Oscillateur à frottements solides

Nous allons étudier un oscillateur mécanique élémentaire qui subit des frottements solides dictés par la loi de COULOMB en faisant deux approches. La première sera analytique et traditionnelle, la seconde utilisera l'outil numérique de résolution des équations différentielles *solve_ivp* du module *scipy.integrate* sous *Python*.

1 Étude analytique

1.1 L'oscillateur étudié

Nous allons étudier un oscillateur traditionnel constitué par un ressort fonctionnement dans son domaine de linéarité. Sa longueur à vide est $\ell_0 = 0,20\,\mathrm{m}$ et sa raideur $k = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. On accroche à l'extrémité du ressort une masse $m = 0,25\,\mathrm{kg}$. Cette masse se déplace uniquement sur une direction Ox du plan horizontal sur lequel elle est posée. L'interaction de contact entre le plan support et la masse m est caractérisée par un coefficient de frottement solide $f = 0,3$. Le champ de pesanteur vertical est $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Voir le schéma de la figure 1 où l'origine O est placée à la longueur à vide du ressort.

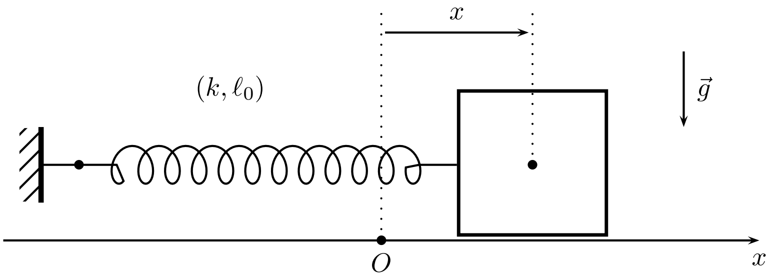

FIGURE 1 – L'oscillateur mécanique avec frottements solides

1. Représenter sur le schéma de la figure l'ensemble des forces exercées sur la masse m dans l'hypothèse où la vitesse du mobile est telle que $\dot{x} < 0$.

1.2 Mise en équation

2. Montrer, qu'en situation de glissement, l'équation différentielle régissant le mouvement du mobile est :

$$m\ddot{x} + kx = \pm fmg$$

3. On prendra comme conditions initiales $x_{t=0} = x_0 > 0$ et $\dot{x}_{t=0} = 0$. Montrer que le mobile reste immobile si $x_0 \leq a$ tel que :

$$a = \frac{fmg}{k}$$

Déterminer la valeur de a dans le cadre des valeurs numériques proposées.

4. Déterminer les conditions requises pour que le mobile s'arrête lors de son mouvement.

1.3 Solution analytique

On posera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ pour définir la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

5. Montrer que, sur ce que l'on identifiera comme la première phase du mouvement, on a :

$$x_{\text{phase 1}}(t) = a + (x_0 - a)\cos\omega_0 t$$

6. Montrer que la première phase se termine lorsque l'abscisse du mobile est donnée par la formule :

$$x_{f1} = -(x_0 - 2a)$$

À quelle condition le mouvement se poursuit-il ?

7. On suppose que le mouvement se poursuit jusqu'à la phase n. Montrer que l'on a :

$$x_{\text{phase n}}(t) = (-1)^{n-1}a + (x_0 - (2n-1)a)\cos\omega_0 t \quad \text{pour} \quad (n-1)\pi \leq \omega_0 t \leq n\pi$$

2 Recherche numérique de la solution

On utilisera le fichier *FrottementSolideElev* dont on complétera le script aux endroits demandés. Une fois que cela est réalisé, on doit pouvoir obtenir des courbes comme celles des figures 2, 3, 4 et 5.

On constate la décroissance linéaire des amplitudes maximales de chaque phase au fur et à mesure de l'action des frottements solides. Si le programme ne converge pas pour certaines conditions initiales, refaire avec une petite modifications de celles-ci.

