Représentation de signaux sinusoïdaux

L'étude du régime sinusoïdal est très importante par les applications qu'elle possède puisque la tension et le courant domestique sont de forme sinusoïdale à la fréquence de 50 Hz. Toutefois, de nombreuses tensions et intensités sont variables ou alternatives sans être de forme sinusoïdale. C'est le cas des basses tensions dans le domaine de l'électronique ou bien dans celui des télécommunications. L'étude du régime sinusoïdal se comprend, pour ces signaux, en lien avec la théorie des séries et des intégrales de FOURIER. Cette théorie dit que tout signal, sous réserve de quelques propriétés mathématiques non contraignantes en général, peut se présenter sous la forme d'une série ou d'une intégrale de FOURIER. Aussi, il est indispensable d'être à l'aise avec la conduite des calculs sur des grandeurs sinusoïdales. Il y a plusieurs procédures plus ou moins pratiques en fonction du contexte.

1 Représentation réelle

1.1 Une grandeur sinusoïdale

La représentation réelle d'une grandeur sinusoïdale (ici une tension) est de la forme :

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où U_0 est la valeur moyenne du signal, $U_m > 0$ son amplitude, $\omega = 2\pi f$ sa pulsation et $\omega t + \varphi$ sa phase avec en particulier φ sa phase à l'origine des dates. φ est évaluée dans un intervalle de 2π en général, soit $[0, 2\pi]$, soit $[-\pi, \pi]$. La tension $u(t)$ est représentée sur le schéma de la figure 1.

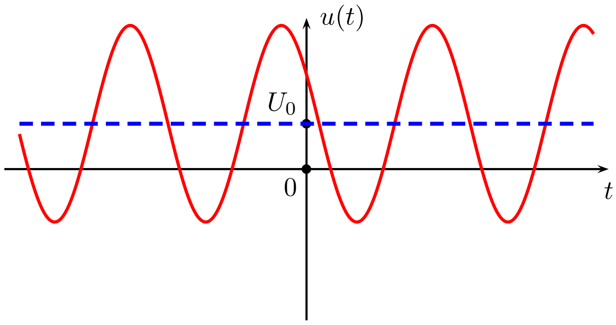

FIGURE 1 – Un signal sinusoïdal

La tension sinusoïdale étant périodique de période $T = 2\pi/\omega$, elle est caractérisée par sa moyenne U_0 et son amplitude U_m telles que :

$$< u(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad u_{max} = U_0 + U_m \qquad \text{ainsi que} \qquad u_{min} = U_0 - U_m$$

où t_0 est une date quelconque. Effectuons le calcul de sa moyenne :

1.2 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

On considère deux tensions sinusoïdales synchrones de valeurs moyennes nulles mais déphasées. On note $u_1(t) = U_{m1} \cos \omega t$ et $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi)$. À la date $t = 0$, la tension $u_1(t)$ possède une phase nulle, on dit qu'elle sert de *référence des phases*. La tension $u_2(t)$ est donc déphasée par rapport à $u_1(t)$, voir la représentation de ces deux tensions sur le schéma de la figure 2 réalisée pour $\varphi > 0$.

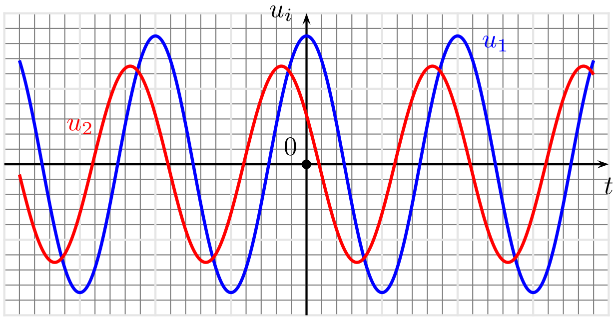

FIGURE 2 – Tensions sinusoïdales déphasées

Sur la figure 2, on constate que la tension $u_2(t)$ passe par son maximum avant la tension $u_1(t)$. Pour déterminer le sens du déphasage, on cherche toujours le plus petit intervalle entre deux maximums par exemple ou bien entre deux passages par 0 dans le même sens (croissant ou décroissant). Cela nous amène à constater que si nous concentrons notre attention sur le passage par son maximum de $u_1(t)$ à la date $t = 0$, on voit que $u_2(t)$ est passée à son maximum à une date légèrement négative donnée par $\omega t + \varphi = 0$, donc pour $t = -\varphi/\omega < 0$. On dit que $u_2(t)$ est *en avance* sur $u_1(t)$. On estimera le déphasage entre les deux tensions en degrés.

