Quantité de mouvement en Mécanique

Au cours des siècles, l'évolution des connaissances en Mécanique a montré que la grandeur pertinente pour ce domaine de la Physique était la quantité de mouvement.

1 Quantité de mouvement pour un point

1.1 Définition

Considérons un point matériel M de masse m possédant, dans un référentiel $\mathcal{R}$, la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$. Sa quantité de mouvement notée $\vec{p}_{M/\mathcal{R}}$ dans ce référentiel est :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Cette définition n'est pas très impressionnante mais elle demande tout de même de s'intéresser à la masse m puisque vous avez parlé de vitesse en classe de Sup. Pourquoi la masse est-elle présente dans la définition de la quantité de mouvement ? Quel statut accorde-t-on à la masse ? Pour répondre à la première question, nous pouvons nous contenter de dire que quelques siècles de Mécanique ont permis de montrer que cela était judicieux. Ceci étant, il est tout de même intéressant de tenter de vous le faire sentir. Imaginez qu'un livre que vous lisez soit posé sur votre bureau et que vous vouliez le pousser un peu pour récupérer la souris de votre ordinateur. Rien de plus simple : vous allez lui donner provisoirement une certaine vitesse de l'ordre de la dizaine de centimètres par seconde. Et alors ? Cela ne vous a pas coûté un gros effort... et si votre bureau est à peu près rangé, vous avez déjà retrouvé votre souris. Imaginez maintenant que ce n'est pas ce livre qui est sur votre bureau mais un carton contenant les livres de Physique que vous avez achetés avant l'entrée en Spé. Vous avez compris que pour donner la même vitesse que celle évoquée juste avant, il va falloir fournir un effort nettement plus important. La mise en mouvement d'un livre ou d'un carton de livres n'est absolument pas comparable. Ces deux objets se distinguent par leur inertie.

1.2 Inertie, statut de la masse

Dans le dictionnaire, la définition donnée pour inertie est :

Inertie : État de ce qui est inerte. Résistance des objets pesants au mouvement qui leur est imposé.

Inerte : Qui n'a ni activité, ni mouvement propre.

À travers ces définitions, on sent très clairement que la question de la mise en mouvement est posée dans la perception de l'inertie. Toutefois, le terme « pesant » montre là encore que cette perception de l'inertie ne fait pas abstraction de l'influence de la Terre. D'ailleurs l'expérience du livre et du carton est faite sous l'influence de la Terre...

Le carton de livres possède une inertie plus grande que le livre mais le terme inertie pour le physicien ne peut pas être uniquement qualitatif, il doit devenir quantitatif. Pour quantifier l'inertie, il est assez raisonnable de faire intervenir la masse. Ici, par masse nous entendons ce qui est en rapport avec la quantité de matière en moles.

En conclusion de ce paragraphe, nous allons revenir sur le statut de la masse que nous venons de proposer et qui, pour nous, traduit l'inertie d'un objet. On parle alors de masse inerte. Vous êtes peut-être surpris de voir que l'on vient d'ajouter le qualificatif d'inerte à la masse. Rassurez-vous ! Dans ce qui suit, nous parlerons de masse tout simplement. Le statut de la masse est lié à la quantité de matière mais on peut tout de même s'interroger en réfléchissant à l'expérience suivante : à l'arrêt, vous vous mettez à courir sur le sable d'une plage bretonne pour parcourir une dizaine de mètres, allez, une centaine tant c'est agréable, lorsqu'il ne pleut pas, de fouler le sable tassé par la marée. Comme vous le savez bien, le problème est qu'il arrive que la marée monte. Une heure plus tard, au même endroit, à l'arrêt dans 60 cm d'eau vous vous mettez à courir pour parcourir une centaine de mètres, allez, une dizaine parce que c'est nettement moins drôle que dans le premier cas. Si la masse représente bien l'inertie de votre corps et si l'inertie représente la résistance de votre corps au mouvement que vous tentez de lui imposer, il y a comme un problème : votre masse aurait beaucoup augmenté une fois que la marée est haute ! Cette réflexion pose un problème difficile qui est celui du statut de la masse. La masse est-elle une caractéristique intrinsèque de l'objet liée uniquement à la quantité de matière ? Ou bien dépend-elle aussi de son environnement ? La réponse à cette question n'est pas évidente. Mais même si nous n'y répondrons pas, nous prendrons le parti d'envisager plutôt d'en rester à la masse inerte liée à la quantité de matière.

