là encore - négligeable comme nous le verrons dans l'étude de ces ondes car la condition $vB \ll E$ est très souvent réalisée. L'équation différentielle du mouvement d'une charge mobile (un électron pour être dans le cas le plus courant) est alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

1.2.1 Régime indépendant du temps

Pour dire les choses autrement, on se place en statique du point de vue du champ électrique \vec{E} qui ne dépend pas du temps. Pour simplifier, on considérera qu'il est indépendant des paramètres d'espace : \vec{E} est uniforme.

1. Cette pulsation tire son nom de sa présence dans l'étude des accélérateurs de particules où le champ magnétique est utilisé pour incurver leur trajectoire comme dans les cyclotrons ou les synchrotrons.

1.2.2 Régime dépendant du temps de type harmonique

Pour dire les choses autrement, on se place en régime variable du point de vue du champ électrique avec un champ électrique de la forme : $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ où dans le cadre du courant alternatif utilisé au quotidien, on a $\omega = 2\pi f$ avec $f = 50$ Hz. Pour simplifier, on considérera que le champ électrique est indépendant des paramètres d'espace : \vec{E} est uniforme.

1.3 Densité volumique de courant

1.3.1 Définition

Au niveau microscopique, la grandeur pertinente pour décrire les courants n'est pas l'intensité du courant i mais la densité volumique de courant que nous notons en général \vec{j} . On note ρ_m la densité volumique des porteurs de charge. Dans la plupart des conducteurs, les porteurs de charge sont des électrons de charge $-e$ et de densité volumique n en m^{-3} . Sa définition est :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} = -ne \vec{v}$$

Effectuons une analyse dimensionnelle de cette formule :

1.3.2 Lien avec l'intensité

L'intensité correspond au flux de la densité volumique de courant à travers la section du conducteur :

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On considère un conducteur cylindrique d'axe Oz , de rayon a et de longueur ℓ , en gros comme un fil électrique habituel. La section du conducteur est $S = \pi a^2$. On considère une situation où $\vec{j} = j\vec{e}_z$, le courant circule selon l'axe du conducteur, ce qui est encore plutôt habituel. On note i l'intensité qui parcourt le conducteur ;

1.3.3 Loi d'Ohm locale

Cette forme de la loi d'OHM va s'avérer très importante pour l'étude de l'électromagnétisme que nous effectuerons plus tard. Elle indique que la densité volumique de courant est proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où γ est la conductivité électrique du milieu. Cette loi est définie uniquement lorsque le régime transitoire d'évolution de la vitesse \vec{v} est considéré comme terminé. L'équation différentielle du régime libre et sa solution sont :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{0} \quad \vec{v}_h = \vec{A} \exp -\frac{t}{\tau}$$

c'est-à-dire au bout de 3τ ou 5τ ce qui en pratique est très vite obtenu car $\tau \ll 10^{-10}$ s en général.

1.3.4 Loi d'Ohm globale

On considère le conducteur ohmique cylindrique de section $S = \pi a^2$, de longueur ℓ et de conductivité γ . La loi d'OHM pour ce conducteur exprime le lien de proportionnalité entre u et i en convention récepteur selon :

$$u = R i \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{S}$$

1.4 Effet de magnétorésistance

1.4.1 Approche simplifiée

On considère toujours le conducteur cylindrique précédent de rayon a , soumis à un champ électrique indépendant du temps $\vec{E} = E\vec{e}_z$ mais aussi à un champ magnétique statique $\vec{B} = B_0\frac{r}{a}\vec{e}_\theta$ orthoradial². Le champ électrique provoque un mouvement axial sur Oz des électrons libres, le champ magnétique va modifier leurs trajectoires et, comme nous allons le constater, cela modifie la valeur de la résistance électrique du conducteur. Commençons par montrer que la densité volumique de courant \vec{j} est régie par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j} = \gamma \left(\vec{E} - \frac{1}{ne} \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

On notera au passage que $R_H = \frac{1}{n(-e)}$ est la constante de HALL du conducteur étudié.

2. Le choix d'un tel champ magnétique pourra être compris lors de l'étude de la magnétostatique.

1.4.2 Albert Fert - Prix Nobel

En 2007, le français ALBERT FERT obtient le prix NOBEL de physique en même temps que le chercheur allemand PETER GRÜNBERG pour leur découverte de la magnétorésistance géante en 1988. Cette propriété est purement quantique. Elle a été observée dans des matériaux constitués d'un empilement alternant des couches minces magnétiques et non magnétiques. Lorsque l'on impose un champ magnétique à une telle structure, il se produit un important changement de la résistance électrique de l'échantillon soumis au champ magnétique. Celle-ci baisse fortement! Dans les expériences initiales d'ALBERT FERT, la baisse était de 80%! Il ne faut pas faire le lien avec l'étude précédente - classique et non pas quantique - qui montrait une augmentation modeste de la résistance. L'effet important a été exploité dans les têtes de lecture des disques durs à partir de 1997, cela a permis plus de sensibilité dans la détection des états magnétiques des zones du disque dur qui représentent l'information stockée. Il a donc été possible d'augmenter de façon significative la quantité d'informations conservées dans un disque dur.

