Nouvelle approche de la Mécanique

L'étude de la Mécanique a été quasiment absente de l'enseignement dispensé dans le Secondaire. Sa mise en place a été effectuée en classe de première année dans le cadre des référentiels galiléens. Le programme impose maintenant l'étude des changements de référentiels. Cela va nous amener à effectuer des études mécaniques en utilisant des référentiels non galiléens. À cette occasion, je vous propose un regard un peu différent sur les principes fondamentaux qui régissent la Mécanique.

1 Principes de la Mécanique

La Mécanique est basée sur des principes que nous allons énoncer. Bien sûr, ces principes sont issus des réflexions purement théoriques et des travaux expérimentaux des physiciens au cours des siècles. On les réfère souvent à Galilée et à Newton en hommage à leur travail remarquable dans ce domaine de la Physique.

1.1 Principe de force

Ce principe[1] définit une force et relie cette force aux variations de la quantité de mouvement :

> Un système dont la quantité de mouvement $\vec{p}_{/\mathcal{R}}$ varie
>
> subit une force $\vec{F}$ telle que : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}$.

Ce principe de force se décline dans deux types de référentiels : les référentiels galiléens que nous noterons préférentiellement $\mathcal{R}$ et les référentiels non galiléens notés préférentiellement $\mathcal{R}'$. Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la force $\vec{F}$ est uniquement la conséquence d'interactions avec des entités extérieures au système. Dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, la force est toujours constituée des interactions avec les entités extérieures au système mais elle est complétée par les *forces dites d'inertie* qui sont la conséquence de la cinématique du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Nous verrons plus loin quelles sont les expressions de ces forces particulières.

1.2 Référentiel galiléen et principe d'inertie

La loi de l'inertie très souvent appelée principe d'inertie s'exprime de la façon suivante :

> Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un système isolé
>
> possède une quantité de mouvement $\vec{p}_{/\mathcal{R}}$ constante.

Ce résultat est une conséquence directe du principe de force énoncé avant. Cela peut passer pour une évidence mais la question n'est pas là. Tout tient dans l'assurance que l'on peut avoir du fait que le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen ou non. Pour caractériser le référentiel $\mathcal{R}$ en tant que référentiel galiléen, il faut donc disposer d'un système isolé qui ne subit aucune interaction avec l'extérieur ! Autant dire tout de suite que c'est impossible[2] pour l'expérimentateur que nous sommes. Il peut toutefois arriver avec plus ou moins de difficulté à réaliser un système pour lequel les interactions avec l'extérieur sont globalement nulles par effet de compensation. Puisque réaliser $\vec{F} = \vec{0}$ n'est pas possible, on réussit à faire $\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = \vec{0}$. On parle dans ce dernier cas de *système pseudo-isolé*.

Imaginons que l'on ait pu caractériser un référentiel $\mathcal{R}$ comme galiléen et que l'on étudie un système isolé ou pseudo-isolé. Ce système aura une quantité de mouvement constante dans $\mathcal{R}$ mais cela ne sera pas le cas dans le référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen où $\vec{p}_{/\mathcal{R}'}$ évoluera.

Il est important de noter que l'expression du principe (loi) d'inertie donnée ici est certes très traditionnelle mais qu'elle est encore incomplète. Elle sera complétée plus loin dans le cadre de l'étude de la rotation.

1. Ce principe est plus couramment appelé principe fondamental de la Dynamique même si la présentation qui en est faite ici n'est pas tout à fait celle qui avait été donnée au cours de vos débuts en Mécanique.
2. Rien n'interdit pour autant les expériences de pensée...

1.3 Loi 1 des actions réciproques

On considère, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 constantes et de vitesses $\vec{v}_{1/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}_{2/\mathcal{R}}$. Nous supposons que ces deux points constituent un système isolé mais que les points exercent entre eux deux forces $\vec{F}_{1sur2}$ et $\vec{F}_{2sur1}$. La quantité de mouvement du système est $\vec{p}_{/\mathcal{R}} = m_1\vec{v}_{1/\mathcal{R}} + m_2\vec{v}_{2/\mathcal{R}}$. D'après ce que nous venons de voir sur la quantité de mouvement, on peut encore écrire que $\vec{p}_{/\mathcal{R}} = (m_1+m_2)\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ en utilisant le centre d'inertie du système. Nous allons appliquer le principe de force. Commençons tout d'abord par la quantité de mouvement : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = (m_1+m_2)\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_{G/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = (m_1+m_2)\vec{a}_{G/\mathcal{R}}$ où $\vec{a}_{G/\mathcal{R}}$ est l'accélération du centre d'inertie du système. Les forces subies par le système se limitent à $\vec{F}_{1sur2}$ et $\vec{F}_{2sur1}$. Le principe de force ou principe fondamental de la Dynamique permet alors d'écrire que :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = (m_1+m_2)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{G/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = (m_1+m_2)\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = \vec{F}_{1sur2} + \vec{F}_{2sur1}$$

Le système étudié est isolé par l'hypothèse que nous avons faite au départ. Par conséquent, selon le principe d'inertie, sa quantité de mouvement ne doit pas varier, l'accélération de son centre d'inertie doit être nulle. Nous venons de démontrer que l'interaction entre ces deux points doit être telle que les forces d'interaction entre eux sont opposées. Ce résultat se généralise sans aucune difficulté à l'interaction de n'importe quel système de deux corps. C'est un résultat très important pour de nombreuses démonstrations.

