

## Onde lumineuse et optique

La présentation de l'Optique s'effectue, en général, en séparant deux approches. L'Optique géométrique est concentrée sur la notion de rayon lumineux et leur parcours à travers les milieux transparents, alors que l'Optique ondulatoire traite de tous les phénomènes que l'on ne peut pas décrire grâce à la notion de rayon lumineux. Au lycée, vous avez rencontré, en particulier, la diffraction et les interférences. La théorie ondulatoire est plus complète que l'Optique géométrique car on peut retrouver les lois applicables aux rayons lumineux – comme par exemple les lois de DESCARTES en modélisant la lumière par une onde.

L'optique étudiait au départ l'ensemble des phénomènes perçus par l'œil. La cause de ces phénomènes, la lumière a été étudiée très tôt dans l'histoire des Sciences, au point que tous les principes sur lesquels reposent l'optique géométrique et l'optique ondulatoire sont connus depuis le début du XIX<sup>e</sup> siècle.

Les principales étapes du développement de l'optique sont :

Avant J.-C.	Les lois de la réflexion de la lumière par un miroir étaient connues des Grecs.
1621	SNELL établit les lois de la réfraction sur la base de la notion de rayon lumineux.
1637	DESCARTES les trouve aussi, indépendamment de SNELL.
1657	PIERRE DE FERMAT retrouve ces lois, à partir d'un principe selon lequel la lumière met un temps minimal pour aller d'un point à un autre.
1665	HOOKE émet l'idée que la lumière est une vibration de haute fréquence qui se propage (une onde). Cette idée est développée par HUYGENS mais contredite par NEWTON adepte d'une théorie corpusculaire.
Début du XIX <sup>e</sup> siècle	YOUNG reprend la théorie ondulatoire pour étudier les phénomènes d'interférences.
1808	MALUS découvre la polarisation.
1818	FRESNEL synthétise les idées de HUYGENS et d'YOUNG pour expliquer la diffraction.
1876	MAXWELL conclut que la lumière est une onde électromagnétique qui vibre à une fréquence d'environ $5 \times 10^{14}$ Hz et qui se propage dans le vide à la vitesse $c = 3 \times 10^8$ m · s <sup>-1</sup> . Il précise, en outre, que l'onde est transversale.
Début du XX <sup>e</sup> siècle	Seule reste inexplicée, l'émission de lumière par les atomes (spectres de raies).
1900	PLANCK élabore une théorie corpusculaire et introduit la notion de <i>photons</i> .
1905	EINSTEIN utilise les <i>photons</i> pour expliquer l'effet photoélectrique : la lumière arrache, dans certaines conditions, des électrons à la matière.
1926	DE BROGLIE démontre que les particules peuvent être décrites comme des ondes.
1960	MAIMAN met au point le premier laser à la suite des travaux de KASTLER sur le pompage optique.

Le lien entre la théorie ondulatoire et la théorie corpusculaire s'effectue par le biais des formules donnant l'énergie du photon et la quantité de mouvement :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{et} \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

où  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  J · s est la constante de PLANCK,  $\nu$  la fréquence de l'onde lumineuse et  $\lambda$  sa longueur d'onde.

En fonction de la situation physique étudiée, on pratiquera l'optique géométrique ou l'optique ondulatoire souvent dans la restriction de l'approximation scalaire où on assimile par exemple le champ électrique  $\vec{E}$  à un scalaire ou bien encore on utilisera la notion de photon.

## 1 Onde électromagnétique

### 1.1 Équations d'onde et indice de réfraction

Dans le vide est un milieu caractérisé par les constantes  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ . Un milieu matériel, lui, sera caractérisé par une permittivité  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  et une perméabilité magnétique  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Les équations de MAXWELL sont, en l'absence de charge et de courant dans le milieu matériel, les suivantes :

Vide	$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
	$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Milieu matériel	$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
	$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

À partir de ces équations, on établit aisément que l'équation de propagation est :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \Delta \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

La vitesse de la lumière dans le vide est  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  alors que dans le milieu matériel, elle est donnée par  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ . On appelle indice de réfraction  $n$ , la quantité définie par :  $n = \frac{c}{v}$ .  
L'indice de réfraction est donc :

$$n = 1 \quad \text{pour le vide et} \quad n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad \text{pour le milieu matériel}$$

L'air est un milieu qu'on assimile généralement au vide car son indice est très peu supérieur à 1 :  $n_{\text{air}} \simeq 1$ . Pour les autres milieux matériels, on aura toujours  $n > 1$  comme par exemple  $n_{\text{eau}} = 1,33$  et  $n_{\text{verre}} \simeq 1,5$ .

