

# Rayonnement électromagnétique dipolaire

Nous allons étudier dans ce chapitre le rayonnement dans le vide d'une onde électromagnétique créée par une distribution de courant assimilée à un dipôle électrique oscillant. Dans ce cadre simplificateur, l'étude du rayonnement est déjà une chose difficile. Il n'est pas possible dans le cadre du programme d'étudier le rayonnement émis par les antennes radio, télévision, téléphone... Le travail conduit sur le dipôle électrique oscillant nous permettra toutefois de dégager les résultats essentiels du rayonnement. Seul un aperçu du rayonnement d'une antenne sera fourni ensuite.

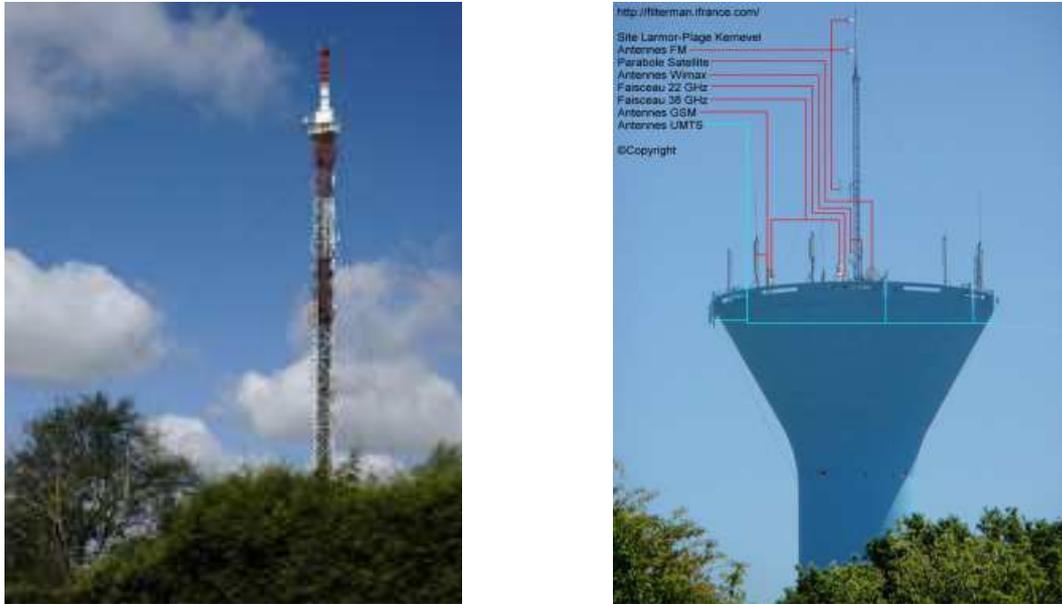


FIGURE 1 – Photographies d'antennes

Le dipôle électrostatique a été modélisé par un couple de charge  $(-q, +q)$  séparé par une distance fixe généralement notée  $a$ . Le moment dipolaire électrique associé à ce système est défini par le vecteur  $\vec{p} = qa\vec{e}_z$  si les deux charges sont présentes sur l'axe de coordonnées  $Oz$  et orienté depuis la position de la charge négative  $-q$  vers la charge positive  $q$ . Un dipôle électrique oscillant au sens de HERTZ peut être décrit par le modèle de deux charges une charge  $-q$  située au point  $O$  du repère et une charge  $+q$  dont la position évolue selon la loi  $z_+ = a \cos \omega t$ . Le moment dipolaire du dipôle de HERTZ est alors :  $\vec{p} = qa \cos \omega t \vec{e}_z$  qu'on pourra noter en complexe :

$$\vec{p} = qa \exp i\omega t \vec{e}_z = \vec{p}_0 \exp i\omega t$$

On retiendra que dans une antenne sont présents des courants oscillants qui pourront être rapprochés du dipôle oscillant comme nous le verrons par la suite.

## 1 Le modèle du rayonnement dipolaire

### 1.1 Longueurs mises en jeu

Dans l'étude du rayonnement dipolaire, trois longueurs vont se révéler importantes :

- la taille du système rayonnant (dipôle ou antenne) notée  $a$ ,
- la longueur d'onde de l'onde produite  $\lambda$ ,
- la distance à laquelle on étudie l'onde produite  $PM$ .