2 Quantité de mouvement pour des systèmes de points ou des objets étendus

La définition de la quantité de mouvement donnée pour un point matériel est particulièrement élémentaire. Le problème, c'est que nous sommes rarement confrontés à un objet pouvant être assimilé à un point matériel. Cela est possible lorsque sa taille est petite devant les dimensions caractéristiques que le problème étudié met en jeu. Par exemple, un satellite de communication est d'une taille très petite devant la distance qui le sépare de la surface terrestre et encore plus petite devant le rayon de la Terre. Une étude de son mouvement peut débuter en assimilant le satellite à un point matériel. Mais les ingénieurs qui surveillent sa trajectoire avec beaucoup de précision ne peuvent pas se contenter d'une modélisation aussi simpliste : il est indispensable de considérer le satellite comme un objet étendu. Pour ces mêmes ingénieurs, il sera sans doute difficile de proposer de considérer le satellite comme un solide car il peut se déformer au cours de son mouvement autour de la Terre comme lorsqu'il déploie ses panneaux solaires ou bien les oriente pour mieux récupérer l'énergie rayonnée par le Soleil. Cette évocation d'un objet étendu a pour objectif de vous faire comprendre que nous allons passer du point matériel à un système de points et que le système de points peut être modélisé par un solide (et par le fait, servir de référentiel) ou alors qu'il est indispensable de le considérer comme déformable. L'étude de la Mécanique des systèmes n'est pas simple, ses applications sont vues dans le cadre des Sciences Industrielles pour l'Ingénieur.

Nous allons commencer par un système Σ constitué de trois points matériels M_1, M_2 et M_3 de masses respectives m_1, m_2 et m_3. Dans le référentiel de notre étude noté $\mathcal{R}$, ils sont dotés d'une vitesse représentée sur le schéma de la figure 1.

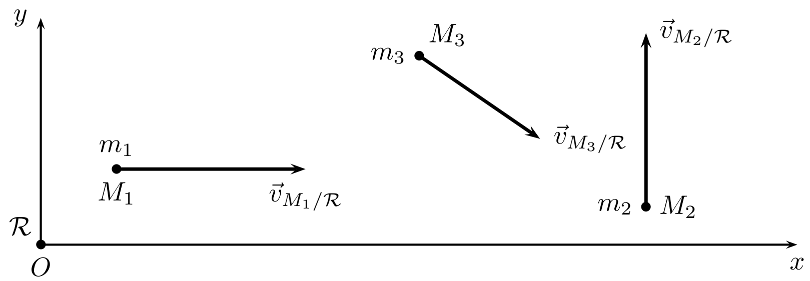

FIGURE 1 – Système de 3 points matériels

Les choses se compliquent un peu. La quantité de mouvement du système est $\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = m_1\vec{v}_{M_1/\mathcal{R}} + m_2\vec{v}_{M_2/\mathcal{R}} + m_3\vec{v}_{M_3/\mathcal{R}}$. On comprend vite qu'avec un nombre de points important, l'expression de la quantité de mouvement ne va pas être très parlante. On peut progresser en utilisant la définition des vitesses $\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. On peut alors mettre la quantité de mouvement sous la forme :

$$\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \left(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + m_3\overrightarrow{OM_3}\right)$$

Cette expression peut encore évoluer de façon intéressante en y faisant figurer la masse totale $m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3$ au numérateur et au dénominateur. Cela donne l'expression :

$$\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = m_{tot} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \left(\frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + m_3\overrightarrow{OM_3}}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