1.5 Puissance fournie par le champ électrique - Effet Joule

Commençons par rappeler que la partie magnétique de la force de LORENTZ ne possède pas de puissance par perpendicularité permanente entre la vitesse et cette force, seul le champ électrique sera donc influent :

$$-e(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{car} \quad (\vec{v} \wedge \vec{B}) \perp \vec{v}$$

Nous allons évaluer la puissance fournie par le champ électrique \vec{E} créé par le générateur à un électron qui assure par son déplacement global une contribution à l'intensité du courant. La force subie par l'électron est $\vec{F} = -e\vec{E}$. La puissance est le produit scalaire de la force par la vitesse :

$$P_{1e^-} = -e \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Dans l'hypothèse du régime permanent atteint, nous avons vu que $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$. La puissance fournie à un électron est donc proportionnelle au carré du champ électrique :

$$P_{1e^-} = \frac{e^2\tau}{m}\vec{E}^2$$

Si l'on raisonne par unité de volume, il suffit de sommer la puissance obtenue ci-dessus pour l'ensemble des électrons contenus dans 1 m^3 . La densité volumique est n , on obtient donc la puissance volumique transférée aux charges :

$$p_{vol} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}^2 = \gamma \vec{E}^2$$

Il est légitime de se poser la question du devenir de cette puissance fournie aux charges. Rappelons pour commencer que nous avons conduit les raisonnements en régime permanent. Cela signifie que la vitesse des électrons libres est constante. Pourtant en fournissant de la puissance à un corps, sa vitesse devrait augmenter. Ici, cela n'est pas le cas car la force d'interaction avec le milieu (cuivre) dans lequel se déplace l'électron entraîne l'existence de la force de freinage $-h\vec{v}$. Finalement, la puissance de la force de freinage compense la puissance apportée par le champ électrique. Par conséquent, quand on effectue le bilan énergétique, le milieu conducteur dans lequel se déplace l'électron libre absorbe une puissance égale à la puissance fournie par le générateur responsable de l'existence du champ électrique \vec{E} . Ce milieu absorbe de l'énergie, sa température va donc augmenter : c'est l'effet JOULE. On notera qu'il n'est pas raisonnable de penser que la température du conducteur ohmique ne va qu'augmenter au cours du temps. Progressivement, le conducteur va perdre de l'énergie au profit de l'air extérieur. Il en perdra d'autant plus que l'écart de température entre sa température et celle de l'air sera grand. À un moment donné, un équilibre thermique sera obtenu³. Un tel transfert énergétique est utilisé dans certains dispositifs de chauffage électrique.

1.6 Puissance en électricité

Comme on peut le constater sur l'expression de la puissance volumique, on peut encore écrire que :

$$p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Si on raisonne pour un conducteur ohmique comme celui rencontré plus haut qui possède une section S , une longueur ℓ et donc un volume $S\ell$, la puissance qu'il reçoit de la part du générateur est donc :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} S \ell = jES\ell = E\ell jS = u i$$

On retiendra qu'en électricité, la puissance est le produit de la tension par l'intensité. Lorsque les grandeurs électriques dépendent du temps, on parle de puissance instantanée pour $p(t) = u(t)i(t)$.

3. À condition que la température atteinte en régime permanent soit supportée par le conducteur ! Dans le cas contraire, il va griller.

2 Calculs de puissance

2.1 Puissance moyenne

L'étude des situations indépendantes du temps est moins fréquente que celles qui évoluent au cours du temps. En électricité, on parle de *continu*⁴ lorsque les tensions et intensités sont indépendantes du temps. En continu, la puissance fournie est constante au cours du temps et résulte du produit de la tension et de l'intensité. Si l'on connaît la loi fonctionnelle reliant u et i , on peut calculer la puissance avec la seule connaissance de la tension ou de l'intensité. C'est le cas du conducteur ohmique puisqu'alors $p = ui = Ri^2$ par exemple.