L'équation générale de propagation des ondes est donc de la forme :

$$\Delta \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

## 1.2 Structure de l'onde plane

La structure d'une onde plane est donnée sur la figure 1.

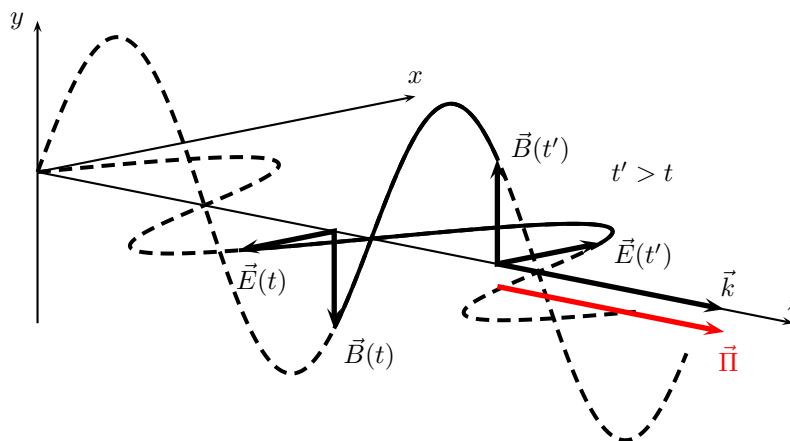


FIGURE 1 – Structure de l'onde électromagnétique

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation et leur norme vérifie  $E_0 = cB_0$ . L'énergie transportée dans le vide par l'onde est caractérisée par la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$  en  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$  ainsi que par la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ . On trouve alors que :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c \vec{e}_z$$

où  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire de la direction du vecteur de POYNTING. On constate d'une part que  $\vec{k}$  et  $\langle \vec{\Pi} \rangle_t$  possèdent la même direction et d'autre part que l'énergie et la puissance transportées sont proportionnelles à  $E_0^2$ , carré de l'amplitude du champ électrique.

Nous nous limitons, ici, à l'étude d'une onde plane se propageant dans le vide selon l'axe  $Oz$  à  $z$  croissant. L'expression du champ électrique est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = E_0 \vec{e}_x \exp i(\omega t - kz)$$

Le champ électrique de l'onde vérifie l'équation de propagation de D'ALEMBERT dans le vide :

$$\Delta \vec{E} = \Delta (E_x \vec{e}_z) = (\Delta E_x) \vec{e}_z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (E_x \vec{e}_z)}{\partial t^2}$$

C'est une première rencontre avec le laplacien vecteur en cartésien. On a :

$$\Delta \vec{E} = \left[ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x$$

Dans le vide, on a donc  $k = \frac{\omega}{c}$ . Si on considère un milieu matériel d'indice de réfraction  $n$ , on aura :

$$\Delta \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 (E_x \vec{e}_x)}{\partial t^2}$$

Il est alors évident que le vecteur d'onde vérifiera  $k_m = n \frac{\omega}{c}$ . La longueur d'onde dans le vide est généralement notée  $\lambda$ , on notera  $\lambda_m$  celle dans le milieu matériel. Or, le vecteur d'onde définit la longueur d'onde par  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . On retrouve, ici, le fait que la longueur d'onde varie selon le milieu de propagation, seule la fréquence ou la pulsation est une grandeur caractéristique de l'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad \text{et} \quad \lambda_m = \frac{\lambda}{n}$$

### 1.3 Approximation scalaire

Dans la plupart des situations que nous étudierons, nous pourrions nous contenter de considérer la lumière comme correctement représentée par la grandeur scalaire :

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$s(\vec{r}, t)$  représentera dans toute la suite l'amplitude du champ électrique de l'onde lumineuse. Dans l'étude de la *polarisation*, on tiendra compte du caractère vectoriel du champ électrique de l'onde lumineuse.  $s(\vec{r}, t)$  est appelée grandeur vibratoire caractéristique de l'onde lumineuse.

$\varphi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r}$  est la phase de l'onde lumineuse encore appelé *retard de phase*. Cette dernière expression se comprend si l'on considère le terme  $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$  et par exemple la date à laquelle il passe par 0. Cette date est  $t_0 = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{\omega}$ , elle sera d'autant plus tardive que  $\varphi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r}$  sera grande.