Lorsque deux corps interagissent, les forces

qu'ils exercent l'un sur l'autre sont opposées : $\vec{F}_{1sur2} = -\vec{F}_{2sur1}$

1.4 Référentiels galiléens et référentiels non galilées

Vous devez vous interroger sur la notion de référentiel galiléen introduite dans le principe de force. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel galiléen que l'on a réussi à caractériser. On le qualifie encore d'absolu[3] et $\mathcal{R}'$ un référentiel en mouvement de translation rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{v}_{e/\mathcal{R}}$ mesurée par rapport à $\mathcal{R}$ comme on peut le voir sur le schéma de la figure 1.

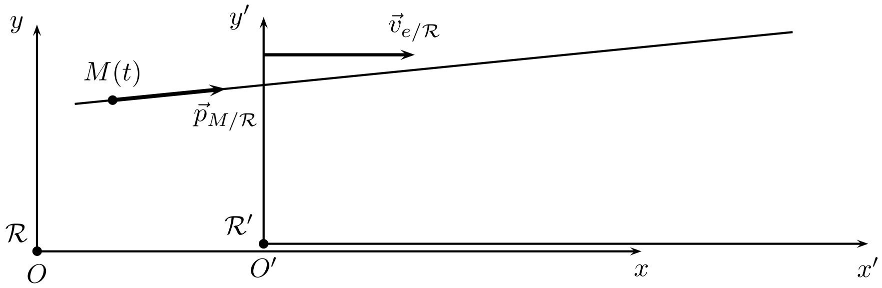

FIGURE 1 – Référentiels galiléens

Considérons un corps isolé, ici ponctuel, représenté par le point M de masse m et de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. D'après le principe d'inertie, ce corps possède une quantité de mouvement constante $\vec{p}_{M/\mathcal{R}}$. Intéressons-nous à la quantité de mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Par définition des vitesses, on a $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. On utilise la relation de CHASLES : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Par définition, la vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$. Comme nous étudions un référentiel $\mathcal{R}'$ qui possède une vitesse constante par rapport à $\mathcal{R}$ puisque $\vec{v}_{e/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$, on déduit de ce calcul que la quantité de mouvement du corps M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est : $\vec{p}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{p}_{M/\mathcal{R}} - m\vec{v}_{e/\mathcal{R}}$. En effet, on a dans le cas de la translation $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$. Ce calcul montre de toute évidence que la quantité de mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ est constante. Elle ne varie pas

3. Cette expression est un peu malheureuse car la Mécanique est une question permanente de relativité (galiléenne, restreinte ou générale). C'est la traduction du fait que le référentiel absolu, c'est celui qu'on entend comme la référence des références. . .

non plus ! Dans ces conditions, le référentiel $\mathcal{R}'$ ne peut pas être distingué du référentiel $\mathcal{R}$. Le principe d'inertie y est vérifié.

Les référentiels $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ ainsi que tous les congénères de $\mathcal{R}'$, c'est-à-dire tous les référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, constituent une classe de référentiels particuliers. Ils sont appelés référentiels galiléens en hommage à Galilée.

En conclusion, on pourra dire que le principe d'inertie est valable dans tous les référentiels galiléens qui forment une classe particulière de référentiels.

Par opposition avec ce que l'on vient de voir, un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ sera un référentiel en mouvement accéléré par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Pour un point d'étude M, il existera une accélération d'entraînement et éventuellement une accélération de Coriolis.

2 Mécanique en référentiels non galiléens

2.1 Retour sur le principe de force

On étudie un système qui subit une force $\vec{F}$ - ou une résultante de forces extérieures - dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Le principe de force nous permet d'écrire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{F} = m\,\vec{a}_{/\mathcal{R}}$$

Dans l'étude des compositions de mouvements, nous avons vu que :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}} = \vec{a}_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{ent} + \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

où $\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\,\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}$.

