Précision d'un spectre et échantillonnage

Nous avons vu dans l'étude de l'analyse de Fourier que plus un signal avait une durée longue plus l'intervalle des fréquences significatives de celui-ci est petit et réciproquement. Lorsqu'on fait effectuer à un ordinateur ou à un oscilloscope numérique, une analyse de Fourier pour visualiser le spectre d'un signal, le spectre obtenu est d'autant plus précis que la durée de prise en compte du signal pour le calcul de la FFT est longue. Cela est illustré par les images des enregistrements qui suivent.

1 Transformée de Fourier d'un signal créneau

1.1 Calcul sur une durée courte

La notion de durée qualifiée de courte est toute relative... Ici, on veut dire que le calcul s'effectue sur une durée $\Delta t = p\,T_0$ où T_0 est la période du signal créneau et p un nombre de l'ordre de quelques unités, sur l'image de la figure 1. La fréquence du signal créneau est $f_0 = 400\,\text{Hz}$, la durée prise pour le calcul de la FFT est de $p = 2$ périodes à savoir 5 ms. Le spectre théorique présente toutes les fréquences multiples de la fréquence fondamentale à savoir : $f_n = (2n+1)f_0$ avec $n \in \mathbb{N}$.

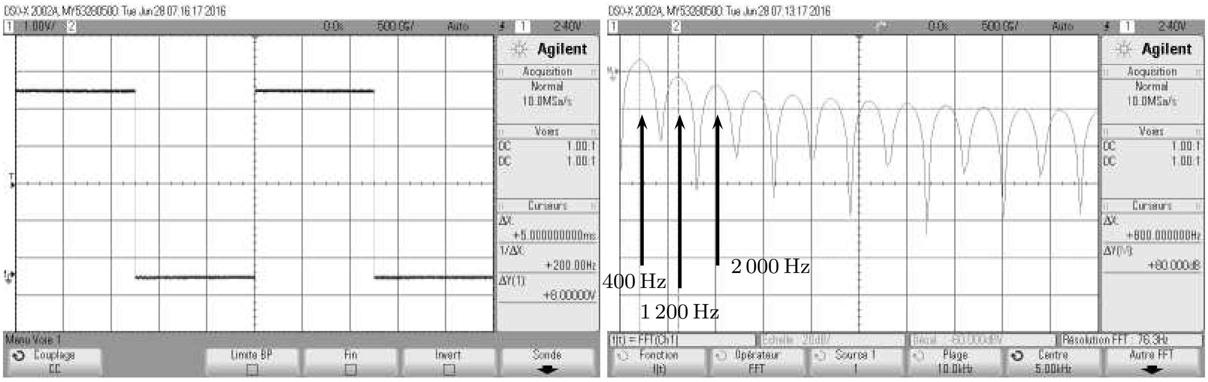

Figure 1 – Spectre sur une durée de 2 périodes

1.2 Calcul sur une durée moyenne

La durée prise pour le calcul de la FFT est de $p = 20$ périodes à savoir 50 ms, on peut voir à la figure 2. On constate aisément que la précision du spectre est améliorée.

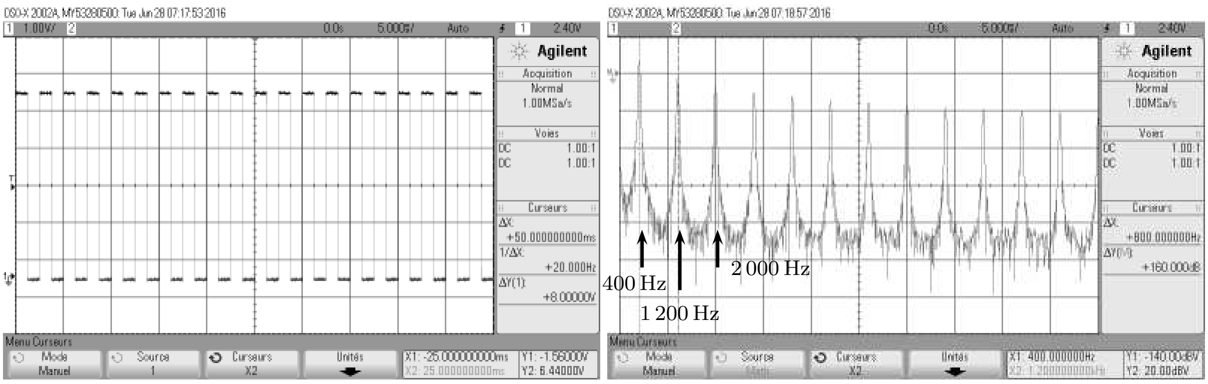

Figure 2 – Spectre sur une durée de 20 périodes

1.3 Calcul sur une longue durée

La durée prise pour le calcul de la FFT est de $p = 200$ périodes à savoir 500 ms, on peut voir à la figure 3 que le spectre est très précis.