## 1.2 Symétries

L'antenne est orientée selon l'axe  $Oz$ . Les coordonnées sphériques sont  $(r, \theta, \varphi)$  et les vecteurs unitaires associés  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ . Dans ces conditions, on peut constater que le système est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ . Toutes les grandeurs physiques produites par l'antenne seront indépendantes de  $\varphi$ . On peut aussi constater que le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution des courants circulant dans l'antenne. Le champ magnétique produit est donc perpendiculaire à ce plan, on a donc nécessairement  $\vec{B} = B_\varphi(r, \theta, t)\vec{e}_\varphi$ .

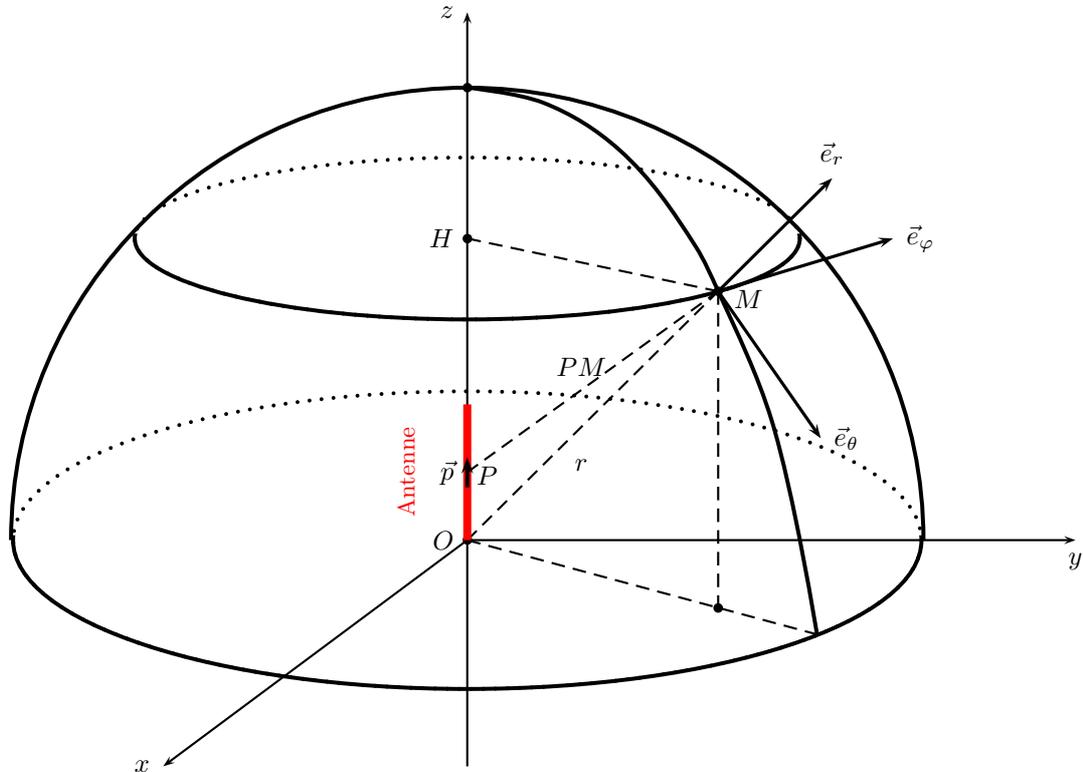


FIGURE 2 – Dipôle rayonnant et coordonnées sphériques

L'antenne n'est pas un dispositif chargé, il est seulement le siège d'un système de courants variables en forme d'onde stationnaire. Il n'est pas possible à la seule vue de la symétrie de l'antenne de tirer une conclusion pour le champ électrique  $\vec{E}$  à l'exception du fait qu'il dépend de  $(r, \theta, t)$ .

## 1.3 Les approximations du modèle

### 1.3.1 Approximation non relativiste

On suppose que :

$$\boxed{\text{Approximation non relativiste} \iff \lambda \gg a}$$

Si l'on considère le modèle du dipôle rayonnant de HERTZ, on constate que cette approximation revient à fixer une condition sur la vitesse de la charge  $+q$ . En effet, la longueur d'onde dans le vide (seul milieu envisagé dans notre étude) est donnée par  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ . Comme la vitesse de la charge  $+q$  correspond à  $\frac{dz_+}{dt} = -a\omega \sin \omega t$ , on constate donc que la vitesse maximale de la charge oscillante est  $v_{+,max} = a\omega$ . On en déduit donc que  $a \ll \lambda$  équivaut à  $\omega a = v_{+,max} \ll 2\pi c$  ce qui, en clair, signifie que la particule possède une vitesse faible devant celle de la lumière.