L'expression qui fait maintenant l'objet de la dérivation est une moyenne des vecteurs positions avec, comme coefficients de calcul de la moyenne, les masses de chacun des points. En réalité, ce vecteur position « moyen » permet de définir un point particulier qui va s'avérer très important en Mécanique : le centre d'inertie. On le note G, on l'appelle encore barycentre. Dans le repère, d'origine O, sa localisation est définie par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + m_3\overrightarrow{OM_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}}{m_{tot}}$$

Si l'on utilise le centre d'inertie G, l'expression de la quantité de mouvement d'un système devient très simple. C'est tout l'intérêt de ce développement. On obtient donc $\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = m_{tot} \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. L'opération de dérivation étant relative au référentiel $\mathcal{R}$, même si nous ne l'avons pas fait figurer pour ne pas trop alourdir l'écriture, on voit apparaître la vitesse de G dans le référentiel de travail : $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. La quantité de mouvement d'un système est la somme des contributions des quantités de mouvements de tous les points matériels du système, elle s'exprime très simplement par :

$$\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = m_{tot}\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$$

Nous venons de dire que la quantité de mouvement s'exprime très simplement. En fait, cette expression va être très importante sur le plan théorique mais pour que l'expression soit simple, encore faut-il que l'on puisse identifier facilement la position du centre d'inertie G. Dans le cas des objets de la vie de tous les jours, ce n'est pas toujours facile mais quelques-uns d'entre eux vont tout de même nous le permettre. C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant. Pour terminer, nous indiquerons que l'on peut proposer deux descriptions des objets étendus. L'une qui utilise une somme de points matériels comme nous venons de le faire. Dans ce cas, la somme est qualifiée de discrète et par exemple la masse totale du système Σ est donnée par $m_{tot} = \sum\limits_{i\in\Sigma} m_i$. On peut aussi utiliser une description dite continue (par opposition à discrète) et dire que le système Σ est constitué par une multitude (une infinité pour le mathématicien) de masses élémentaires notées $\mathrm{d}m$ telles que la masse totale du système devienne une somme continue qui est une intégrale pour employer un langage plus correct : $m_{tot} = \displaystyle\int_\Sigma \mathrm{d}m$. On peut donc écrire de deux façons – apparemment différentes mais, en réalité, équivalente – la définition de la position du centre d'inertie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{m_{tot}} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\int \mathrm{d}m\overrightarrow{OM}}{m_{tot}}$$

2.1 Conclusion

En fait, la détermination de la position du centre d'inertie est simple à effectuer et très vite intuitive lorsque l'on a affaire à un objet homogène, c'est-à-dire un objet constitué de la même matière en chacun de ses points. Le centre d'inertie G appartient à l'ensemble des éléments de symétrie de l'objet. On trouve donc facilement sa position par des considérations géométriques. Pour des objets composites assez complexes, il en va tout autrement. Cette difficulté pratique ne doit pas faire oublier l'importance du barycentre dans la mise en place théorique de la Mécanique. Comme les études qui figurent au programme sont assez limitées, nous pourrons presque toujours nous contenter de présenter les principes et les lois dans le cadre de la Mécanique du point en n'oubliant pas que lorsque nous étudierons un système de points, le point considéré sera le centre d'inertie G auquel on affecte la masse totale du système :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Point :} \quad \vec{p}_{/\mathcal{R}} = m\,\vec{v}_{/\mathcal{R}} \\[1em] \text{Système de points :} \quad \vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = m_{tot}\,\vec{v}_{G/\mathcal{R}} \end{array}}$$

