

Effet de réseau

L'intensité lumineuse $\mathcal{I}(\theta)$ diffractée par un réseau se met toujours sous la forme d'un produit faisant intervenir la diffraction par un des motifs du réseau représentée par la fonction $\mathcal{D}(\theta)$ et la fonction d'interférences entre toutes les ondes dues à l'ensemble des motifs du réseau représentée par $\mathcal{R}(\theta)$. On considère un réseau plan éclairé par un faisceau de rayons parallèles en incidence normale. On étudie la diffraction à l'infini dans l'angle d'émergence θ mesuré par rapport à la normale au miroir, voir la figure 1. On note e la taille de chaque motif qui diffracte la lumière, le réseau comporte N motifs disposés régulièrement avec comme période la distance a , le pas du réseau. La longueur d'onde de la lumière monochromatique utilisée est λ .

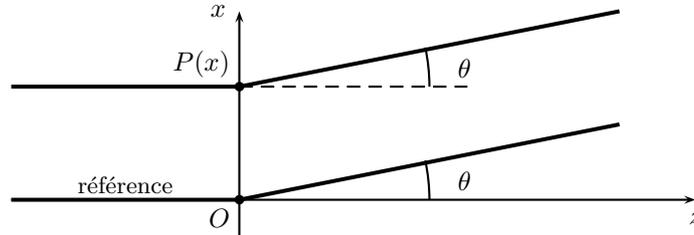


FIGURE 1 – Conditions d'étude de la diffraction

Dans ces conditions, la formule donnant l'expression de l'intensité lumineuse diffractée est :

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathcal{I}_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi e \sin \theta}{\lambda} \left(\frac{\sin \frac{N \pi a \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

où la fonction de diffraction est $\mathcal{D}(\theta) = \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi e \sin \theta}{\lambda}$ et la fonction d'interférences $\mathcal{R}(\theta) = \left(\frac{\sin \frac{N \pi a \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$.

1 Diffraction par un motif

1.1 Indicatrice d'intensité

L'indicatrice d'intensité est la courbe polaire $\mathcal{I}(\theta)$ dans le plan Ozx qui permet de percevoir directement les directions dans lesquelles est diffractée de façon plus ou moins importante la lumière. Pour un angle θ donné, la longueur du segment évaluée depuis le point O jusqu'à un point de la courbe représente l'intensité lumineuse $\mathcal{I}(\theta)$. Les représentations qui suivent sont effectuées pour $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. Dans le cas d'un éclairage normal, les fonctions $\mathcal{D}(\theta)$ et $\mathcal{R}(\theta)$ sont paires en θ , les indicatrices seront donc symétriques par rapport à $\theta = 0$ qui est la direction de la lumière incidente.

1.2 Diffraction par une fente unique

On représente sur la figure 2 l'intensité \mathcal{I} en fonction du paramètre θ de façon traditionnelle. L'indicatrice d'intensité lumineuse est représentée sur la figure 3. Elle correspond à la fonction polaire $\mathcal{I}(\theta) = \mathcal{I}_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi e \sin \theta}{\lambda}$.

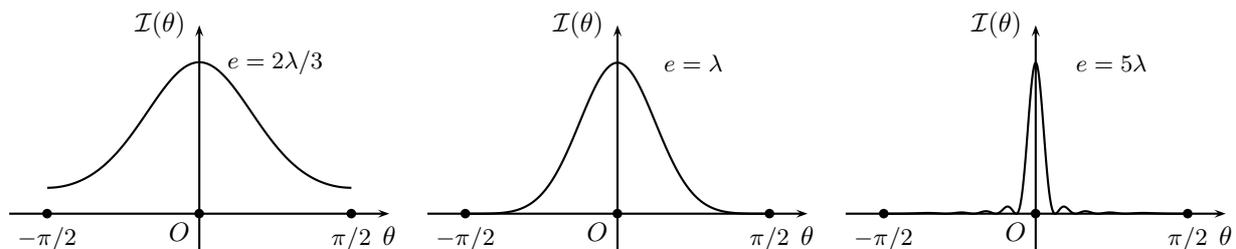


FIGURE 2 – Intensité diffractée par une fente unique

Ces courbes confirment le fait que la diffraction devient un phénomène d'autant plus sensible que la taille de l'objet qui diffracte se rapproche de la valeur de la longueur d'onde. Dès que $e \gg \lambda$, la lumière se concentre dans la direction d'éclairage, qui est ici $\theta = 0$, c'est la direction prévue par l'optique géométrique. Dans les deux