Dans l'étude d'une petite antenne, dans le sens où la condition  $a \ll \lambda$  est assurée, on aura à une extrémité de l'antenne, un courant  $i(z = 0, t)$  qui sera finalement très peu déphasé de celui à l'autre extrémité  $i(z = a, t)$  puisque la durée de parcours de l'antenne sera de l'ordre de  $\Delta t = \frac{a}{c} \ll T$  où  $T$  est la période de l'oscillation. Ainsi, pour tout point d'abscisse  $z$  le long de l'antenne, on pourra considérer le même élément de courant  $i(t)dz$ . Toutefois, les antennes utilisées sont souvent optimisées pour émettre une puissance importante et, dans ce cadre, elles possèdent en général une dimension  $a \simeq \lambda$ . Des antennes très classiques sont, par exemple, les antennes demi-ondes. Comme leur nom l'indique, elles sont de taille  $a = \frac{\lambda}{2}$ . Pour toutes ces antennes, l'approximation

non relativiste n'est plus valable. On peut toutefois utiliser le modèle du dipôle rayonnant que nous mettons en place en découpant ces grandes antennes en petits morceaux de longueur  $dz$ .

### 1.3.2 Approximation dipolaire

Soit  $a$  la distance caractéristique de l'extension spatiale de la distribution de courant, c'est-à-dire de l'antenne, qui rayonne l'onde électromagnétique. Dans une modélisation volumique, le volume total de la distribution de courant doit être de l'ordre de  $a^3$ . Pour une antenne filiforme, la longueur de l'antenne sera de l'ordre de  $a$  et pour un dipôle, il s'agit bien sûr de la distance  $a$  qui sépare les charges et définie au départ. Se placer dans le cadre de l'approximation dipolaire, consiste à affirmer que quel que soit le point  $P$  de la distribution de courant, le point  $M$  est suffisamment loin de celle-ci pour que le temps de propagation soit considéré comme quasiment constant pour l'ensemble des points  $P$  :  $\forall P \quad : \quad \frac{PM}{c} \simeq \frac{OM}{c} = \frac{r}{c}$ . On considère que le retardement est le même quel que soit le point de la source de l'onde envisagée, cela revient à dire que :

$$\boxed{\text{Approximation dipolaire} \iff PM \simeq r \gg a}$$

### 1.3.3 Zone de rayonnement

$$\boxed{\text{Zone de rayonnement} \iff r \gg \lambda}$$

Cette condition n'est pas très contraignante. En effet, si l'on prend l'exemple des ondes radio en FM, la fréquence est de l'ordre de 100 MHz, la longueur d'onde est par conséquent d'environ 3 m. Il suffit de se trouver à 300 m de l'antenne émettrice pour se situer dans la zone de rayonnement.

On notera que si l'on effectue au contraire de ce qui précède une étude dans la zone  $r \ll \lambda$ , cela revient à négliger les temps de propagation des sources (en  $P$ ) au point d'observation des champs (en  $M$ ). On se trouve alors dans la zone dite *statique*, car le calcul des champs correspond à ceux effectués dans le cadre des études du dipôle électrostatique en première année et du dipôle magnétostatique effectuée en seconde année.

## 2 Calcul des champs rayonnés

Le calcul des champs rayonnés est hors-programme. On ne s'intéresse qu'aux champs dits *lointains*, c'est-à-dire à ceux produits dans la zone de rayonnement. On démontre dans ce contexte que l'onde électromagnétique a une structure d'onde plane. On travaille exclusivement dans le cadre d'une onde sinusoïdale ou monochromatique de pulsation  $\omega$ .

### 2.1 Champ magnétique

Les calculs conduits dans le cadre de la production et de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide permettent d'obtenir :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin \theta \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$$

### 2.2 Champ électrique

L'équation de MAXWELL-FARADAY  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  nous permet d'écrire que  $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ . On retrouve la relation usuelle des ondes planes :  $\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{e}_r \wedge \vec{E})$ . On peut donc très rapidement arriver à l'expression du champ électrique :

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin \theta \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

La structure de l'onde rayonnée est à représenter sur le schéma de la figure 2.