On peut aussi s'affranchir d'une origine comme le point O pour caractériser le centre d'inertie d'un système comme on peut le comprendre en utilisant tout simplement la relation de Chasles :

$$m_{tot}\,\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM}\mathrm{d}m = \int \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right)\mathrm{d}m = \overrightarrow{OG}\int \mathrm{d}m + \int \overrightarrow{GM}\mathrm{d}m = m_{tot}\overrightarrow{OG} + \int \overrightarrow{GM}\mathrm{d}m$$

On peut donc proposer une autre forme de définition du barycentre des masses :

$$\sum_i m_i\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \qquad \text{ou} \qquad \int \mathrm{d}m\,\overrightarrow{GM} = \vec{0}$$

2.2 Centre de masse et point d'application du poids

On a compris par le résultat précédent que le centre d'inertie G - barycentre des masses - était très important pour caractériser la quantité de mouvement du système. La position de G traduit la plus ou moins grande homogénéité - ou hétérogénéité - de la répartition des masses du système. Le poids d'un corps est une fonction directe de la masse du système. Il est indispensable de s'interroger sur le point d'application du poids. Comme nous l'avons déjà vu, le point d'application de la résultante d'une force répartie est une affaire de moment. Notons G^* le point d'application du poids du système. Ce point est donc défini par la relation :

$$\overrightarrow{OG^*} \wedge \left(\int \mathrm{d}m\, \vec{g}(M) \right) = \int \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m\, \vec{g}(M)$$

où $\vec{g}(M)$ est le champ de pesanteur à l'endroit où se situe la masse dm au point M. Cette expression permet de déterminer la position de G^* par rapport à une origine arbitraire O si l'on calcule les deux intégrales qui figurent dans la relation. Ce calcul pourrait s'avérer délicat en fonction de l'hétérogénéité de la répartition des masses mais aussi en fonction de l'évolution du champ de pesanteur $\vec{g}(M)$. Heureusement, dans la plupart des situations courantes, la longueur caractéristique d'évolution de $\vec{g}(M)$ est très grande devant la taille caractéristique du système sur lequel on intègre. Dans ces conditions, il est tout à fait raisonnable de considérer le champ de pesanteur comme uniforme : $\vec{g}(M) = \vec{g}\ \forall M$. Avec cette hypothèse, tout est simplifié. Reprenons l'expression qui définit le point d'application du poids G^* :

$$\overrightarrow{OG^*} \wedge \left(\int \mathrm{d}m\, \vec{g}(M) \right) = \overrightarrow{OG^*} \wedge m_{tot}\, \vec{g} = \left(\int \mathrm{d}m\overrightarrow{OM} \right) \wedge \vec{g}$$

On peut donc sans difficulté constater l'égalité suivante :

$$m_{tot}\, \overrightarrow{OG^*} = \int \mathrm{d}m\, \overrightarrow{OM}$$

Cette relation n'est autre que la définition du barycentre des masses G. On peut donc constater qu'en présence d'un champ de pesanteur uniforme, le centre d'inertie est aussi le point d'application du poids : $G = G^*$. C'est, sans doute, toujours ainsi que vous avez dû voir les choses depuis vos débuts en Physique mais il faut se rendre compte que l'uniformité du champ de pesanteur est indispensable pour que cela soit vrai.

Cette situation est une fois de plus l'occasion de se rappeler qu'il convient d'être prudent lorsque l'on cherche le point d'application d'une force répartie. Ce n'est pas si évident en général. On retombera dans un cas simple uniquement lorsque la densité de force - qu'elle soit volumique, surfacique ou linéique - sera uniforme.