1.3 Addition de deux grandeurs sinusoïdales

L'objectif est d'additionner les deux grandeurs sinusoïdales du paragraphe précédent et de mettre le résultat sous une forme synthétique :

$$U_{m1} \cos \omega t + U_{m2} \cos(\omega t + \varphi) = u_s(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$$

Toute la question est d'arriver à exprimer U_m et ψ en fonction des caractéristiques des deux grandeurs sinusoïdales. On pourra se reposer sur les formules suivantes de la trigonométrie :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \text{et} \qquad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

2 Représentation par le vecteur de Fresnel

2.1 Vecteur tournant de Fresnel

On peut aussi figurer une tension sinusoïdale comme un vecteur tournant dans le plan Oxy à la vitesse de rotation ω, dans le sens trigonométrique. La projection de ce vecteur sur l'axe Ox fait intervenir le cosinus de l'angle situé entre le vecteur et l'axe Ox si l'on a pris la précaution de le définir comme origine des angles. Dans ces conditions, on peut effectuer à une date donnée une représentation sur un schéma assez synthétique de plusieurs grandeurs sinusoïdales d'un problème donné. Très souvent, la représentation proposée est effectuée à la date $t = 0$ mais il n'est pas indispensable que cela soit le cas, il suffit que toutes les grandeurs sinusoïdales soient représentées à la même date, voir le schéma de la figure 3. On rappelle que $u_1(t) = U_{m1} \cos \omega t$ et $u_2(t) = U_{m2} \cos (\omega t + \varphi)$.

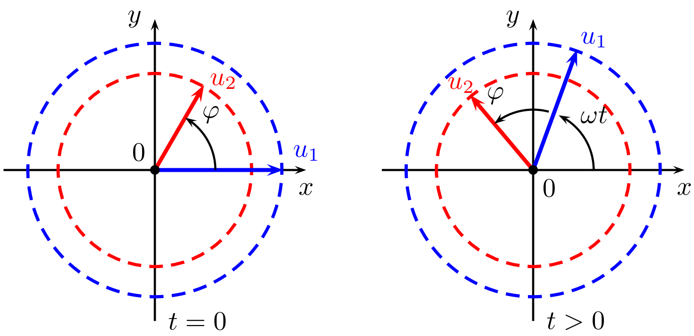

FIGURE 3 – Représentation de FRESNEL

Sur cette représentation, on perçoit mieux le fait que la tension $u_2(t)$ est *en avance* sur la tension $u_1(t)$. L'intérêt de cette figure est que l'on peut par des moyens géométriques classiques (somme de vecteurs) réaliser la somme de plusieurs grandeurs sinusoïdales sans avoir à recourir aux formules de la trigonométrie. Imaginons que l'on doive additionner $u_1(t)$ et $u_2(t)$ pour former $u_s(t) = u_1(t) + u_2(t)$, on réalisera alors la construction de la figure 4.

2.2 Addition

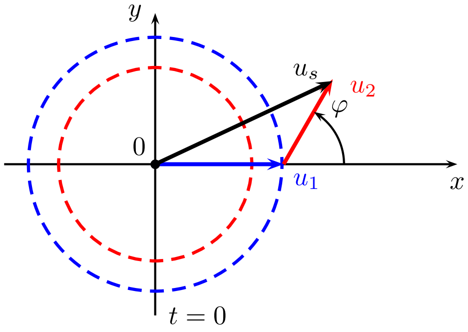

FIGURE 4 – Addition de deux vecteurs de FRESNEL

Nous pouvons écrire la somme de ces deux tensions en utilisant soit les règles du calcul de trigonométrie, soit les règles de la géométrie des triangles rectangles et en particulier le théorème de PYTHAGORE.