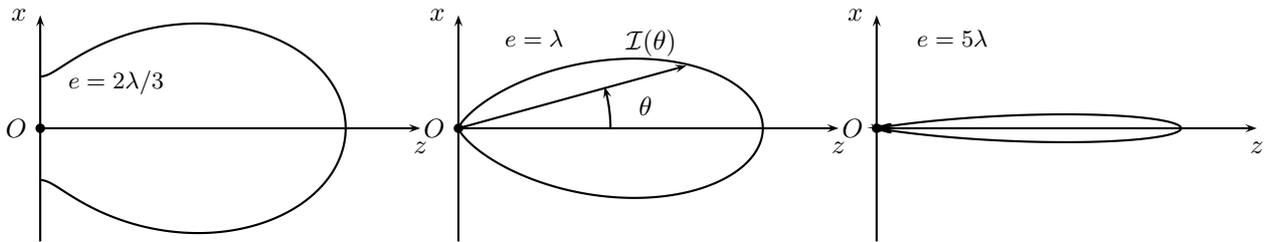


FIGURE 3 – Indicatrice d'intensité due à la diffraction par une fente unique

cas où $e = 2\lambda/3$ ou $e = \lambda$, on voit que le maximum principal reste obtenu pour $\theta = 0$ mais qu'il y a pas mal de lumière diffractée dans d'autres directions. En particulier dans le cas $e = 2\lambda/3$, on voit que l'intensité lumineuse obtenue pour $\theta = \pi/2$ vaut environ $1/5$ de l'intensité maximale pour $\theta = 0$.

2 Interférences dues à deux motifs

On considère ici deux motifs qui sont responsables d'interférences. La largeur de chaque motif est e et la distance séparant les deux motifs est a . L'intensité lumineuse obtenue est représentée sur la figure 4. Les indicatrices d'intensité sont représentées sur la figure 5. La formule donnant l'intensité peut s'écrire $\mathcal{I}(\theta) = \mathcal{I}_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi e \sin \theta}{\lambda} \cos^2 \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$. Lorsque $e \rightarrow 0$, l'intensité diffractée ne dépend plus de θ puisque $\mathcal{D}(\theta) = 1$. La diffraction est telle qu'on ne prend plus en compte dans la formule de l'éclairement la fonction $\mathcal{D}(\theta)$.