### 3 Aspect énergétique

#### 3.1 Le vecteur de Poynting

Le vecteur de POYNTING est par définition  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ . Ce vecteur étant un produit des deux champs électrique et magnétique, il est, sans doute préférable à notre niveau, de passer en réels pour conduire les calculs. On a donc :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

À partir de ces deux expressions, on peut en déduire que l'expression du vecteur de POYNTING qui représente la puissance surfacique associée à l'onde est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$$

On constate bien que l'énergie se propage de l'antenne selon le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$ , ce qui correspond bien avec vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$ . On peut écrire ce vecteur en faisant apparaître l'extension spatiale  $a$  du dipôle puisque  $p_0 = qa$ . On a alors :

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$$

La puissance rayonnée correspond au flux du vecteur de POYNTING. On travaille en coordonnées sphériques, on calcule la puissance sur la sphère de rayon  $r$ . La surface élémentaire est  $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$ . On peut donc écrire que :

$$P_{ray} = \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \cos^2(\omega t - kr) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Finalement, on trouve l'expression suivante, en moyenne temporelle puisque  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$  :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{12\pi c}$$

#### 3.2 Puissance et anisotropie du rayonnement



## 4 Calcul complet des champs

### 4.1 Contexte

Ces développements sont hors-programme.

Nous allons nous intéresser au champ électromagnétique produit par un dipôle variable placé à l'origine  $O$  du repère  $Oxyz$ . Nous utiliserons les coordonnées sphériques pour repérer le point  $M(r, \theta, \varphi)$  où nous cherchons à évaluer les champs électrique  $\vec{E}(M, t)$  et magnétique  $\vec{B}(M, t)$  à une date  $t$ . Le dipôle de moment dipolaire variable au cours du temps est orienté sur l'axe  $Oz$ . On a donc  $\vec{p}(t) = p(t)\vec{e}_z$ . On suppose que l'extension physique du dipôle est suffisamment petite pour que sa taille n'intervienne dans aucune question physique au cours des développements qui vont suivre. On peut conserver toute la généralité de l'évolutivité de  $\vec{p}(t)$  mais en fin de calcul, on s'intéressera plus particulièrement au dipôle oscillant harmonique de pulsation  $\omega$  et d'expression  $\vec{p}(t) = p_0 \exp i\omega t \vec{e}_z$ .

Nous utiliserons comme porte d'entrée dans ce calcul le potentiel vecteur  $\vec{A}$  produit par le dipôle. Pour cela, nous allons rappeler la formule de BIOT-SAVART qui donne l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}$  dans le cadre d'une distribution de courant volumique (3D) caractérisée par une densité de courant  $\vec{j}$  en  $A \cdot m^{-2}$  et dans le cadre d'une modélisation filiforme. Nous l'avions déjà cité brièvement dans le cadre de la statique, elle est aussi valable en régime dépendant du temps. On a :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{j \vec{d}\tau(P)}{PM} \quad \text{ou} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i d\vec{\ell}(P)}{PM}$$

### 4.2 Le potentiel vecteur

On peut constater dans les expressions précédentes que c'est l'élément de courant  $d\vec{C} = \vec{j}d\tau$  ou encore  $d\vec{C} = id\vec{\ell}$  qui intervient. La dimension de  $d\vec{C}$  est  $A \cdot m$ . Or, le moment dipolaire est  $\vec{p}$  est du type  $qa$  en  $C \cdot m$ . En fait l'élément de courant correspondant au dipôle est sa dérivée par rapport au temps  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{p}\vec{e}_z$ . Maintenant, il reste un problème à régler en ce qui concerne la question de la date. En effet, l'état des champs en  $M$  à la date  $t$  est fonction de l'état du moment dipolaire à une date antérieure car il faut la durée  $\Delta t = \frac{r}{c}$  pour que l'information se propage de  $O$  jusqu'en  $M$ . C'est donc l'état du moment dipolaire à la date  $t - \frac{r}{c}$  qui va dicter celui des champs en  $M$  à la date  $t$ . Vous ne serez pas surpris de l'expression suivante pour le potentiel vecteur :

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \vec{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

Dans le système des vecteurs de la base sphérique, on a  $\vec{e}_z = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$ . Le potentiel vecteur s'exprime donc par  $\vec{A}(M, t) = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta$  avec le détail suivant :

$$A_r(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad \text{et} \quad A_\theta(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

Comme on peut le comprendre facilement, on parle pour  $\vec{A}(t)$  fonction de  $t - r/c$  de potentiel retardé. On pourrait établir l'expression du potentiel scalaire retardé  $V(M, t)$  grâce à la jauge de LORENTZ  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  mais nous le ferons pas parce que la connaissance de  $V$  n'est pas indispensable pour aboutir.