L'équation issue du principe de force nous permet d'écrire que $\vec{F} = m\vec{a}_{/\mathcal{R}} = m\left(\vec{a}_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{ent} + \vec{a}_{\text{Coriolis}}\right)$. Si on veut privilégier l'écriture - et donc l'étude - dans le référentiel $\mathcal{R}'$, on transforme l'équation précédente pour obtenir :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = m\,\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = \vec{F} - m\left(\vec{a}_{ent} + \vec{a}_{\text{Coriolis}}\right)$$

On appelle *forces d'inertie* les deux forces qui, même en l'absence de force $\vec{F}$, vont provoquer une variation de la quantité de mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Plus précisément :

$$\begin{cases} \text{Force d'inertie d'entraînement :} & \vec{f}_{i,ent} = -m\,\vec{a}_{ent} \\ \text{Force d'inertie de Coriolis :} & \vec{f}_{i,Cor} = -m\,\vec{a}_{\text{Coriolis}} \end{cases}$$

On peut donc étendre le principe de force à des référentiels non galiléens à condition d'ajouter dans les forces, les forces d'inertie :

> Dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, un corps dont la quantité de mouvement $\vec{p}_{/\mathcal{R}'}$ varie subit une force $\vec{F}$ et des forces d'inertie de telle sorte que : $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{F} + \vec{f}_{i,ent} + \vec{f}_{i,Cor}$.

Malgré l'apparition de forces d'inertie dans l'écriture du principe de force, il peut être très efficace et simple de travailler dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ plutôt que de s'obliger à travailler dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On peut même ajouter plus naturel. La situation la plus commune dans la vie courante porte sur l'étude d'un mouvement dans un moyen de transport, dans un véhicule. Si par exemple, on étudie une personne ou un objet dans un train, un tram, une voiture, un avion... Il est quand même plus naturel de pratiquer cette étude dans le référentiel $\mathcal{R}'$ constitué par le moyen de transport, plutôt que par rapport au référentiel terrestre que l'on peut considérer comme galiléen si la durée de l'étude est relativement brève. Cet aspect est d'ailleurs évoqué dans le paragraphe suivant.

L'écriture des lois de la Mécanique demande beaucoup d'attention. Il est important d'avoir les idées claires sur l'existence - si l'on peut dire ainsi - des référentiels galiléens.

2.2 Référentiels galiléens par approximation

Au départ, dans le principe de force, nous avons parlé d'un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Toutefois, nous n'avons pas toujours la capacité d'en percevoir la réalité par nos sens. Cette impossibilité est-elle de nature à nous faire renoncer à son existence ? La réponse que nous vous proposons est non. D'ailleurs si, un jour, vous êtes amené à faire des études assez poussées en Sciences Physiques ou en Mathématiques, vous pourrez rencontrer des descriptions aussi bien mathématiques que physiques qui font intervenir des espaces possédant un nombre de dimensions nettement plus élevé que 3 ou 4. Là encore, nos sens ne nous permettent pas de les percevoir comme on l'entend en général et ce n'est pas pour cela que ces théories ne sont pas fructueuses pour le développement de nos Sciences. Nous allons essayer de donner du sens à la notion de référentiel galiléen.

Soyons pragmatiques ! Avant d'être astronomiques, les études mécaniques de Galilée et de Newton ont surtout été terrestres. Évidemment, la tentation était grande de considérer la Terre comme un référentiel galiléen. Cela se fait très couramment et a le mérite de résoudre la question du caractère perceptible du référentiel utilisé. Par rapport à la Terre, il est aisé d'organiser le repérage du mouvement d'un corps. En progressant et en acquérant une certaine expérience en Mécanique, vous pourrez constater qu'assimiler la Terre à un référentiel galiléen est tout à fait possible à condition toutefois que la durée de l'expérience soit relativement brève et que l'extension spatiale sur laquelle elle se déroule soit petite. Toutes ces précautions sont indispensables car, comme Galilée l'a fait observer, la Terre tourne. Elle possède un mouvement de rotation qui fait, qu'en toute rigueur, les forces d'inertie doivent intervenir. C'est sans doute l'occasion de revenir sur la très belle expérience du pendule de Foucault qui a permis de mettre en évidence à la fin du XIX^{e} siècle la rotation de la Terre sans qu'il soit nécessaire d'utiliser un référentiel astronomique, voir les photographies de la figure 2.

Figure 2 – Pendule de Foucault - Panthéon Paris

Lorsque nous disons que la Terre peut constituer un très bon référentiel galiléen pour certaines études, il serait indispensable de préciser le propos. À ce stade, c'est relativement difficile puisque nous venons à peine d'entrer dans l'étude de la Mécanique. Nous pouvons tout de même signaler qu'en TP vous avez certainement effectué une étude de chute d'un corps. Cette dernière l'a été en supposant le référentiel terrestre galiléen. La hauteur de la chute en TP est toujours de l'ordre de 1 m. Toutefois, si vous étudiez une chute sur des hauteurs de l'ordre de 100 m, comme cela a été fait au XIX^{e} siècle, vous constaterez que la chute présente ce que l'on appelle une déviation vers l'Est et une autre plus petite vers le Sud. Par déviation, on évoque le fait que le point d'impact au sol n'est pas celui que l'on prévoit en considérant le référentiel terrestre comme galiléen. Il faut donc tenir compte des forces d'inertie.