3 Complément sur la quantité de mouvement

3.1 Quantité de mouvement associée à une onde

En 1923, le physicien français Louis de Broglie indique dans sa thèse que les objets matériels peuvent se comporter comme des ondes. Considérons, même si cela n'enlève rien à la généralité du propos, une particule M ponctuelle de masse m, de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ et donc de quantité de mouvement $\vec{p}_{M/\mathcal{R}}$. Cela signifie que, dans certaines situations physiques, il ne faut plus utiliser la description classique que nous venons d'employer mais, au contraire, employer le formalisme ondulatoire pour modéliser le problème physique étudié. Comme vous le savez, une onde est caractérisée très fréquemment par sa longueur d'onde λ. Louis de Broglie proposa une formule permettant de relier la quantité de mouvement (ou plutôt sa norme) à la longueur d'onde associée :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Dans cette formule, h représente la constante de Planck qui vaut $h = 6,62 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$. La formule que nous présentons est, certes, celle que l'on utilise le plus fréquemment mais, en fait, la formule permettant de dire qu'une particule peut avoir un comportement ondulatoire relie le vecteur d'onde $\vec{k}$ - que nous avons défini dans l'étude des ondes - et la quantité de mouvement selon :

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad \text{ou} \quad \vec{p} = \hbar\,\vec{k}$$

Dans cette formule, $\hbar = h/(2\pi)$ est appelé « h barre ». Comme le vecteur d'onde est $\vec{k} = k\vec{e_x} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e_x}$, on retrouve la première formule donnée puisqu'en norme $\dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{p}{\hbar} = \dfrac{p2\pi}{h}$ conduit bien à $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{p}{h}$ et donc à $\lambda = \dfrac{h}{p}$. Cette formule liant quantité de mouvement et vecteur d'onde n'est pas sortie du cerveau de Louis de Broglie ex nihilo. Louis de Broglie a été influencé dans sa réflexion par les théories physiques qui avaient vu le jour depuis le début du XX$^{\text{e}}$ siècle comme celle de Planck qui introduisit le photon [1] en 1900 ou encore celle d'Einstein en 1905 qui expliquait l'effet photoélectrique [2]. En étudiant la structure des niveaux d'énergie

1. Pour expliquer les transferts d'énergie lors des interactions entre rayonnement et matière.
2. Lors de l'effet photoélectrique, un rayonnement suffisamment énergétique est capable d'arracher des électrons à la matière. Le rayonnement est alors décrit comme constitué de particules qui sont justement les photons de Planck.

de l'atome d'hydrogène dans le cadre du modèle de Bohr, Louis de Broglie constata qu'il était possible de faire le lien entre deux mondes qui semblaient indépendants : le monde des particules et le monde des ondes. Il obtint le prix Nobel de Physique en 1929, soit seulement six ans après avoir proposé sa théorie. Ceci n'est pas sans rapport avec le fait que les physiciens américains Davisson et Germer montrèrent expérimentalement, dès 1927, l'entière validité des développements théoriques de Louis de Broglie grâce une expérience de diffraction, par un cristal de nickel, d'électrons se déplaçant à la vitesse de $4 \times 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. C'était la première fois qu'une expérience de diffraction était conduite avec des particules. Jusqu'alors, elle n'avait été réalisée qu'avec du rayonnement, principalement dans le domaine visible comme vous l'avez fait au lycée mais aussi dans le domaine des rayons X pour étudier la structure des cristaux. Cette période d'évolution des idées en Physique a eu des conséquences considérables sur tous les développements que la Physique a connus depuis presqu'un siècle. On peut dire que la théorie de Louis de Broglie est l'acte de naissance de la Mécanique quantique puisqu'en 1925, le physicien autrichien Erwin Schrödinger s'en inspira pour en élaborer les bases, suivi ensuite par le physicien et mathématicien anglais Paul Dirac.