## 1.4 Onde sphérique

L'équation de D'ALEMBERT est  $\Delta s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ . Cette équation possède des solutions de forme ondes sphériques qui sont théoriquement hors-programme mais qui sont utiles à la compréhension de certains phénomènes. On considère une onde émise par un point source  $O$ , origine du système de coordonnées sphériques. Le point source émet de façon isotrope dans toutes les directions de l'espace. On utilise le système des coordonnées sphériques pour repérer un point  $M$  de l'espace :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r, \theta, \varphi) = r \vec{e}_r = r \vec{e}_r(\theta, \varphi)$$

$\overrightarrow{OM}$  dépend de  $r$  bien évidemment mais aussi de  $\theta$  et  $\varphi$  par l'orientation du vecteur unitaire  $\vec{e}_r$  dans l'espace, orientation fixée par la donnée de  $\theta$  et  $\varphi$ .

Une onde sphérique isotrope possède une grandeur vibratoire scalaire  $s(r, t)$  indépendante de  $\theta$  et de  $\varphi$ . Il y a invariance par rotations d'angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Dans le vide l'équation de D'ALEMBERT est toujours :

$$\Delta s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Par rapport au cas de l'onde plane, c'est l'expression du laplacien qui va différer :

$$\Delta s = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r s)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

## 1.5 Onde plane sphérique localement plane

Nous montrons ici que la notion d'onde plane n'a pas de sens physique au sens général du terme mais qu'on peut lui donner un sens physique local.

## 2 Les récepteurs

### 2.1 Éclairement, intensité lumineuse

Nous confondrons les notions d'éclairement lumineux et d'intensité lumineuse<sup>1</sup> alors que leur définition physique sont différentes. Pour nous, ces deux grandeurs correspondront à une puissance reçue par un récepteur rapportée à la surface de ce récepteur :

$$\mathcal{E} = \frac{P}{S} \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dS} \quad \text{en} \quad \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \quad \mathcal{I} \quad \text{assimilé à} \quad \mathcal{E}$$

On constate que ces deux grandeurs sont de la même unité que le vecteur de POYNTING  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ .

La fréquence d'une onde lumineuse dans le domaine des longueurs d'ondes visibles est de l'ordre de  $10^{14}$  Hz. Il y correspond une période de l'ordre de  $T_{\text{onde}} \simeq 10^{-14}$  s. Cette donnée est fondamentale pour comprendre que l'éclairement ou l'intensité que l'on perçoit ne sont que des moyennes des valeurs instantanées. En effet, les temps caractéristiques des récepteurs sont beaucoup plus long. Pour l'œil, on a  $\tau \simeq 0,1$  s et pour les récepteurs photoélectriques  $\tau \simeq 10^{-8}$  s. Le récepteur intègre l'éclairement instantané et fournit une réponse qui correspond à sa moyenne temporelle :

$$\mathcal{E}_{\text{perçu}} = \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathcal{E}(t) dt \quad \text{avec} \quad \Delta t \gg T_{\text{onde}}$$

Or, nous avons vu que pour une onde électromagnétique plane  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c$  en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ . La puissance surfacique transportée est proportionnelle à  $E_0^2$ , carré de l'amplitude du champ électrique. En reprenant la notation  $s(\vec{r}, t) = E_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  pour représenter l'onde lumineuse, on pourra écrire que :

$$\boxed{\mathcal{E} = \beta s s^* \quad \text{ou} \quad \mathcal{I} = \alpha s s^*}$$

Ordres de grandeurs : l'éclairement est en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  mais souvent il est exprimé en *lux*. Le facteur de conversion est  $1 \text{ lux} = 3 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

### 2.2 L'œil

C'est un système optique composé d'une lentille convergente, le cristallin, dont la distance focale est variable. La pupille joue le rôle d'un diaphragme qui limite plus ou moins, en se fermant ou en s'ouvrant, la quantité de lumière qui rentre dans l'œil. Un objet donne une image renversée sur la rétine, constituée de cellules réceptrices que sont les cônes et les bâtonnets. Trois types de cônes permettent la vision des couleurs (rouge, vert, bleu), les bâtonnets sont extrêmement sensibles à l'intensité lumineuse et permettent la vision nocturne en niveau de gris. L'ensemble rétine-nerf optique transforme l'information lumineuse en information électrique que le cerveau décode. L'œil présente une plage dans laquelle le cristallin peut s'adapter pour qu'il se forme une image nette. On dit que l'œil accommode, lorsque c'est le cas des muscles font bomber le cristallin et par conséquent réduisent la distance focale de l'œil. Cette opération est indispensable puisque la distance lentille-écran est fixée.