3 Représentation complexe

3.1 Expression complexe

La situation précédente nous amène à comprendre que la notation complexe qui utilise le plan complexe Oxy où l'on représente les parties réelles sur l'axe Ox et les parties imaginaires sur l'axe Oy peut être très efficace. Comme on le verra ensuite, les calculs seront nettement simplifiés.

La représentation complexe associe à une tension sinusoïdale de moyenne nulle $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi)$ la représentation complexe :

$$\underline{u}_2(t) = U_{m2} \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{U}_{m2} \exp j\omega t$$

où $\underline{U}_{m2} = U_{m2} \exp j\varphi$ est l'amplitude complexe associée à la tension $u(t)$. Il est très pratique d'utiliser cette notation sachant que $\exp j\varphi = \cos\varphi + j \sin\varphi$.

3.2 Addition

4 Multiplication de signaux sinusoïdaux

4.1 Constat

Lorsque l'on multiplie deux grandeurs sinusoïdales comme $u_1(t) = U_{m1}\cos\omega t$ et $u_2(t) = U_{m2}\cos(\omega t+\varphi)$, on doit utiliser la règle suivante :

$$\cos p\,\cos q = \frac{1}{2}\left[\cos(p+q)+\cos(p-q)\right]$$

En utilisant cette formule et sans oublier le fait que la fonction cosinus est paire, on arrive à :

$$u_1(t)u_2(t) = \frac{U_{1m}U_{2m}}{2}\left[\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi\right]$$

Si l'on effectue le produit des deux représentations complexes associées aux signaux précédents, on arrive à une expression qui ne peut en aucun cas constituer une représentation complexe juste du produit réel précédent. Les deux grandeurs réelles présentées ont pour représentation complexe : $\underline{u}_1(t) = U_{m_1}\exp j\omega t$ et $\underline{u}_2(t) = U_{m2}\exp j(\omega t+\varphi)$. Leur produit est donc :

$$\underline{u}_1(t)\,\underline{u}_2(t) = U_{m1}U_{m2}\exp j(2\omega t+\varphi)$$

La notation complexe est utilisée pour faciliter les opérations de calculs et ensuite, on revient aux grandeurs réelles qui ont du sens physique, en prenant la partie réelle ou encore en s'intéressant au module et à l'argument. Avec la multiplication précédente, aucune des possibilités de retour en réels n'est satisfaisante. Par exemple :

$$\Re(\underline{u}_1(t)\,\underline{u}_2(t)) = U_{m1}U_{m2}\cos(2\omega t+\varphi)$$

Il est tout à fait évident qu'il manque le terme en $\cos\varphi$ ainsi que le facteur $1/2$!

4.2 Conclusion

Pour toutes les opérations qui vont engager le produit de deux grandeurs sinusoïdales, on privilégiera les expressions réelles. Cela est très fréquent en Physique car de nombreuses grandeurs énergétiques sont des grandeurs produits comme $\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{1}{2}Cu^2$, $\frac{1}{2}Li^2$, $\frac{1}{2}kx^2$ et aussi, comme nous le démontrerons plus loin, la puissance en électricité qui est $p(t) = u(t)\,i(t)$. Nous verrons plus loin que l'on pourra toutefois utiliser les complexes pour déterminer la valeur moyenne d'un produit de deux grandeurs sinusoïdales à condition de bien retenir la formule adaptée.

4.3 Moyennes

4.3.1 Sinus et cosinus

Sur le graphique de la figure 5, on a représenté $u_1(t) = U_m \cos\omega t$, $u_3(t) = U_m \sin\omega t$ de période $T = 2\pi/\omega$ ainsi que $u_2(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ en pointillés.