### 4.3 Le champ magnétique

Nous avons vu que c'est l'équation locale de conservation du flux  $\text{div} \vec{B} = 0$  qui est à l'origine de la relation entre le champ magnétique et le potentiel vecteur  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ . Pour progresser, il est indispensable de posséder un formulaire donnant le rotationnel en coordonnées sphériques sachant que l'on doit calculer  $\text{rot} [A_r(r, \theta, t)\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, t)\vec{e}_\theta] = \vec{B}$ . On peut constater dans le formulaire que seuls deux termes subsistent sur les 6. On a  $\text{rot} \vec{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$ . On constate que  $\vec{B} = B_\varphi\vec{e}_\varphi$ , il ne possède qu'une seule composante. C'est logique avec les symétries de la distribution de courant qui est constitué par le dipôle  $\vec{p} = p\vec{e}_z$ . En effet, le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est un plan symétrie donc  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan. On peut déjà prévoir qu'a priori  $\vec{E}$  sera contenu, lui, dans ce plan et présentera deux composantes en général  $\vec{E} = E_r(r, \theta, t)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, t)\vec{e}_\theta$ .

Commençons le calcul par  $-\frac{dA_r}{d\theta} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \dot{p}(t - \frac{r}{c})$ . De la même façon on a  $\frac{d(rA_\theta)}{dr} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c})$ . On arrive alors à l'expression suivante du rotationnel :

$$\vec{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \left[ \frac{1}{r^2} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{rc} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$$

Il est plus intéressant pour l'expression du champ magnétique de factoriser  $r^2$  au dénominateur pour aboutir à :

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \left[ \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$$

#### 4.4 Le champ électrique

Nous allons utiliser l'équation de MAXWELL-AMPÈRE dans le vide  $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Toujours avec le secours d'un formulaire, on trouve  $\vec{rot} B_\varphi(r, \theta, t) \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta B_\varphi)}{\partial \theta} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} \vec{e}_\theta$ . On trouve, dans un premier temps, que  $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta B_\varphi)}{\partial \theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\mu_0 \sin \theta \cos \theta}{4\pi r^2} \left[ \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$ . En divisant cette expression par  $\mu_0 \varepsilon_0$ , on arrive à  $\frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \left[ \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$ . On peut donc intégrer par rapport au temps en l'absence de champ électrostatique pour aboutir à :

$$E_r = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \left[ p(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$$

Calculons maintenant l'autre composante en commençant par  $r B_\varphi = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left[ \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$ . On a donc  $\frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \left[ \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right] + \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left[ -\frac{1}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) - \frac{r}{c^2} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$ . Cette expression se simplifie un peu, cela permet d'écrire  $-\frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r^3} \left[ \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r^2}{c^2} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$ . Cela donne  $\frac{\partial E_\theta}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \left[ \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r^2}{c^2} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$ . En intégrant sans champ statique, on obtient :

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \left[ p(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{r^2}{c^2} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$$

Nous avons bien trouvé un champ électrique avec deux composantes  $\vec{E} = E_r(r, \theta, t) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, t) \vec{e}_\theta$ .