La plage d'accommodation va d'une distance minimum appelée *Punctum Proximum* à une distance maximum appelée *Punctum Remotum*. Un œil normal peut voir nettement de 25 cm à l'infini. Cet œil normal voit sans fatigue, lorsqu'il n'accommode pas. C'est-à-dire lorsqu'il observe à l'infini. Un œil myope possède un cristallin trop convergent, son *Punctum Proximum* est inférieur à 25 cm (ce qui ne paraît pas gênant) mais surtout son *Punctum Remotum* n'est pas à l'infini (il peut par exemple se situer à 50 cm... ce qu'il est beaucoup plus). On corrige ce défaut à l'aide d'une lentille divergente. Pour l'œil hypermétrope, c'est le contraire. Il n'est pas assez convergent, on le corrige en ajoutant une lentille convergente.

L'œil possède une résolution de l'ordre de  $3 \times 10^{-4}$  rad. En effet les cellules de la rétine possède une taille non nulle même si elle est très petite, de l'ordre de 2 à 5  $\mu\text{m}$ . Une cellule qui reçoit de la lumière fonctionne, pour simplifier, en 1 ou 0. Par conséquent si deux rayons lumineux arrivant sur l'œil font entre eux un angle de moins de  $3 \times 10^{-4}$  rad, ils ne seront pas distingués. Tout se passe comme s'ils provenaient du même point objet alors que ce n'est pas le cas.

Le domaine de sensibilité de l'œil en longueur d'onde est tel que  $\lambda \in [400 \text{ nm}, 750 \text{ nm}]$ . L'œil est capable de percevoir au plus 10 images par seconde, sa fréquence maximale de fonctionnement est donc d'environ 10 Hz.

1. L'intensité lumineuse est définie comme la puissance rapportée à l'angle solide. Cette notion mathématique hors-programme sera vue plus tard. Elle généralise la notion d'angle plan des situations 2D aux situations à 3D. L'angle solide s'exprime en stéradian noté sr, grandeur non dimensionnée (comme le radian d'ailleurs). On le note en général  $\Omega$  et  $d\Omega$  pour l'angle solide infinitésimal. L'intensité lumineuse est alors  $\mathcal{I} = \frac{dP}{d\Omega}$  en  $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$ .

La persistance des images sur la rétine est de l'ordre de  $\tau \simeq 0,1$  s, temps caractéristique de l'œil. Cela n'est pas très rapide, d'ailleurs on utilise ce fait au cinéma ou à la télévision puisque les images au cinéma sont au nombre de 24 par seconde et de 25 à la télévision. La persistance des images sur la rétine nous fait oublier le caractère discontinu des prises de vue.

## 2.3 Les autres récepteurs

La pellicule photographique traditionnelle est constituée d'agrégats de précipités formés à partir d'ions argent comme  $\text{AgBr}_s$ . Sous l'effet de la lumière, il se produit une réduction des ions argent  $\text{Ag}^+$  en argent  $\text{Ag}$  ce qui a pour effet de faire noircir l'agrégat récepteur des photons lumineux. La taille des cellules de base (agrégats) varie avec la sensibilité de la pellicule photographique mais on peut la situer autour de  $10 \mu\text{m}$ . La constante de temps liée à la persistance des images est infinie puisqu'une fois éclairée la pellicule n'est plus réutilisable,  $\tau \rightarrow \infty$ . Le domaine spectral couvre en général le domaine de la lumière visible mais on peut trouver dans le commerce des pellicules spéciales adaptées à l'infrarouge.

L'œil et la pellicule photographique peuvent être qualifiés de récepteurs chimiques car leur sensibilité à la lumière est basé sur une réaction chimique. Les autres récepteurs que nous allons décrire seront qualifiés de physiques par opposition. Le photomultiplicateur est constitué par une cathode qui émet des électrons dans une enceinte vide par effet photoélectrique. Ces photoélectrons vont ensuite frapper une seconde électrode qui va émettre, elle aussi, des électrons qui sont envoyés sur une nouvelle électrode... Ainsi, on amplifie le nombre d'électrons créés au départ par l'intensité lumineuse. Le courant électrique résultant est directement lié à l'intensité lumineuse.