En régime variable, la tension et l'intensité dépendent du temps et souvent ces évolutions sont relativement rapides par rapport aux durées pertinentes de notre échelle. On distingue alors la puissance instantanée $p(t) = u(t)i(t)$ dont l'intérêt est nettement plus limité que la puissance moyenne P_{moy} qui va mieux nous informer des transferts énergétiques. La puissance moyenne se calcule comme toute moyenne sur une base pertinente, c'est-à-dire sur un intervalle de temps Δt bien choisi. Dans le cadre de l'électricité domestique, la tension d'alimentation EDF est sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz et donc de période $T = 0,02$ s. Cette tension est périodique, il est donc logique de choisir comme intervalle de temps pour le calcul de la moyenne, cette période T . Le choix est plus subjectif lorsque l'évolution de $u(t)$ et de $i(t)$ n'est pas périodique. Dans un tel cas, on essaie de dégager un ou des temps caractéristiques de cette évolution et on choisit un intervalle de temps Δt grand devant ces temps caractéristiques. Évidemment, dans ce dernier cas, la moyenne n'a de sens que pendant la durée Δt qui suit la date t_0 correspondant au début du calcul.

$$\text{Évolution quelconque : } P_{moy} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u(t)i(t) dt$$

$$\text{Évolution périodique : } P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t) dt$$

2.2 Cas simple

On considère une résistance électrique R traversée par un courant continu I . La tension est $U = RI$, la puissance électrique absorbée par la résistance est :

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

On considère maintenant la même résistance R traversée par un courant d'intensité sinusoïdale $i(t) = I_m \cos \omega t$. La tension à ses bornes est $u(t) = Ri(t) = RI_m \cos \omega t$. Dans ces conditions, la puissance instantanée dissipée dans la résistance est $p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = RI_m^2 \cos^2 \omega t$. Cette grandeur a, certes, du sens physique, mais il est beaucoup plus important de connaître la puissance moyenne :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = RI_m^2 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \omega t dt$$

Calculons la puissance moyenne absorbée par la résistance :

4. Ce terme est assez malheureux car on pourrait penser qu'en régime variable avec t il se produit des discontinuités. En Physique, lorsque des discontinuités apparaissent, elles sont le fruit de la modélisation et non pas de la réalité physique qui s'accommode mal de dérivées qui divergent.

2.3 Grandeur efficace

La grandeur efficace S_{eff} correspondant à une grandeur variable $s(t)$ est la racine carrée de la moyenne de son carré sur un intervalle de temps bien choisi :

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} s^2(t) dt$$

Le calcul précédent revient finalement au calcul de l'intensité efficace I_{eff} associée à l'intensité $i(t) = I_m \cos \omega t$ traversant la résistance. En effet, dans le cas d'une grandeur périodique, on calcule la moyenne du carré sur une période. Dans le cas du courant précédent, l'intensité efficace est donc $I_{eff} = I_m / \sqrt{2}$.

Les grandeurs efficaces sont très présentes en Physique. En effet, très souvent les grandeurs en rapport avec l'énergie ou la puissance sont les carrés des grandeurs que l'on manipule. On peut illustrer cette affirmation en rappelant l'expression de l'énergie cinétique en Mécanique $\frac{1}{2} m \vec{v}^2$, de l'énergie potentielle associée à un ressort $\frac{1}{2} k x^2$, de l'énergie emmagasinée dans un condensateur $\frac{1}{2} C u^2$ ou de celle dans une bobine $\frac{1}{2} L i^2 \dots$

Lorsque l'on mesure une tension variable avec un contrôleur numérique, c'est la tension efficace qui est affichée ! Il en va de même pour l'intensité. Il est donc indispensable de savoir relier la valeur maximale et la valeur moyenne de cette tension - ou de cette intensité - à la valeur efficace pour pouvoir comprendre l'efficacité énergétique de celle-ci. Reprenons la tension présentée au début de cette étude :

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Calculons la tension efficace associée à celle-ci :

Dans le cas où $U_0 = 0$, on retrouve que pour un signal sinusoïdal, on a $U_{eff} = U_m / \sqrt{2}$. On aurait obtenu de la même façon, $I_{eff} = I_m / \sqrt{2}$. On en déduit que la puissance moyenne absorbée dans une résistance R est donnée par :

$$P_{moy} = R I_{eff}^2$$

Calculons la tension efficace associée à une tension $u(t)$ créneau périodique :

2.4 Grandeurs mesurées

Imaginons que les grandeurs $u(t)$ présentées avant soient des tensions électriques mesurées par un contrôleur numérique ou par un oscilloscope. En fonction du réglage de l'appareil de mesure, les valeurs obtenues seront différentes. On travaille sur la tension $u(t) = U_0 + U_1 \cos \omega t$:

	mode <i>DC</i>		mode <i>AC + DC</i>	mode <i>AC</i>
Contrôleur numérique	U_0		$\sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$	$\frac{U_1}{\sqrt{2}}$
	average mode <i>DC</i>	average mode <i>AC</i>	RMS mode <i>DC</i>	RMS mode <i>AC</i>
Oscilloscope numérique	U_0	0	$\sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$	$\frac{U_1}{\sqrt{2}}$

Lorsque l'oscilloscope est utilisé en mode *DC*, la totalité du signal est visualisée. Par contre, lorsqu'on utilise le mode *AC*, la composante continue ou moyenne du signal est coupée (filtrée). Cela explique qu'en mode *DC* le signal traité est $u(t) = U_0 + U_1 \cos \omega t$, alors qu'en mode *AC* l'oscilloscope traite $u(t) = U_1 \cos \omega t$ d'où les valeurs portées dans le tableau. Dans ce tableau, les indications portées ne sont valables que pour le signal défini au préalable.