#### 4.5 Dipôle harmonique

On considère un dipôle monochromatique oscillant à la pulsation  $\omega$  de la forme  $\vec{p} = \vec{e}_z p_0 \exp i\omega t$ . Nous avons besoin du moment dipolaire évalué à la date  $t - \frac{r}{c}$ , on a  $p(t - \frac{r}{c}) = p_0 \exp i(\omega t - \frac{\omega r}{c})$ . N'oublions pas que nous sommes dans le vide et que la propagation est régie par la relation de dispersion des ondes de D'ALEMBERT pour des ondes sans limitation d'extension spatiale. La relation de dispersion est  $k = \frac{\omega}{c}$ , on utilise donc le vecteur d'onde  $k$  pour écrire que  $p(t - \frac{r}{c}) = p_0 \exp i(\omega t - kr)$ . Avec  $\dot{p} = i\omega p$  et  $\ddot{p} = -\omega^2 p$ , on peut exprimer les composantes des champs électrique et magnétique :

$$\begin{cases} \vec{B}(M, t) = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\sin \theta}{r^2} (i\omega) \left[ 1 + \frac{i\omega r}{c} \right] \exp i(\omega t - kr) \\ \vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} p_0 \left( \vec{e}_r \frac{2 \cos \theta}{r^3} \left[ 1 + \frac{i\omega r}{c} \right] + \vec{e}_\theta \frac{\sin \theta}{r^3} \left[ 1 + \frac{i\omega r}{c} - \frac{r^2 \omega^2}{c^2} \right] \right) \exp i(\omega t - kr) \end{cases}$$

### 4.5.1 Analyse des résultats

On peut constater que les expressions des composantes des champs font intervenir des débuts de développements en série d'un terme du type  $\frac{i\omega r}{c}$ . Mais  $\frac{r}{c} = \Delta t$  est la durée de propagation que met l'onde pour partir de  $O$  et aller en  $M$ . Si  $T$  est la période du régime harmonique du dipôle, on peut réécrire ce terme selon  $\frac{i\omega r}{c} = i2\pi \frac{\Delta t}{T}$ . Si on privilégie la longueur d'onde, on écrit  $\frac{i\omega r}{c} = ikr = i2\pi \frac{r}{\lambda}$ . Nous allons ensuite distinguer deux situations de comparaison, la durée de propagation est négligeable devant  $T$  ou bien  $\Delta t \gg T$ .

### 4.5.2 Zone statique

Lorsque la durée de propagation est négligeable  $\Delta t \ll T$  ce qui veut encore dire que  $r \ll \lambda$  ou  $r\omega \ll c$ , on peut écrire que  $1 + \frac{i\omega r}{c} \simeq 1$  et a fortiori  $1 + \frac{i\omega r}{c} - \frac{r^2\omega^2}{c^2} \simeq 1$ . L'expression du champ électrique  $\vec{E}$  prend la forme que nous avons déterminée dans l'étude du dipôle électrostatique. Pour le champ magnétique, la situation est un peu plus délicate à appréhender parce que nous ne l'avons pas étudié auparavant. On peut remplacer  $\mu_0$  dans l'amplitude du champ magnétique pour mettre en évidence  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \sin\theta}{c} \frac{i\omega r}{r^3} \frac{i\omega r}{c}$ . On peut considérer le champ magnétique comme peu influant par conséquent. Dans la zone statique, les expressions des champs sont :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} (2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta) \exp i\omega t \\ \vec{B}(M, t) = \frac{1}{c} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} \sin\theta \exp i\omega t \left( \frac{i\omega r}{c} \right) \vec{e}_\varphi \simeq \vec{0} \end{cases}$$

### 4.5.3 Zone de rayonnement

C'est la situation étudiée dans le cadre du programme, on a  $\Delta t \gg T$  et  $r \gg \lambda$  ou encore  $r\omega \gg c$ . On ne conserve que le terme de plus haut rang pour les composantes du champ électrique et du champ magnétique. On va retrouver les résultats utilisés dans les paragraphes précédents :

$$\begin{cases} \vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_0}{c} \frac{\sin\theta}{r} \omega^2 \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi \\ \vec{E}(M, t) = \left[ -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\sin\theta}{r} \omega^2 \vec{e}_\theta + \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{2 \cos\theta}{r} \omega^2 \left( \frac{ic}{r\omega} \right) \vec{e}_r \right] \exp i(\omega t - kr) \end{cases}$$

En considérant la condition  $\omega r \gg c$ , on peut terminer sur le système utilisé dans le cadre du programme :

$$\begin{cases} \vec{B}(M, t) = -\frac{1}{c} \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\sin\theta}{r} \omega^2 \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi \\ \vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\sin\theta}{r} \omega^2 \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Les approximations réalisées permettent bien d'affirmer, localement, que l'onde électromagnétique est plane et vérifie la relation de structure :

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge E_\theta \vec{e}_\theta$$