La photodiode est constituée par une jonction  $PN$  de silicium dopé. On a intégré deux autres éléments chimiques au réseau cristallin du silicium de part et d'autre d'une frontière pour réaliser ce qu'on appelle la jonction  $PN$ . Lorsqu'elle est polarisée en inverse de 0 à  $-6$  V, l'intensité lumineuse qui circule est relativement constante et surtout proportionnelle à l'intensité lumineuse.

Le récepteur le plus connu à l'heure actuelle est le capteur  $CCD$  pour *Charge Coupled Device* ou encore, en français, *dispositif à transfert de charge*. Il équipe les appareils photos numériques. Son fonctionnement est aussi basé sur l'effet photoélectrique qui crée des charges dans un matériau semi-conducteur sous l'action de la lumière. Ces charges créées sont ensuite transférées vers une zone de stockage où elles sont comptées. On fabrique des récepteurs formant une mosaïque de très nombreuses cellules de base (ou encore pixels) de taille de l'ordre de  $1 \mu\text{m}$  ou quelques microns puisque l'on atteint facilement  $1 \mu\text{m}$  à  $2 \mu\text{m}$ .

Pour tous les récepteurs physiques, les temps caractéristiques sont du même ordre de grandeurs, ils sont beaucoup plus rapides que l'œil puisque  $\tau \simeq 10$  ou  $100$  ns.

## 3 Optique et onde lumineuse

### 3.1 Rayon lumineux

Le lien entre les théories de l'optique qui mettent en avant le rayon lumineux et les théories ondulatoires s'effectue en disant que le rayon lumineux correspond à la direction de propagation de l'énergie. Le rayon lumineux est donc donné localement par la direction du vecteur de POYNTING moyen :  $\langle \vec{\Pi} \rangle_t$ . Comme on l'a vu dans les deux cas précédents, le rayon lumineux est, par conséquent, aussi donné par la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Le rayon lumineux est donné par la direction de :

- du vecteur de POYNTING  $\vec{\Pi}$
- du vecteur d'onde  $\vec{k}$

On peut d'ailleurs faire observer qu'en cartésiens  $\varphi(\vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z$  (ou en sphériques  $\varphi(\vec{r}) = kr$ ). Ainsi, le vecteur d'onde s'exprime selon :

$$\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

On peut donc encore affirmer que le rayon lumineux est donné par  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ .

### 3.2 Surface d'onde

Une surface d'onde est une surface équiphase :  $\varphi(\vec{r}) = \text{Constante}$ .

Pour une onde plane, la grandeur vibratoire est de la forme  $s(\vec{r}, t) = s_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  avec  $\varphi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ . La phase sera la même pour tous les points  $M(x, y, z)$  de l'espace qui vérifient l'équation :

$$k_x x + k_y y + k_z z = \text{Cte}$$

Il s'agit évidemment de l'équation d'un plan perpendiculaire au vecteur  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ .



Pour une onde sphérique, la grandeur vibratoire est de la forme  $s(r, t) = s_0 \frac{r_0}{r} \exp i(\omega t - kr)$ . Pour une date  $t$  fixée, la phase sera la même pour tous les points de l'espace qui vérifient l'équation :  $\varphi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} = kr = \text{Cte}$ , c'est-à-dire  $r = \text{Cte}$ . Il s'agit de l'équation d'une sphère de centre  $O$ .

Nous serons souvent confrontés au cas d'une source ponctuelle située à l'infini. En pratique, la source sera très éloignée de l'observateur ou du dispositif optique. Pour ce dernier, la surface d'onde sphérique sera assimilée à un plan.

### 3.3 Notion de chemin optique et principe de Fermat

Attention à ne pas confondre la notation précédente  $s(\vec{r}, t)$  avec celle -  $s$  - introduite dans ce paragraphe.

Considérons, une onde qui se propage dans un milieu d'indice  $n$  quelconque et a priori variable. Soit  $s$  l'abscisse curviligne de l'onde le long de son parcours. L'abscisse curviligne  $s$ , comme son nom l'indique, est mesurée le long du chemin a priori courbé emprunté.