2.5 Cas général en régime sinusoïdal

On considère un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$ de module $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$. La tension complexe aux bornes du dipôle est $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$. Le dipôle traversé n'affecte pas que l'amplitude du signal, il modifie la phase. En clair, il faut utiliser la notion d'impédance complexe \underline{Z} pour le représenter. On a alors $\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$. On travaille toujours avec un signal $i(t) = I_m \cos \omega t$. Si l'on revient en réels pour la tension, on aura :

$$u(t) = |\underline{Z}| I_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \varphi = \arg \frac{u}{i} = \arg \underline{Z} = \arctan \frac{X}{R}$$

On pose $U_m = |\underline{Z}| I_m$ et on peut alors calculer la puissance moyenne dissipée dans le dipôle :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{U_m I_m}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) dt$$

On peut donc conclure que la puissance moyenne est donnée par :

$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi = \Re(\underline{Z}) I_{eff}^2 = \Re(\underline{Y}) U_{eff}^2$$

où $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ est l'admittance du dipôle.

2.6 Puissance en complexes

3 La loi des nœuds en terme de potentiels - Théorème de Millmann

On considère un nœud N où plusieurs branches sont reliées. On se place en régime indépendant du temps ou dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. L'objectif est d'exprimer le potentiel V_N référencé à la masse en fonction des potentiels appliqués sur les différentes branches, voir le schéma de la figure 1. Cette expression est très efficace en électronique pour étudier des circuits comme le soustracteur et bien d'autres...

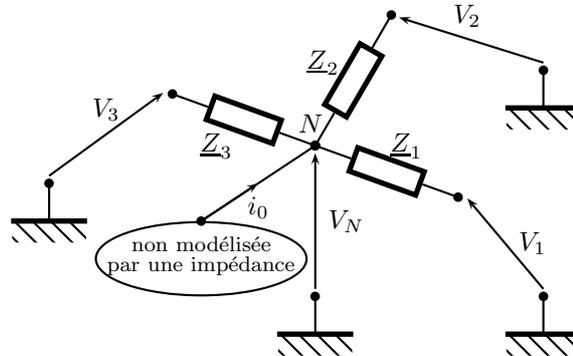


FIGURE 1 – Un nœud

Dans le cas où il n'y a que des branches modélisées par des impédances $Z_i = 1/Y_i$ et donc pour $i_0 = 0$, le théorème de MILLMANN s'écrit :

$$V_N = \frac{\frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_2}{Z_2} + \frac{V_3}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{Y_1 V_1 + Y_2 V_2 + Y_3 V_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

4 Composants non linéaires

4.1 Le circuit multiplieur

Comme son nom l'indique, ce circuit électronique effectue le produit de deux tensions branchées en entrée. Il fournit en sortie une tension image du produit des deux tensions d'entrée :

$$u_s(t) = k u_{e1}(t) \times u_{e2}(t) = \frac{u_{e1}(t) \times u_{e2}(t)}{V_0}$$

Dans la plupart des cas, le coefficient k - qui est l'inverse d'une tension pour des raisons dimensionnelles évidentes - correspond à une tension $V_0 = 10 \text{ V}$. C'est le cas par exemple d'un circuit multiplieur très courant AD534. Sa représentation est réalisée sur le schéma de la figure 2.

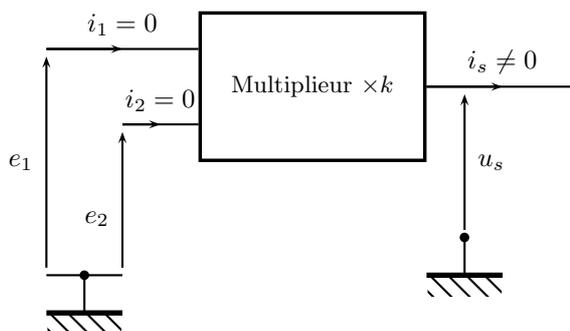


FIGURE 2 – Multiplieur

Ce circuit électronique est un peu particulier dans le sens où il ne prélève aucune puissance en entrée. En effet, les courants sur ces deux entrées sont nuls. En réalité, ils sont extrêmement faibles sans doute inférieurs à 1 nA . Par contre, il est capable de fournir une certaine puissance en sortie. Cette puissance sera fonction du circuit d'utilisation placé au niveau de la sortie. Mais, en général $i_s \neq 0$ comme cela est indiqué sur le schéma de la figure 2. Il n'y a pas de miracle énergétique ! Le circuit fonctionne en multiplieur à condition de l'alimenter. On utilise en général une alimentation de tension continue symétrique $\pm 15 \text{ V}$ par rapport à la masse. C'est cette alimentation qui fournira la puissance sollicitée en sortie.