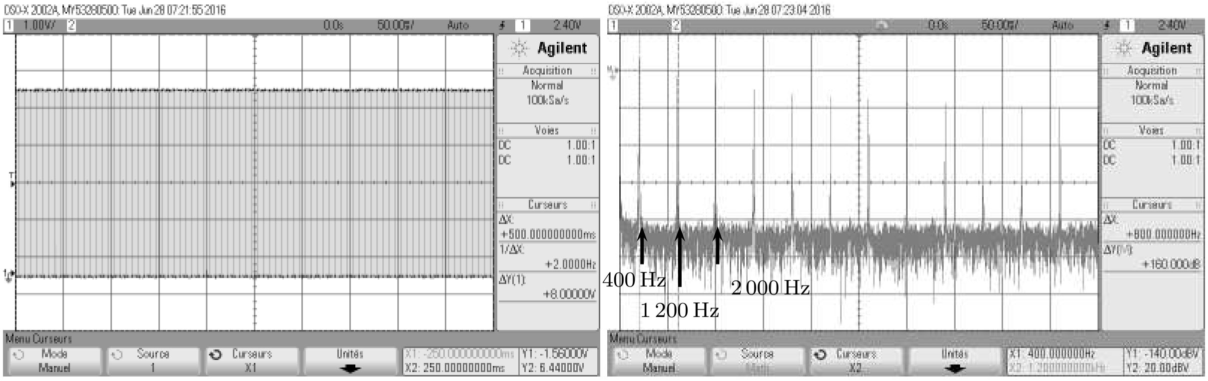

FIGURE 3 – Spectre sur une durée de 200 périodes

2 Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

2.1 Spectre d'un signal sinusoïdal échantillonné

Le signal sinusoïdal possède une fréquence $f_0 = 200\,\text{Hz}$, il est échantillonné par un peigne de DIRAC de fréquence $F_e = 1\,000\,\text{Hz}$. On peut voir clairement apparaître les fréquences $nF_e \pm f_0$ dans le spectre du signal échantillonné comme cela prévu en théorie. En particulier, on observe les fréquences $F_e - f_0 = 800\,\text{Hz}$ et $F_e + f_0 = 1\,200\,\text{Hz}$. Sur la figure 4, le calcul de la transformée de FOURIER a été effectué sur une durée $\Delta t = 4T_0$, on notera que l'on se situe au-delà du critère minimal de SHANNON puisque l'on a $F_e \geq 2f_0$.

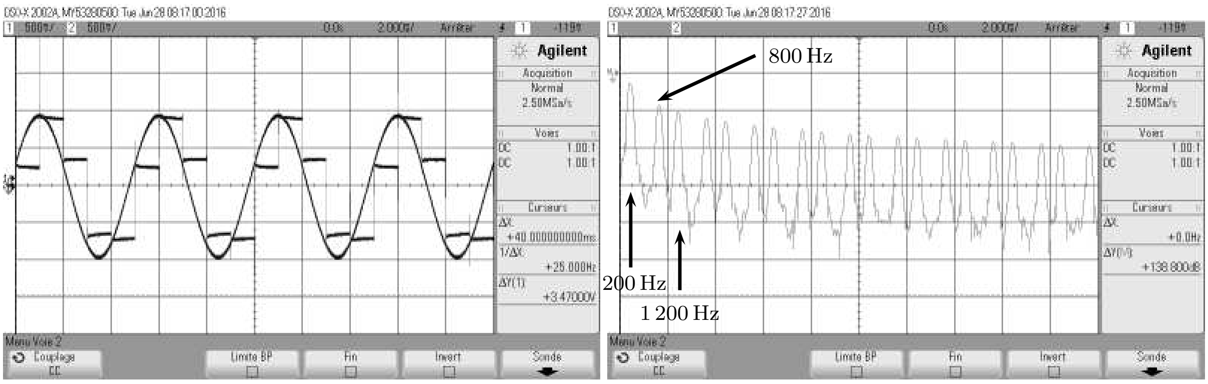

FIGURE 4 – Spectre du signal échantillonné sur une durée de 4 périodes

2.2 Calcul sur une longue durée

On constate comme dans l'étude précédente, que la durée de calcul prise pour la transformée de Fourier est importante pour la précision de la détermination des fréquences contenues dans le signal, ici le signal échantillonné toujours traité au-delà la limite de la limite de Shannon, voir la figure 5.