On appelle chemin optique du point  $A$  au point  $B$ , l'intégrale curviligne suivante :

$$L_{AB} = \int_A^B n ds$$

PIERRE DE FERMAT proposa au 17<sup>ème</sup> siècle une théorie de l'optique basée sur le principe suivant :

Un rayon lumineux emprunte le trajet entre deux points  $A$  et  $B$  tel que sa durée  $\Delta t_{AB}$  soit minimale

La durée du parcours se calcule selon  $\Delta t_{AB} = \int_A^B \frac{ds}{v}$ . Compte tenu de la définition de l'indice de réfraction, on peut écrire cette intégrale selon :  $\Delta t_{AB} = \int_A^B \frac{n ds}{c} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds = \frac{L_{AB}}{c}$ . On constate donc que minimiser le temps de parcours revient à minimiser le chemin optique : le trajet suivi par la lumière entre deux points est tel que le chemin optique correspondant est minimal. À partir du principe de FERMAT, on peut redémontrer l'ensemble des lois de l'optique géométrique et, en particulier, les lois de DESCARTES. On notera ainsi que dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  constant, le chemin optique  $L_{AB} = n \widehat{AB}$  est minimale lorsque  $\widehat{AB}$  est minimale, c'est-à-dire lorsque les points  $A$  et  $B$  sont alignés. On a alors  $L_{AB} = nAB$ , le chemin suivi par la lumière est rectiligne.

### 3.4 Évolution de la phase de l'onde lumineuse

L'objectif de cette partie est d'établir la relation qui existe entre la grandeur vibratoire (champ électrique)  $s(A, t)$  caractérisant l'onde passant par le point  $A$  et celle  $s(B, t)$  passant par le point  $B$ . Considérons un rayon lumineux se déplaçant dans un milieu d'indice a priori variable. Soit  $O$  une origine quelconque, considérons deux points très voisins  $M$  et  $M'$  de la trajectoire suivie, voir la figure 2.

Comme  $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ , on peut en déduire que  $\vec{k} \cdot d\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi \cdot d\vec{r} = d\varphi$ . On peut donc intégrer et écrire que  $\int_A^B d\varphi = \int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{r}$ . Or  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} n\vec{u}$ , ainsi  $\int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \int_A^B n\vec{u} \cdot d\vec{r}$ . l'abscisse curviligne  $s$  est telle que  $ds = \vec{u} \cdot d\vec{r}$ , on constate que  $\int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \int_A^B n ds = \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB}$ . La phase de l'onde lumineuse est donc directement reliée au chemin optique, on rappelle que  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde dans le vide. On a donc  $\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB}$ . En notant  $s(\vec{r}, t)$  la grandeur vibratoire caractéristique de l'onde, on a  $s(A, t) = s_0 \exp i(\omega t - \varphi(A))$  et  $s(B, t) = s_0 \exp i(\omega t - \varphi(B))$ . On peut écrire que ces deux grandeurs sont liées par :

$$s(B, t) = s(A, t) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB}$$

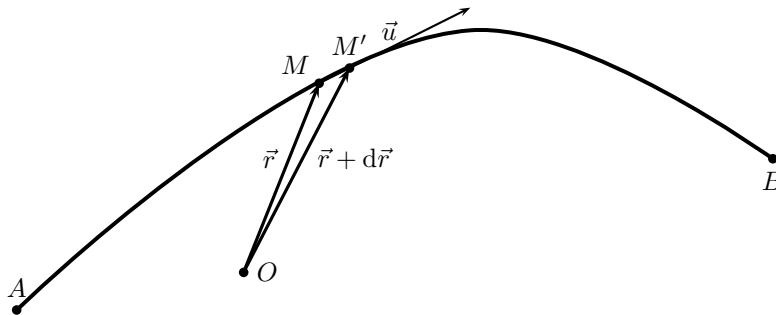


FIGURE 2 – Phase de l'onde lumineuse et chemin optique

### 3.5 Théorème de Malus

Le théorème de MALUS traduit la propriété d'orthogonalité des rayons lumineux et des surfaces d'ondes. Ce théorème doit être utilisé toutefois avec précaution, car une surface perpendiculaire à deux rayons lumineux n'est pas forcément une surface d'onde. Nous verrons des exemples de cette situation plus loin. Il est indispensable que les deux rayons lumineux aient le même vécu, c'est-à-dire qu'ils doivent avoir subi le même nombre et le même type de réflexion ou de réfraction.

#### 3.5.1 Démonstration

Nous savons que  $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ .

### 3.5.2 Application aux lois de Descartes

On retrouve, par exemple, la loi de DESCARTES de la réfraction en utilisant le théorème de MALUS pour les ondes planes. On considère le schéma de la figure 3.