Comme nous l'avons vu, la puissance est le produit de l'intensité par la tension : $p(t) = u(t) \times i(t)$. Imaginons un instant que l'on utilise une tension image de l'intensité $i(t)$: la plus simple est la tension aux bornes d'une résistance. Un circuit multiplieur fournira à une constante près la puissance. Branchons sur les deux entrées du circuit multiplieur, la tension $u(t) = Ri(t)$ prise aux bornes de la résistance R . On obtient alors :

$$u_s(t) = \frac{R^2 i^2(t)}{V_0} = \frac{R}{V_0} Ri^2(t) = \frac{R}{V_0} p(t)$$

On constate donc bien que la tension de sortie du circuit multiplieur est bien une tension image de la puissance fournie par le générateur au dipôle. Un tel circuit intervient dans la constitution des wattmètres qui permettent de mesurer des puissances en électricité.

Le circuit électronique proposé est non linéaire. Nous illustrerons l'absence de linéarité de son comportement en évoquant deux arguments. Le premier consiste à constater que si en entrée on met sur les deux voies la même tension $u_a(t)$, la sortie est proportionnelle à $u_a^2(t)$. De la même façon, en branchant une tension $u_b(t)$, la sortie est proportionnelle à $u_b^2(t)$. Imaginons que l'envoie simultanément sur chaque entrée la tension $u_a(t) + u_b(t)$, la sortie sera proportionnelle à $(u_a(t) + u_b(t))^2 \neq u_a^2(t) + u_b^2(t)$: la réponse à une somme n'est pas la somme des réponses à chaque terme de la somme. Le second concerne le problème de la saturation. Comme nous l'avons fait remarquer le circuit multiplieur est alimenté par une tension $\pm 15 \text{ V}$ pour pouvoir fonctionner. Cela va aussi provoquer des limites dans ses possibilités en amplitude de la tension de sortie. On peut comprendre que la tension de sortie aura une amplitude inférieure à la tension d'alimentation. En fait dans le cas du circuit multiplieur, la tension de sortie est bien le produit des deux tensions d'entrée à condition que $u_{e1}(t)$, $u_{e2}(t)$ et $u_s(t)$ soient comprises entre -15 V et $+15 \text{ V}$. Si on sort de cet intervalle, le circuit va saturer, plafonner en quelque sorte à l'une des deux tensions limites fixées par l'alimentation.

Nous terminerons cette rapide évocation du circuit multiplieur en analysant le comportement du circuit sur le plan des fréquences. On considère que l'on branche sur les deux entrées la même tension $u(t) = Ri(t) = RI_m \cos \omega t$. La tension de sortie est donc :

$$u_s(t) = \frac{R^2 I_m^2}{V_0} \cos^2 \omega t = \frac{R^2 I_m^2}{2V_0} (1 + \cos 2\omega t)$$

On constate donc facilement qu'en partant d'un signal de pulsation ω ou de fréquence $f = \omega/2\pi$, on obtient en sortie un signal de pulsation double ou de période moitié. On relève aussi la présence d'une composante continue - moyenne du signal - qui correspond à une fréquence nulle. Les fréquences du signal de sortie sont différentes de celles du signal d'entrée, ceci est aussi la signature de la non-linéarité.

Pour terminer, on place en entrée la tension $u_{e1}(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t$ et la tension $u_{e2}(t) = U_{m2} \cos \omega_2 t$. La tension de sortie, avec $U_{m1} = U_{m2}$, représentée sur le graphique de la figure 3 est :

$$u_s(t) = \frac{U_{m1}U_{m2}}{V_0} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{U_{m1}U_{m2}}{2V_0} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]$$