À la recherche du référentiel galiléen accessible à nos sens, nous venons de comprendre qu'il fallait délaisser la Terre en tant que telle dans certains cas. Les physiciens ont alors considéré le référentiel géocentrique. Imaginez le trièdre $Oxyz$ où O est le centre de la Terre. Considérons les trois directions Ox, Oy et Oz comme pointant vers des étoiles lointaines qui nous paraissent fixes. Ne vous inquiétez pas, il y a assez d'étoiles dans l'Univers pour trouver les trois dont nous avons besoin... Nous venons de construire le référentiel géocentrique. La Terre est en rotation dans ce référentiel. Il s'avère que ce référentiel est un meilleur référentiel galiléen que le précédent. Ce référentiel effectue un mouvement de translation quasi circulaire[4] et quasi uniforme autour du Soleil. Mais comme nous l'avons fait pour le référentiel terrestre, si l'expérience se déroule sur de petites durées et dans un espace limité, il est tout à fait possible de considérer le référentiel géocentrique comme galiléen. Ce dernier est un meilleur référentiel galiléen que le référentiel terrestre car sa durée caractéristique et sa longueur caractéristique

4. La trajectoire du centre de la Terre autour du Soleil est en réalité une ellipse d'excentricité faible.

sont nettement plus grandes que pour la Terre. Et si cela ne suffit encore pas, on peut passer au référentiel héliocentrique sur le même principe que le référentiel géocentrique mais avec comme origine le centre du Soleil ou plus précisément du système solaire, ce qui ne change pas grand chose. On pourrait encore aller plus loin en proposant comme référentiel galiléen un référentiel *galaxocentrique* dont vous avez compris la construction. Finalement, au départ, nous étions bien en peine pour trouver un référentiel galiléen perceptible et finalement il y en a pléthore ! Il faudra toutefois être toujours attentif à la durée et à l'extension spatiale de l'étude réalisée avant de choisir le référentiel d'étude. Nous pouvons résumer la situation des trois référentiels usuels dans le tableau suivant :

Référentiel	terrestre	géocentrique
Mouvement	rotation	translation
Durée caractéristique	1 jour	1 an
Taille caractéristique	1 000 km	150 millions de km
Utilisation	Mécanique quotidienne	Satellites, marées…

Référentiel	héliocentrique
Mouvement	translation
Durée caractéristique	30 millions d'années
Taille caractéristique	10^{17} km
Utilisation	Astronomie

En 1851, Léon Foucault installe sous la coupole du Panthéon (latitude $\lambda = 48\,^\circ 51'$) un pendule simple constitué d'une sphère de masse $m = 28\,\mathrm{kg}$ oscillant au bout d'un filin de longueur $L = 67\,\mathrm{m}$ avec une déviation maximale $d = 4\,\mathrm{m}$. Il mesure une période d'oscillation $T_0 = 16,5\,\mathrm{s}$ mais surtout une précession du plan de ces oscillations avec une période $T_1 = 31\,\mathrm{h}\,46\,\mathrm{min}$. Il en déduit que le phénomène est dû à la rotation de la Terre et caractérise l'aspect non galiléen du référentiel terrestre. Voir le schéma de la figure 3.

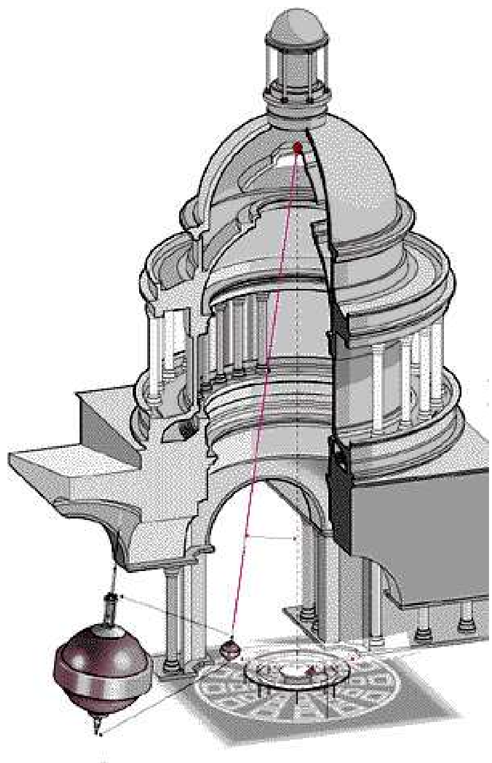

Figure 3 – Schéma du Panthéon et du pendule de Foucault