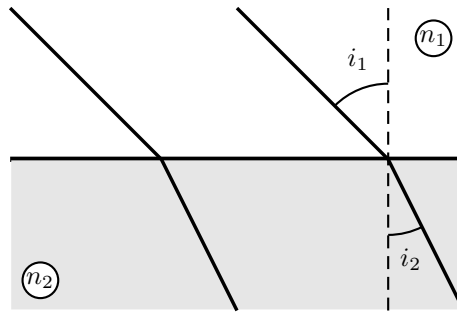


FIGURE 3 – Lois de DESCARTES de la réfraction

### 3.6 Notion de différence de marche

#### 3.6.1 Cas classique

Imaginons deux rayons lumineux issus d'un même point source  $S$  qui suivent deux trajectoires différentes pour des raisons que nous détaillerons par la suite et, finalement, se rejoignent en  $M$ . Comme nous le comprendrons plus tard, il est très important de pouvoir évaluer la différence de chemin optique parcouru par ces deux rayons. Cette différence de chemin optique est très souvent appelée *différence de marche*, voir la figure 4.

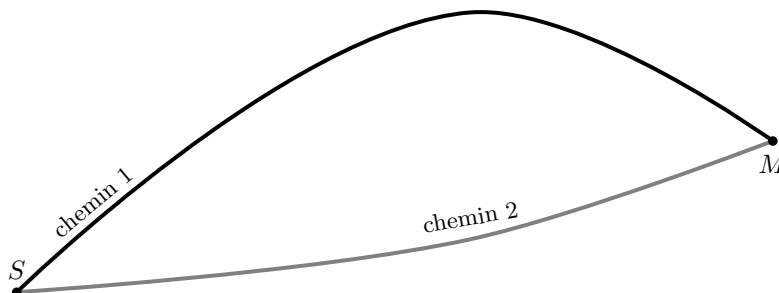


FIGURE 4 – Différence de marche

D'après les calculs précédents, la relation entre les grandeurs vibratoires représentant les ondes lumineuses est  $s_1(M, t) = s(S, t) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} L_{S1M}$  d'une part et  $s_2(M, t) = s(S, t) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} L_{S2M}$ . On appelle différence de marche entre les ondes parvenant au point  $M$  la différence de chemin optique  $\delta$  et différence de phase  $\varphi$  la quantité associée définie ci-dessous :

$$\delta = L_{S2M} - L_{S1M} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

Ici, la différence a été calculée par rapport au chemin 1.

#### 3.6.2 Cas particuliers

1. Un rayon lumineux se réfléchit sur un milieu d'indice plus élevé, de  $n_1$  sur  $n_2 > n_1$ . On montre en Électromagnétisme que l'amplitude de l'onde change de signe puisque le coefficient de réflexion des amplitudes est  $\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ . Ce changement de signe correspond à un changement de phase de  $\pi$  et donc à une différence de marche supplémentaire de  $\lambda/2$ .
2. Un rayon lumineux se réfléchissant sur un miroir est aussi affecté par un déphasage de  $\pi$  car, dans ce cas de figure à nouveau, il y a changement de signe de l'amplitude de l'onde.
3. Enfin, dans un cas moins courant où le rayon lumineux passe par un point de focalisation des rayons, il y a aussi changement de signe de l'amplitude de l'onde.

Finalement, dans les trois de figure décrits ci-dessus, on aura :

$$\delta_{tot} = \delta + \delta_{sup} \quad \text{avec} \quad \delta_{sup} = \frac{\lambda}{2}$$

### 3.7 Différence de marche et théorème de Malus

### 3.8 Notion de stigmatisme

Considérons des rayons lumineux partant tous d'un même point objet  $A$ . Ceux-ci sont amenés à traverser un système optique. On dit qu'il y a stigmatisme rigoureux lorsqu'en sortant du système optique tous ces rayons lumineux ont une intersection commune en un même point image  $A'$ .

Nous savons que la lumière emprunte toujours le trajet qui rend minimum le chemin optique. Par conséquent, les différents chemins optiques calculés sur les différents rayons lumineux devront tous être égaux à la même valeur minimale :

$$\boxed{\text{Stigmatisme rigoureux : } L_{AA'} = \text{Cte} \quad \forall \text{ rayon envisagé}}$$

On observe une image parfaitement nette d'un objet si le stigmatisme rigoureux est réalisé pour l'ensemble des couples  $(A, A')$  des points de l'objet et de l'image.