Nous allons essayer de concrétiser un peu cette notion de longueur d'onde associée à une particule matérielle en effectuant quelques calculs d'ordre de grandeur. Commençons par notre échelle, nous pouvons nous situer à quelques dizaines de kilogrammes et à des vitesses de l'ordre du mètre par seconde. Notre quantité de mouvement habituel est donc $p \simeq 10 \times 1 = 10\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. Avec $\lambda = h/p$, on trouve $\lambda \simeq 10^{-33}\,\mathrm{m}$. Vous savez que pour qu'un phénomène de diffraction soit plus facilement perceptible, il est préférable que l'ouverture provoquant la diffraction soit d'une taille située dans l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Il est donc inutile d'espérer être diffracté à moins de trouver une ouverture de $10^{-33}\,\mathrm{m}$... Autre problème : faut-il pour la fusée Ariane V utiliser une description particulaire ou ondulatoire pour son mouvement ? Sa masse est d'environ 700 tonnes et sa vitesse, une fois lancée, de l'ordre de $10\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Sa quantité de mouvement est donc $p \simeq 7\times10^9\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. La longueur de De Broglie de la fusée Ariane est donc $\lambda \simeq 10^{-43}\,\mathrm{m}$. C'est évidemment le modèle corpusculaire qui va s'imposer. Nous venons de voir que les longueurs d'onde trouvées sont beaucoup trop petites pour que nous ayons une possibilité de perception physique du caractère ondulatoire des objets. Mais comme $\lambda = h/p$, si nous prenons p très petit, nous pouvons arriver à des ordres de grandeurs adaptés à notre échelle. Si l'on choisit $\lambda = 1\,\mathrm{cm}$, cela signifie que $p \simeq 10^{-31}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. Pour un objet de $10\,\mathrm{kg}$, cela correspond à une vitesse de $10^{-32}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$! Cette fois, c'est une telle vitesse qui va nous être inaccessible. Poussons le raisonnement à l'extrême : tous les objets immobiles possèdent une longueur d'onde... infinie. D'accord, mais un objet au repos n'a pas grand intérêt pour le physicien tout comme une onde qui possède un vecteur d'onde nul !

Venons-en maintenant aux électrons de l'expérience de Davisson et Germer. Leur vitesse est élevée $v \simeq 4\times10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ alors que leur masse est $m \simeq 10^{-30}\,\mathrm{kg}$ et leur quantité de mouvement $p \simeq 4\times10^{-24}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. La longueur d'onde associée est $\lambda = h/p \simeq 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Cette longueur d'onde est très petite mais elle correspond justement au même domaine que celui des rayons X. Elle permet de voir des résultats très perceptibles dans l'expérience de diffraction car les distances interatomiques dans le cristal de nickel[3] sont justement de l'ordre de $10^{-10}\,\mathrm{m}$.

3.2 Relativité et quantité de mouvement du photon

Les électrons de l'expérience de Davisson et Germer ne sont pas considérés comme relativistes puisque leur vitesse est inférieure à $c/10 = 3 \times 10^7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Heureusement car, sinon, nous aurions fait une erreur en évaluant leur quantité de mouvement dans le paragraphe précédent. Nous leur avons appliqué la définition classique pour ne pas dire galiléenne de la quantité de mouvement : $p = mv$ en norme. Pour des particules relativistes, on devra utiliser une formule issue de la théorie d'Einstein :

$$p = \gamma\, mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Nous allons prendre un exemple pour concrétiser cette formule. Pour des électrons se déplaçant à la vitesse $v = 2 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, on a $\gamma = 1,34$, la longueur que l'on évaluerait par $\lambda = h/(mv)$ serait trop grande d'un facteur $1,34$. Dans l'exemple choisi, la bonne valeur est $\lambda = 2,7 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$. Avec la formule de la quantité de mouvement pour les particules relativistes, on voit tout de suite que plus la vitesse va se rapprocher de c, plus γ augmente. Lorsque l'on envisage une particule dont la vitesse tend vers c, alors γ tend vers l'infini !