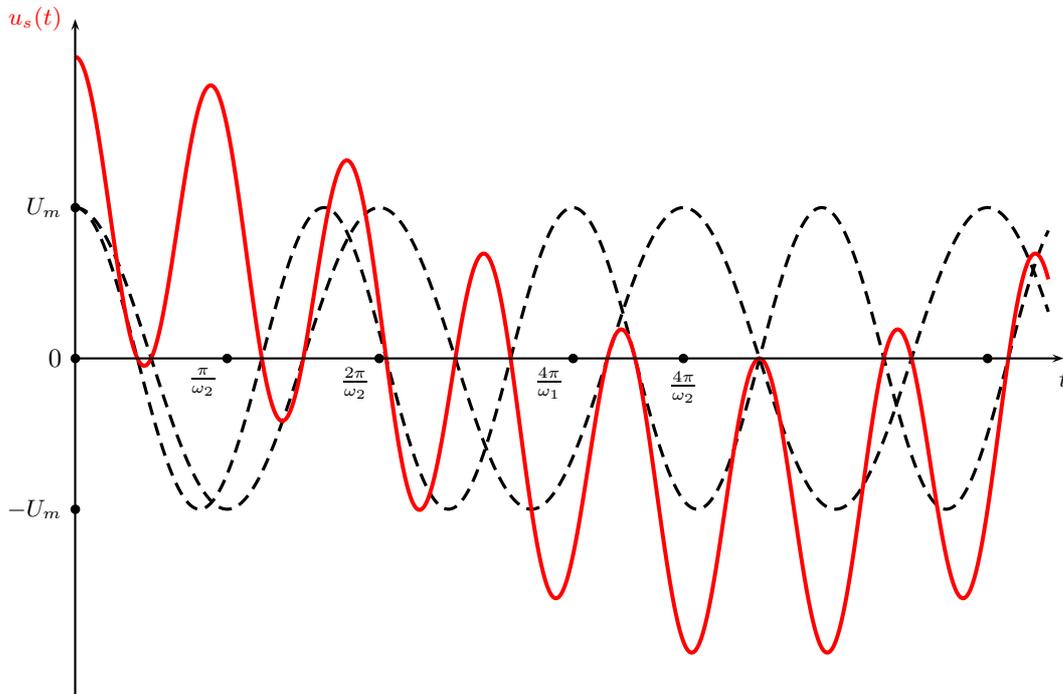


FIGURE 3 – Produit de deux grandeurs sinusoïdales de fréquences différentes

On peut voir sur le graphique de la figure 4 que le signal produit est bien le résultat de l'addition de deux signaux sinusoïdaux, l'un de haute fréquence et l'autre de basse fréquence.

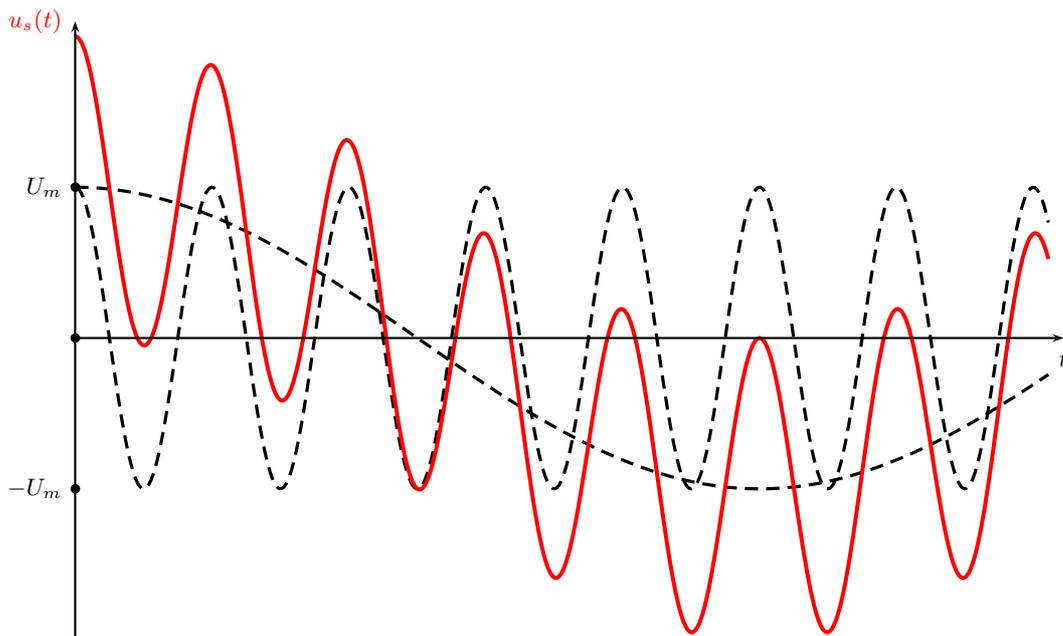


FIGURE 4 – Produit composé d'une basse fréquence et d'une haute fréquence

4.2 Amplificateur opérationnel

4.2.1 Présentation

Comme son nom l'indique, ce circuit intégré a été conçu pour réaliser facilement de nombreuses opérations courantes très classiques. Grâce à des montages assez simples à concevoir, on peut réaliser des additions, des soustractions, des multiplications par une constante, des dérivations et des intégrations. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le circuit multiplieur fournit une tension image de la puissance instantanée $p(t)$. Pour obtenir la puissance moyenne, il faut donc disposer d'un circuit intégrateur. Comme nous le comprendrons, cela est facilement réalisable avec un amplificateur opérationnel. Le schéma de l'amplificateur opérationnel est fourni à la figure 5.