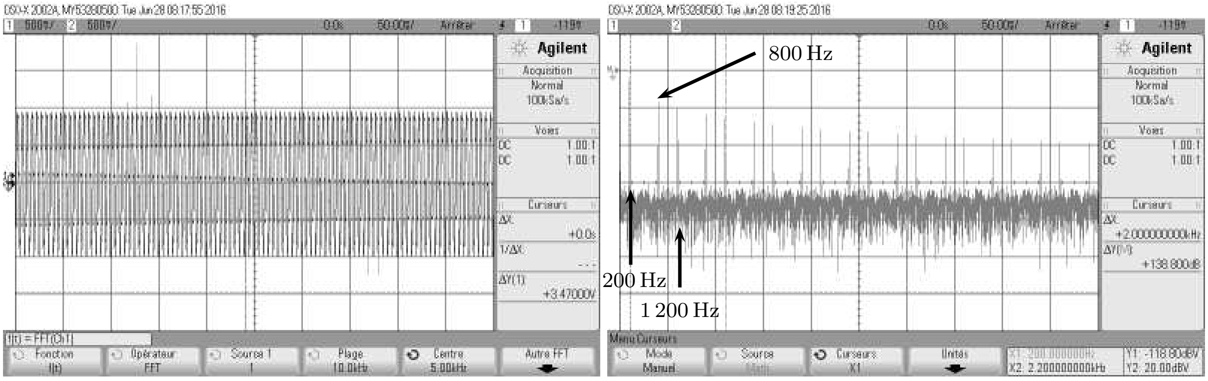

Figure 5 – Spectre du signal échantillonné sur une longue durée

2.3 Non respect du critère de Shannon

À la figure 6, on peut voir un échantillonnage réalisé en dessous de la limite de Shannon puisque le signal sinusoïdal est toujours de fréquence $f_0 = 200\,\text{Hz}$ et que la fréquence d'échantillonnage est $F_e = 300\,\text{Hz} < 2f_0$. Le signal a été visualisé sur une durée de 4 périodes mais la transformée de Fourier proposée à droite a été calculée sur une longue durée pour gagner en précision. Sur le spectre, on voit apparaître une fréquence de $F_e - f_0 = 100\,\text{Hz}$ résultat de l'opération d'échantillonnage. cette fréquence sera très gênante si l'on veut reconstituer le signal de départ car elle est inférieure à f_0. On parle de repliement du spectre. La fréquence de $400\,\text{Hz}$ correspond à $2F_e - f_0$.

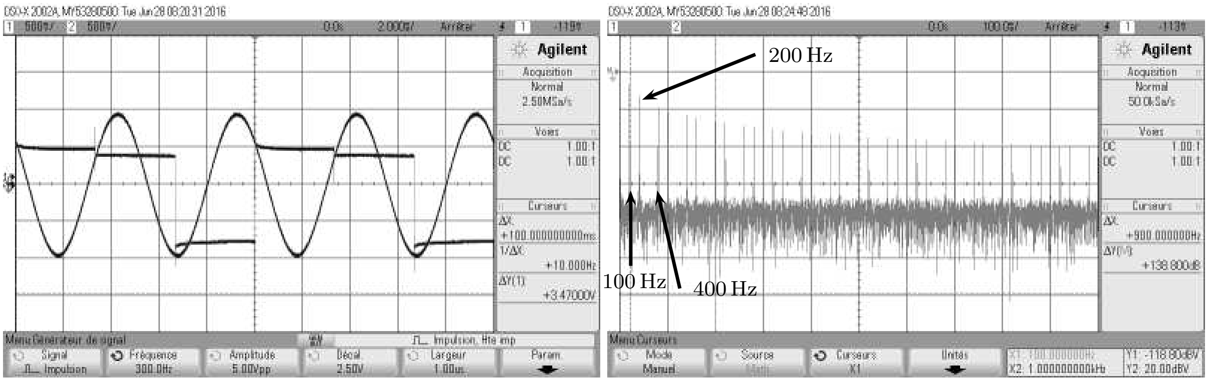

Figure 6 – Spectre du signal échantillonné en dessous du critère de Shannon