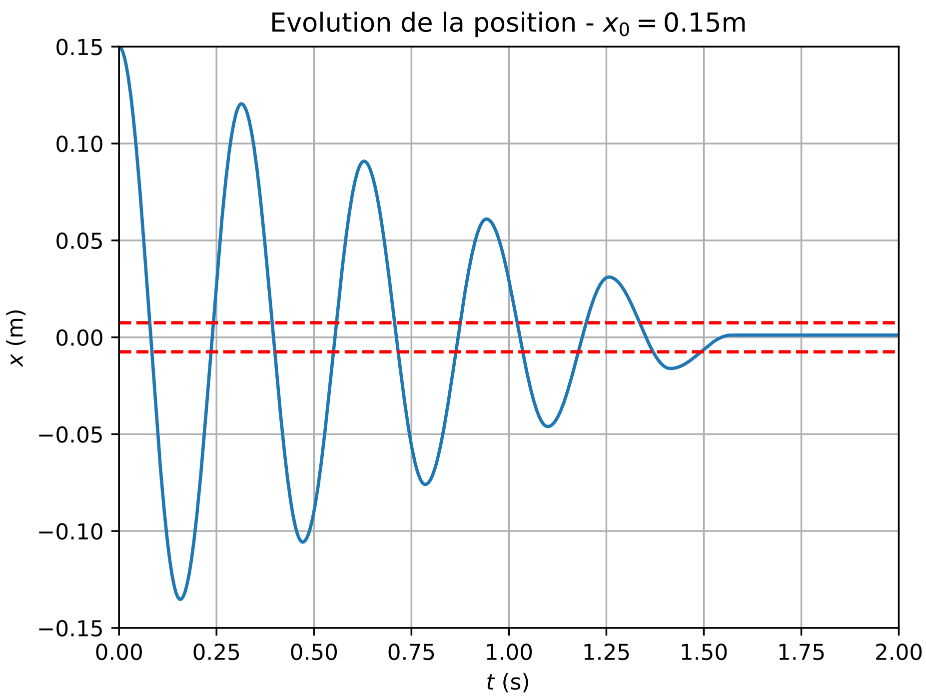

FIGURE 2 – Évolution de l'oscillateur soumis à des frottements solides

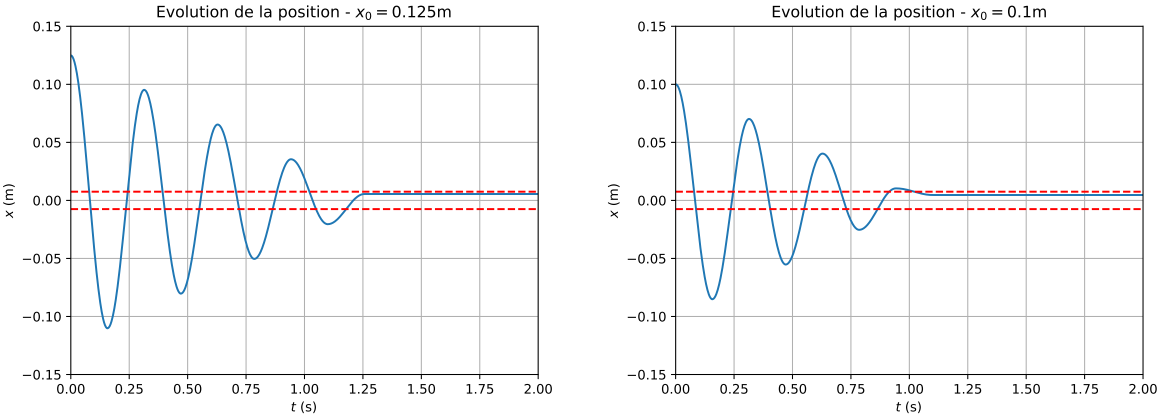

FIGURE 3 – Évolutions de l'oscillateur soumis à des frottements solides

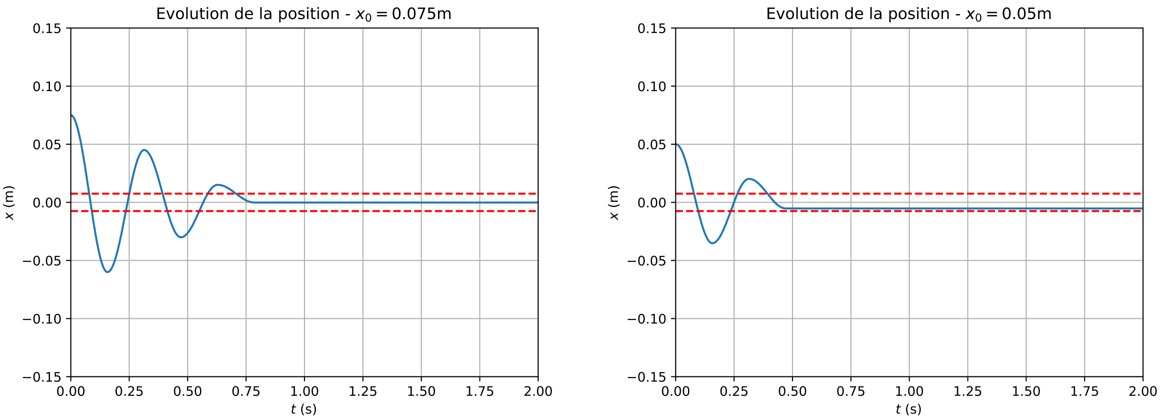

FIGURE 4 – Évolutions de l'oscillateur soumis à des frottements solides

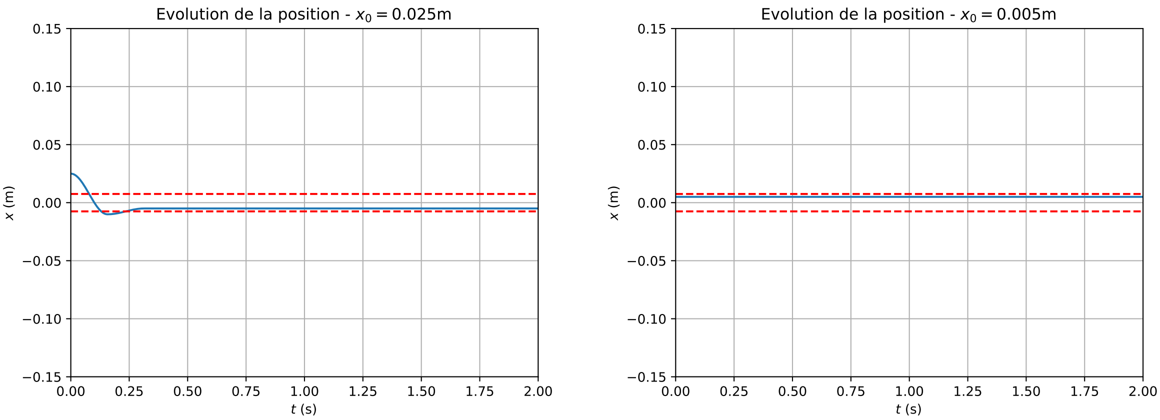

FIGURE 5 – Évolutions de l'oscillateur soumis à des frottements solides