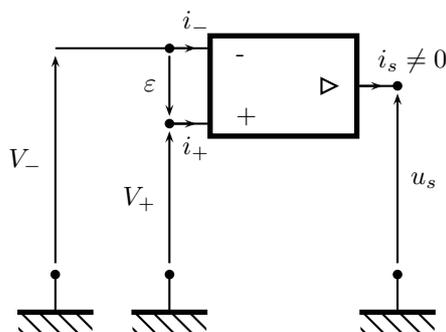


FIGURE 5 – Amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel est en réalité un amplificateur différentiel. Comme pour le circuit multiplieur, il est alimenté en $\pm 15\text{ V}$ par rapport à la masse. Cette alimentation est à l'origine de l'énergie demandée au niveau de la sortie. L'amplificateur opérationnel présente la même particularité sur les courants en entrée que le circuit multiplieur : ils sont extrêmement faibles. On considère que $i_+ = i_- = 0$. L'amplificateur opérationnel présente deux types de fonctionnement : le régime linéaire où la tension de sortie est liée à la tension différentielle d'entrée ε par la loi donnée ci-dessous et le régime non linéaire où la tension de sortie sature comme pour le multiplieur au niveau des tensions $\pm 15\text{ V} = \pm V_{sat}$. C'est cette alimentation qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité i_s pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. La relation entrée différentielle - sortie du domaine linéaire est modélisée par une fonction passe-bas d'ordre 1 :

$$u_s = \underline{\mu} \varepsilon = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \varepsilon$$

Pour la plupart des amplificateurs opérationnels courants comme l'AO 741, le gain μ_0 est très élevé. On a $\mu_0 \simeq 10^6$, la fréquence de coupure $f_0 = \omega_0/2\pi \simeq 10\text{ Hz}$ est toujours assez basse.

4.2.2 Fonctionnement linéaire

L'amplificateur opérationnel possède un gain différentiel très élevé si l'on excepte les hautes fréquences. Comme la tension de sortie est limitée par V_{sat} , la tension différentielle d'entrée assurant le régime linéaire est bornée par une valeur très faible :

$$|\varepsilon| < \frac{V_{sat}}{|\underline{\mu}|}$$

Compte tenu de la valeur de $|\underline{\mu}|$ très élevée, être en régime linéaire est quasiment synonyme de $\varepsilon = 0$! La caractéristique tension différentielle d'entrée ε - sortie u_s possède la forme donnée sur le graphique de la figure 6, cette caractéristique a été réalisée pour une fréquence donnée.

Si l'on branche l'amplificateur opérationnel comme le circuit multiplieur, il y a toutes les chances pour que $\varepsilon = V_+ - V_-$ soit telle que l'on se trouve en saturation. La seule façon d'obtenir $\varepsilon \simeq 0$ est de réaliser un système bouclé stable⁵. Nous allons prendre deux exemples de fonctions réalisées grâce à un amplificateur opérationnel en régime linéaire par bouclage ainsi qu'un exemple de système en régime non linéaire.

5. L'étude des systèmes bouclés figure au programme des Sciences de l'Ingénieur, on notera qu'un bouclage entre la sortie et l'entrée - dite inverseuse est favorable à la stabilité alors qu'en bouclage entre l'entrée + et la sortie ne l'est pas. L'étude des rétroactions négatives et positives ne figure pas au programme.

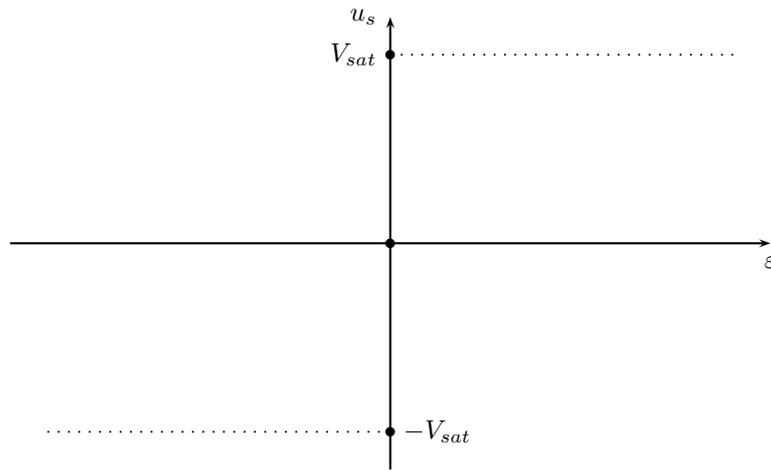


FIGURE 6 – Caractéristique de l'amplificateur opérationnel

4.2.3 Soustracteur

Le montage est proposé sur le schéma de la figure 7. On suppose que le fonctionnement est linéaire et que l'AO est idéal.