C'est Albert Einstein qui proposa de considérer que les photons possèdent une masse nulle. En Mathématiques, le produit $\infty \times 0$ est ce que l'on appelle une forme indéterminée qui possède une valeur non infinie. Les ondes électromagnétiques, et en particulier les ondes lumineuses visibles, se propagent dans le vide à la vitesse c. Les photons associés à ces ondes se déplacent donc à la vitesse c, considérer leur masse comme nulle était indispensable dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte. Pour le photon, on procède en quelque sorte

3. Qui jouent le rôle d'ouvertures diffractantes.

à l'envers : en général, c'est la longueur d'onde λ du rayonnement qui est facilement accessible, la formule de De Broglie donne accès à la quantité de mouvement. La connaissance de la quantité de mouvement associée au photon est indispensable pour bien comprendre les interactions entre les photons et la matière. En conclusion, nous retiendrons que :

$$p_{\text{photon}} = \frac{h}{\lambda_{\text{onde électromagnétique}}} = \hbar\, k_{\text{onde électromagnétique}}$$

3.3 Mécanique quantique

Nous verrons dans le cadre du cours de Mécanique quantique qu'une particule quantique que nous nommerons *quanton* est décrite une fonction d'onde que l'on associe à sa densité de probabilité de présence en un lieu donné de l'espace. Cette fonction d'onde - comme toute forme ondulatoire - est caractérisée par un vecteur d'onde $\vec{k}$ que l'on relie à sa quantité de mouvement $\vec{p}$ dans la continuité des idées de Louis de Broglie. La relation est appelée relation d'Einstein :

Particule quantique ou quanton

Quantité de mouvement donnée par la relation d'Einstein : $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$

4 Moment cinétique ou moment de la quantité de mouvement

4.1 Intérêt

L'étude des mouvements des systèmes et, en particulier, des solides montre que la seule notion de quantité de mouvement est insuffisante pour avoir accès à la connaissance précise du mouvement du solide. En effet, l'expression de la quantité de mouvement $\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = m_{tot}\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ donne accès au mouvement du centre d'inertie G du système - et c'est particulièrement efficace - mais pas au détail du mouvement de chaque point du solide. Le rôle du moment cinétique sera de permettre d'accéder à cette description détaillée du mouvement de chaque point du solide.

4.2 Définition pour un point

On considère un point M de masse m de quantité de mouvement $m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. Le moment cinétique n'a rien de particulier, il s'inscrit dans la notion générale de moment d'une grandeur physique. Le moment cinétique est le moment de la quantité de mouvement. On définit un point origine O pour son calcul. Le moment cinétique en O du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

La notion de moment cinétique n'est pas indispensable pour faire l'étude du mouvement d'un point. Dans certains cas comme pour les études de gravitation - et plus généralement l'étude des mouvements à force centrale - la notion de moment cinétique est pratique pour démontrer plus facilement certaines propriétés du mouvement comme son caractère plan et la loi des aires. Ces propriétés sont tout à fait démontrables sans recourir à la notion de moment cinétique.

L'intérêt du moment cinétique pour un point est double : un intérêt, comme nous venons de le dire, pour certaines démonstrations mais aussi un intérêt pédagogique à savoir qu'il permet de se familiariser avec ce nouvel outil avant de le rencontrer dans l'étude des systèmes ou des solides car les choses sont alors nettement plus complexes.

4.3 Moment cinétique pour un système ou un solide

Il se définit tout simplement comme la somme des contributions de tous les moments cinétiques associés aux points du système ou aux parties d'un solide. Le calcul peut s'avérer délicat. Il sera étudié dans le cadre du chapitre consacré à la rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

Pour un solide Σ en rotation autour d'un axe fixe Δ, nous verrons que l'expression du moment cinétique scalaire L_Δ s'écrit comme le produit d'une grandeur traduisant l'inertie du solide, son moment d'inertie J_Δ et de sa vitesse de rotation dans le référentiel d'étude $\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \omega\vec{e}_\Delta$. Le moment cinétique scalaire L_Δ correspond à la projection du moment cinétique $\vec{L}_{\Sigma/\mathcal{R}}$ sur l'axe de rotation :

$$\vec{L}_{\Sigma/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_\Delta = L_\Delta = J_\Delta\,\omega$$