Dans aucun système optique réel (à part pour quelques points très particuliers), on n'observe le stigmatisme rigoureux. Un système optique ne donne donc jamais d'un objet une image parfaitement nette. Cela n'est en fait pas très grave, car même si c'était le cas le récepteur ne pourrait en profiter du fait de sa résolution propre. On se contente donc souvent d'un stigmatisme approché qui se définit ainsi : considérons des rayons lumineux partant tous d'un même point objet  $A$ . Ceux-ci sont amenés à traverser un système optique. On dit qu'il y a stigmatisme approché lorsqu'en sortant du système optique tous ces rayons lumineux font des intersections dans une même petite zone de l'espace définissant le point image  $A'$  telle que la taille de cette petite zone soit de l'ordre de grandeur de la taille d'un pixel du récepteur. Rappelons que les tailles données pour les récepteurs décrits précédemment vont de  $2 \mu\text{m}$  à  $10 \mu\text{m}$ .

### 3.9 Conditions de Gauss

Lorsqu'un système optique est utilisé dans les conditions de GAUSS, il réalise le stigmatisme approché. Ces conditions imposent d'utiliser des rayons lumineux pas trop éloignés de l'axe optique, ni trop inclinés par rapport à celui-ci. Dans le cadre des conditions de GAUSS, les calculs seront conduits par approximation au premier ordre.

Conditions de Gauss : rayons peu inclinés et peu éloignés de l'axe optique alors  $L_{AA'} = \text{Cte} \quad \forall \text{ rayon}$

Ainsi on retiendra, par exemple, qu'une lentille utilisée dans les conditions de Gauss n'introduit pas de différence de chemin optique même si le tracé optiquement exact et géométriquement faux suivant tendrait à prouver le contraire :

### 3.10 Différence de marche sur des rayons parallèles et utilisation d'une lentille

La représentation du tracé des rayons provenant de sources lointaines par rapport à la taille du système optique utilisée peut s'avérer assez trompeuse pour la détermination d'une différence de marche. Ceci est la conséquence de la rupture d'échelle qu'il n'est pas possible de représenter sur un schéma traditionnel. Dans une telle situation, il est essentiel de bien comprendre où se situe la différence de marche et aussi, par le fait, où elle ne situe pas !

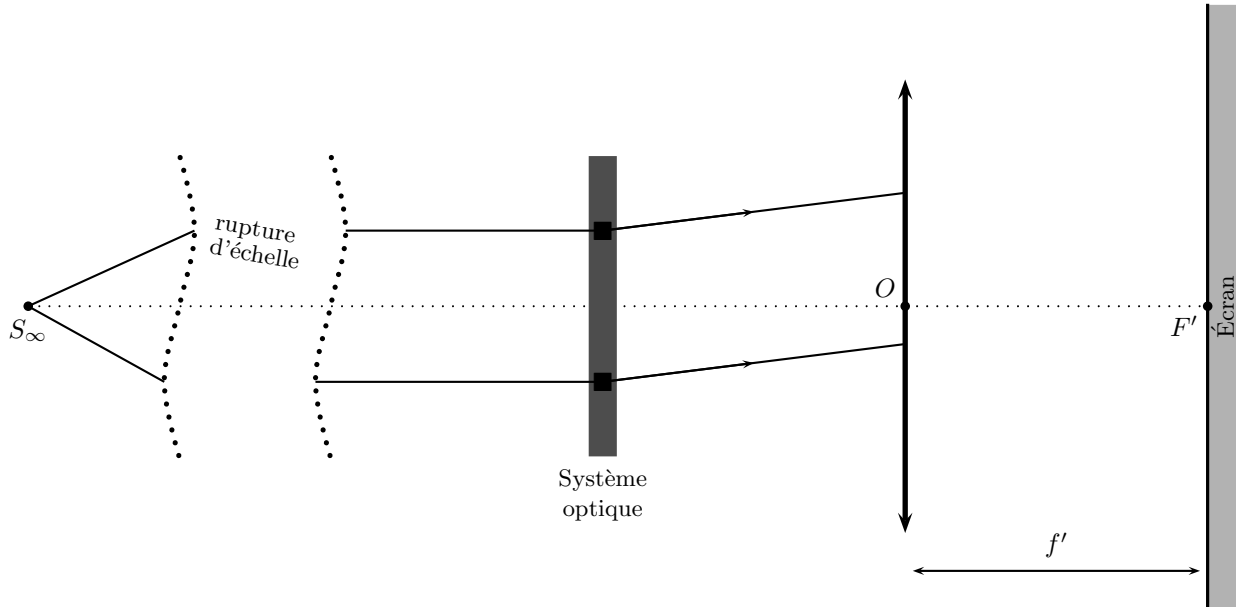


FIGURE 5 – Différence de marche sur des rayons parallèles