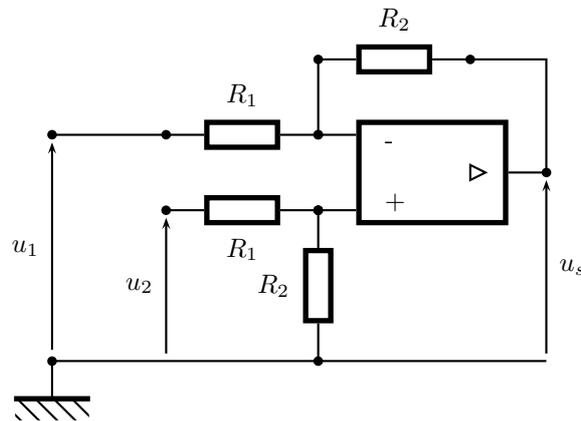


FIGURE 7 – Montage soustracteur

4.2.4 Intégrateur

Le montage intégrateur doit nécessairement comporter un élément électrique dont la loi fonctionnelle fait apparaître une opération de dérivation. Le plus simple et le plus petit pour réaliser des circuits électroniques de petite taille est le condensateur. Le circuit que l'on propose à la figure 8 intègre la tension d'entrée tant que l'on reste dans le domaine linéaire de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel.

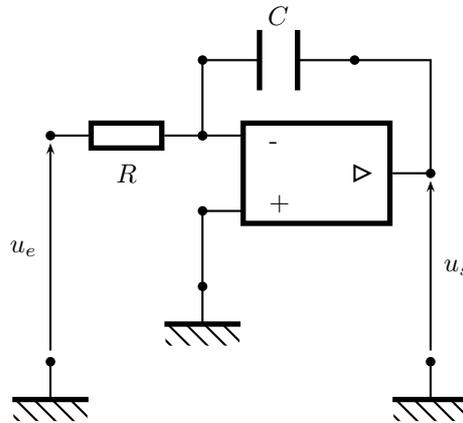


FIGURE 8 – Montage intégrateur

4.2.5 Filtre de Sallen-Key

On s'intéresse au montage de la figure 9 qui présente un montage conçu autour d'un amplificateur opérationnel alimenté comme il se doit sans que l'on représente cette alimentation, en général en $\pm 15\text{ V}$ par rapport à la masse. On suppose que l'amplificateur opérationnel est idéal et en régime linéaire. Nous allons montrer que le filtre est de type passe-bande. On donnera la forme canonique de $\underline{H}(j\omega) = \underline{u}_s / \underline{u}_e$ sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On identifiera les caractéristiques selon :

$$H_0 = \frac{R}{2(R + R_1)} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \sqrt{1 + \frac{R}{R_1}} \quad Q = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}}$$

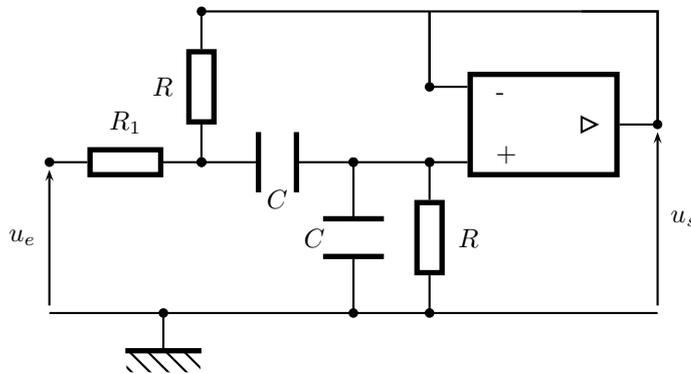


FIGURE 9 – Filtre passe-bande de SALLEN-KEY

4.2.6 Comparateur simple

La fonction de comparateur simple est réalisée en branchant deux tensions u_1 et u_2 au niveau des entrées $+$ et $-$ de l'amplificateur opérationnel. C'est le signe de la différence $\varepsilon = u_1 - u_2$ qui va décider si $u_s = +V_{sat}$ ou bien $-V_{sat}$. Le montage est celui proposé à la figure 10.

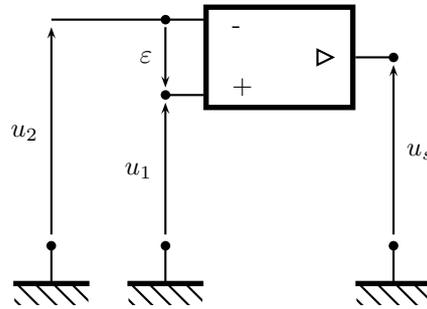


FIGURE 10 – Montage comparateur simple

4.3 La diode