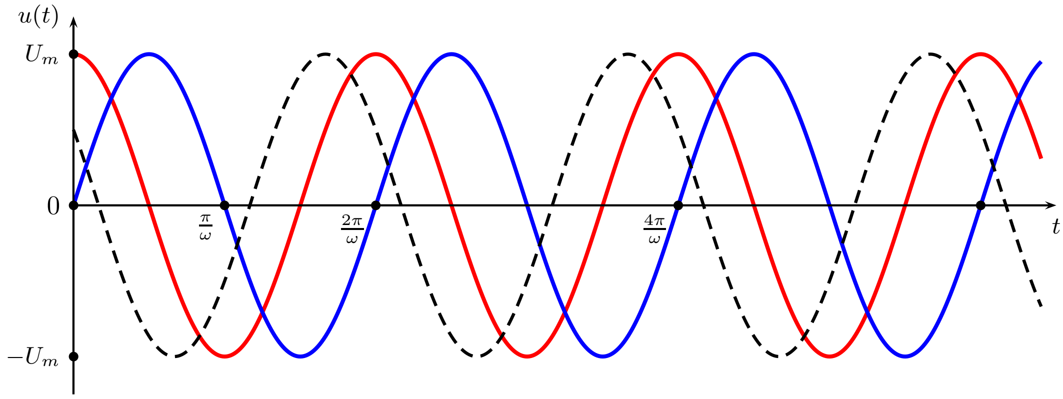

FIGURE 5 – Sinus et cosinus

Le calcul général de la moyenne d'une fonction $u(t)$ quelconque est donné par la définition suivante où l'on précise les dates entre lesquelles on calcule la moyenne. Ici, on a choisi les dates $t_i = t_0$ et $t_f = t_0 + \Delta t$ avec $\Delta t > 0$:

$$\langle u(t) \rangle = \overline{u(t)} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour une grandeur sinusoïdale, il est opportun en Physique de calculer la moyenne sur une période T. En effet, le calcul n'a de sens physique que sur une grande durée. Par conséquent, sur un grand intervalle de temps $\Delta t = nT + \tau$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\tau < T$ et donc $nT \gg \tau$, le calcul revient à celui effectué sur une période T complété par une modeste contribution liée à τ :

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{nT + \tau} \int_{t_0}^{t_0+nT+\tau} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{nT + \tau} \left(\int_{t_0}^{t_0+nT} u(t)\,\mathrm{d}t + \int_{nT}^{nT+\tau} u(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

Si l'on prend en compte le fait que la fonction est périodique à savoir $\int_{t_0}^{t_0+nT} u(t)\,\mathrm{d}t = n \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t$ que la durée de calcul avec $n \gg 1$ peut être approximée selon $nT + \tau \simeq nT$, on en déduit que :

$$\langle u(t) \rangle \simeq \frac{n}{nT} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{nT} \int_0^{\tau} u(t)\,\mathrm{d}t \simeq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t$$

4.3.2 Carré d'une grandeur sinusoïdale

Comme nous l'avons évoqué, les calculs d'énergie moyenne, de puissance moyenne, vont nécessiter de calculer des moyennes. On aura à calculer par exemple des moyennes de termes comme $f(t) = U_m^2 \cos^2 \omega t$, comme $g(t) = U_m^2 \sin^2 \omega t$ ou bien encore comme $h(t) = U_m^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t$. On sait que $f(t)$ et $g(t)$ sont positifs et compris entre 0 et U_m^2. On peut prendre le risque de proposer une valeur pour leur moyenne. . . en observant le graphique de la figure 6.

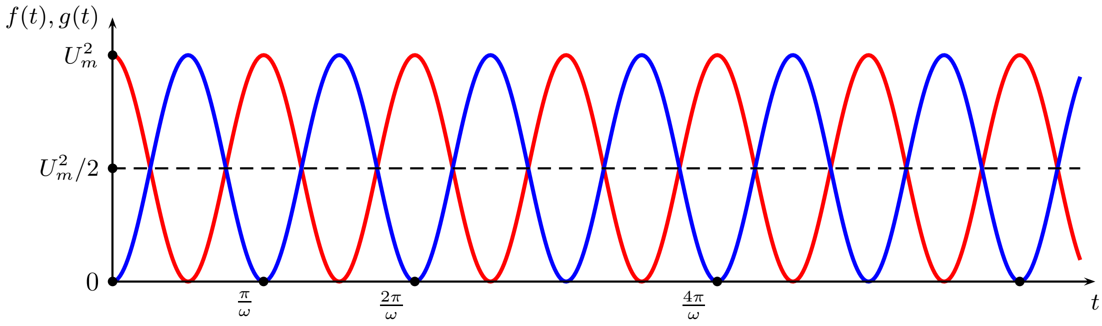

FIGURE 6 – Sinus carré et cosinus carré

On constate sur la figure que la période de $\cos^2 \omega t$, comme elle de $\sin^2 \omega t$ est $\dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{T}{2}$. Pour démontrer le fait que $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \dfrac{1}{2}$, il faut passer par les relations permettant de linéariser ces carrés. On utilisera en particulier :

$$\cos(a + b) = cosa \cos b - \sin a \sin b \quad \text{ce qui donne aussi} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