5 Conclusion

5.1 Les grandeurs cinétiques

L'étude du mouvement d'un point M ou d'un système Σ repose sur l'utilisation de trois outils que l'on qualifiera de *cinétiques*[4] :

$$\begin{cases} \text{Quantité de mouvement} & \vec{p}_{M-\Sigma/\mathcal{R}} \\ \text{Moment cinétique} & \vec{L}_{O,M-\Sigma/\mathcal{R}} \\ \text{Énergie cinétique} & E_{c,M-\Sigma/\mathcal{R}} \end{cases}$$

5.2 Torseurs

Ceux d'entre-vous qui effectuent l'option SI auront reconnu dans la quantité de mouvement et le moment cinétique, la résultante et le moment du torseur cinétique. Sans oublier que l'énergie cinétique est le demi comoment des torseurs cinétique et cinématique... La notion de torseur ne figure pas au programme de Physique mais elle peut rendre service en SI. On exprime ces grandeurs pour le système Σ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} \text{Torseur cinématique en } O \text{ dans } \mathcal{R} & \left\{\vec{v}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}\,,\,\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}\right\} \\ \text{Torseur cinétique en } O \text{ dans } \mathcal{R} & \left\{\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}\,,\,\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}}\right\} \\ \text{Énergie cinétique dans } \mathcal{R} & E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{v}_{O,\Sigma/\mathcal{R}} \cdot \vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} + \vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}} \cdot \vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}\right) \end{cases}$$

Si l'on reprend l'exemple d'un point matériel, la quantité de mouvement est $\vec{p}_{/\mathcal{R}}$, le moment cinétique calculé avec comme origine le point est nul, l'énergie cinétique peut être vue comme un cas particulier de la formule précédente. On a alors :

$$E_{c,/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\,\vec{p}_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}} = \frac{\vec{p}^{\,2}_{/\mathcal{R}}}{2m} = \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}^{\,2}_{/\mathcal{R}}$$

On prend maintenant l'exemple d'un solide qui tourne autour d'un axe Δ auquel appartient le point O. On a donc $\vec{v}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = 0$ puisque $\vec{v}_{O/\mathcal{R}} = \vec{0}$. La vitesse de rotation de ce solide est $\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \omega\,\vec{e}_\Delta$ et son moment cinétique scalaire $L_\Delta = J_\Delta\,\omega$. L'énergie cinétique du solide peut être vue à nouveau comme un cas particulier de la formule précédente :

$$E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\,L_\Delta\,\omega = \frac{L_\Delta^2}{2J_\Delta} = \frac{1}{2}J_\Delta\,\omega^2$$

4. La quantité de mouvement est encore appelée *résultante cinétique*.

5.3 Écrire les lois de la Mécanique

Écrire les lois de la Mécanique consiste à faire le lien entre les grandeurs cinétiques dont nous venons de parler et les interactions subies par le système. Ces interactions sont décrites par ce que l'on appelle des forces que l'on qualifie d'intérieures ou d'extérieures au système. La loi des actions réciproques nous assure du fait que la somme des forces intérieures est nulle et que la somme des moments des forces l'est aussi. On peut montrer que la puissance des forces intérieures à un système n'est, en général, pas nulle. Même si elle l'est dans le cas des solides, il ne faut pas généraliser ce résultat ! Le lien entre les grandeurs cinétiques et les forces est une question de dérivation par rapport au temps. On peut proposer une écriture générale des lois de la Mécanique de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{Loi de la quantité de mouvement} & \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right._{/\mathcal{R}} = & \text{Somme des forces} \\[2ex] \text{Loi du moment cinétique} & \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right._{/\mathcal{R}} = & \text{Somme des moments des forces en } O \\[2ex] \text{Loi de l'énergie cinétique} & \left.\dfrac{\mathrm{d}E_{c,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right._{/\mathcal{R}} = & \text{Somme des puissances des forces}\end{array}\right.$$

Ceci sera étudié plus loin, mais il sera important de ne pas perdre de vue que l'écriture des lois de la Mécanique revient toujours à la même chose...