4.3.3 Produit de deux sinusoïdes déphasées

Pour le produit $h(t) = U_m^2 \cos(\omega t + \varphi)\, \cos \omega t$. Il faut déjà comprendre que la valeur moyenne va dépendre de la valeur de ϕ comme on peut le comprendre en étudiant le graphique de la figure 7.

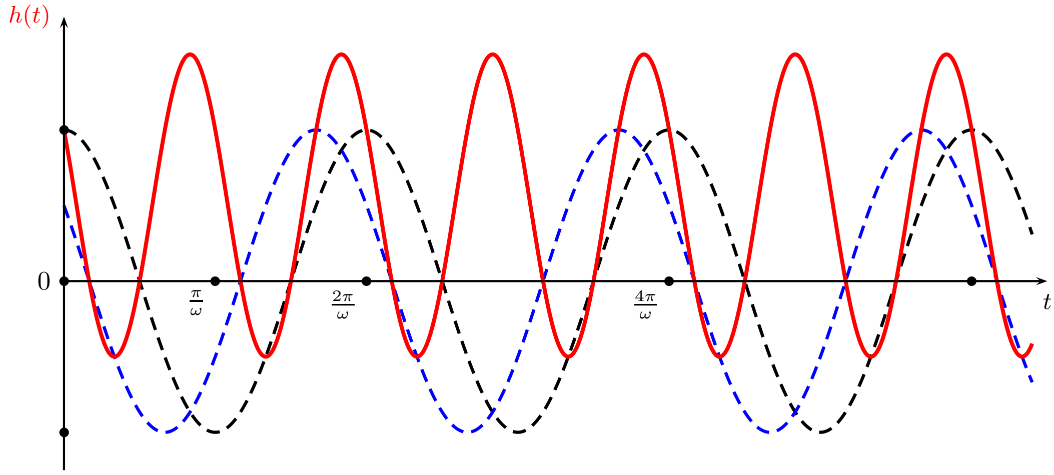

FIGURE 7 – Produit $h(t) = U_m^2 \cos(\omega t + \varphi)\, \cos \omega t$

Pour effectuer le calcul de la moyenne, on va utiliser la formule permettant la linéarisation déjà vue avant :

$$\cos \omega t\, \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi\right]$$

4.3.4 Moyenne en utilisant les complexes

On considère un signal périodique produit de deux signaux sinusoïdaux synchrones déphasés : $h(t) = f(t)g(t)$ avec $f(t) = F_0 \cos \omega t$ et $g(t) = G_0 \cos(\omega t + \varphi)$. La moyenne temporelle de $h(t)$ est définie par :

$$\langle h(t) \rangle = \langle f(t)g(t) \rangle = \frac{F_0 G_0}{2} \cos \varphi$$

d'après les calculs effectués avant.

On peut utiliser la notation complexe pour obtenir la moyenne de ce produit, c'est rapide et pratique mais il faut être vigilant pour ne pas retenir un résultat erroné et l'appliquer à tort et à travers. On note $\underline{f}(t) = F_0 \exp j\omega t$ et $\underline{g}(t) = G_0 \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{G_0} \exp j\omega t$ avec $\underline{G_0} = G_0 \exp j\varphi$ l'amplitude complexe de $\underline{g}(t)$. La valeur moyenne du produit $h(t) = f(t)g(t)$ s'exprime aussi en fonction des grandeurs complexes associées :

$$\langle h(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\underline{f}(t)\, \underline{g}^*(t) \right]$$

où $\underline{g}^*(t) = G_0 \exp -j(\omega t + \varphi)$ est le complexe conjugué de $\underline{g}(t)$.

5 Notes personnelles