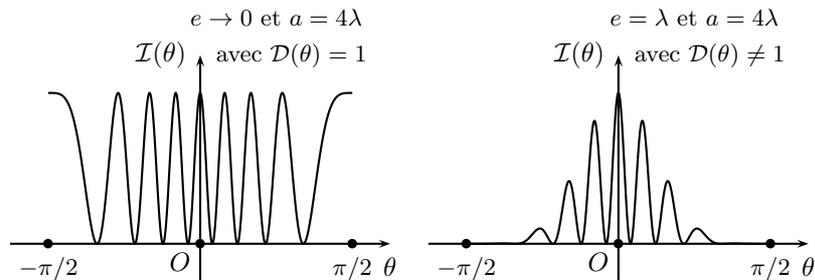


FIGURE 4 – Intensité diffractée par deux motifs

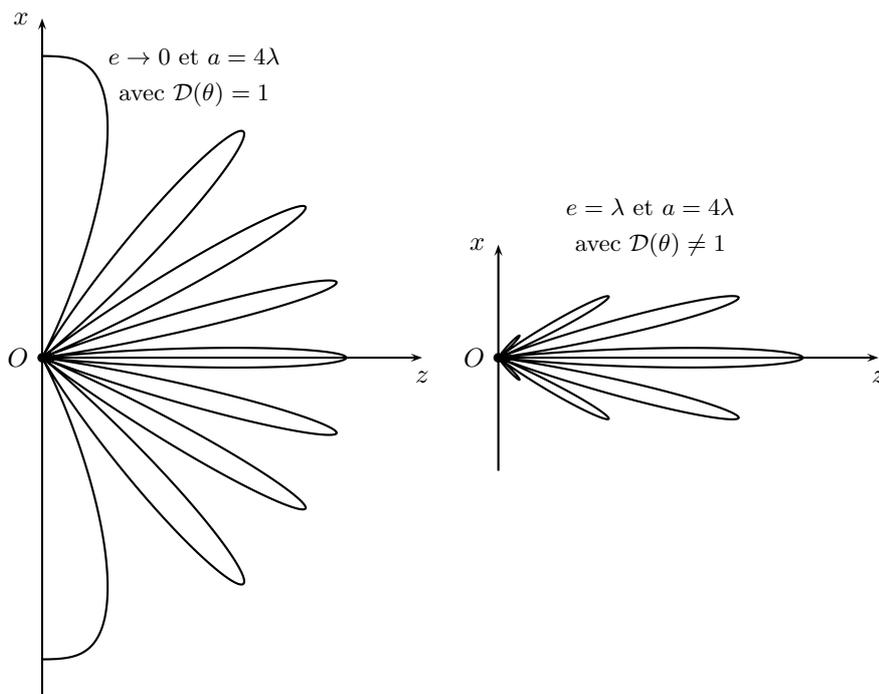


FIGURE 5 – Indicatrice d'intensité dans le cas des interférences dues à deux motifs

Si on ne prend pas en compte l'effet de $\mathcal{D}(\theta)$, on constate qu'il y a 9 franges brillantes perceptibles. Par

contre. En tenant de la diffraction (par un seul motif) non uniforme due au terme $\mathcal{D}(\theta)$ - ce qui correspond à la situation physique réelle -, on voit qu'il n'y aura plus que 5 franges brillantes visibles. Ces 5 franges n'ont pas la même intensité. Plus on s'éloigne du maximum de la fonction de diffraction pour $\theta = 0$, plus l'intensité lumineuse sera faible et la frange brillante plus difficile à percevoir.

3 Le réseau

3.1 Fonction de réseau

On utilise un réseau qui possède un nombre N de motifs diffractant la lumière, la taille des motifs est e , le pas du réseau est a . La formule donnant l'intensité peut s'écrire $\mathcal{I}(\theta) = \mathcal{I}_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi e \sin \theta}{\lambda} \left(\frac{\sin \frac{N\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$.

Afin de pouvoir comparer avec la situation précédente, on a représenté une intensité ramenée à la même valeur maximale. Sur les graphiques, on voit en fait $\mathcal{I}' = \frac{\mathcal{I}(\theta)}{N^2}$. L'intensité diffractée par le réseau est représentée sur la figure 6. Les indicatrices d'intensité sont représentées sur la figure 7.

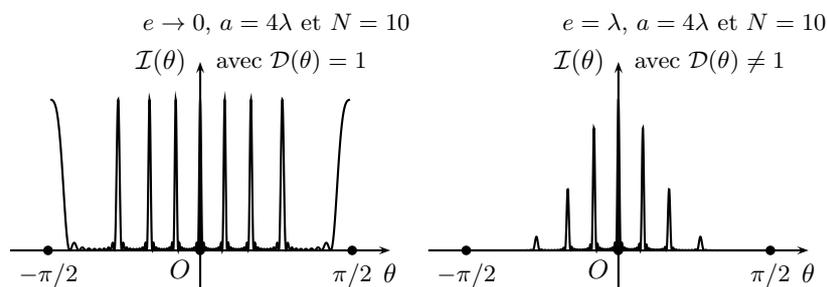


FIGURE 6 – Intensité diffractée par le réseau

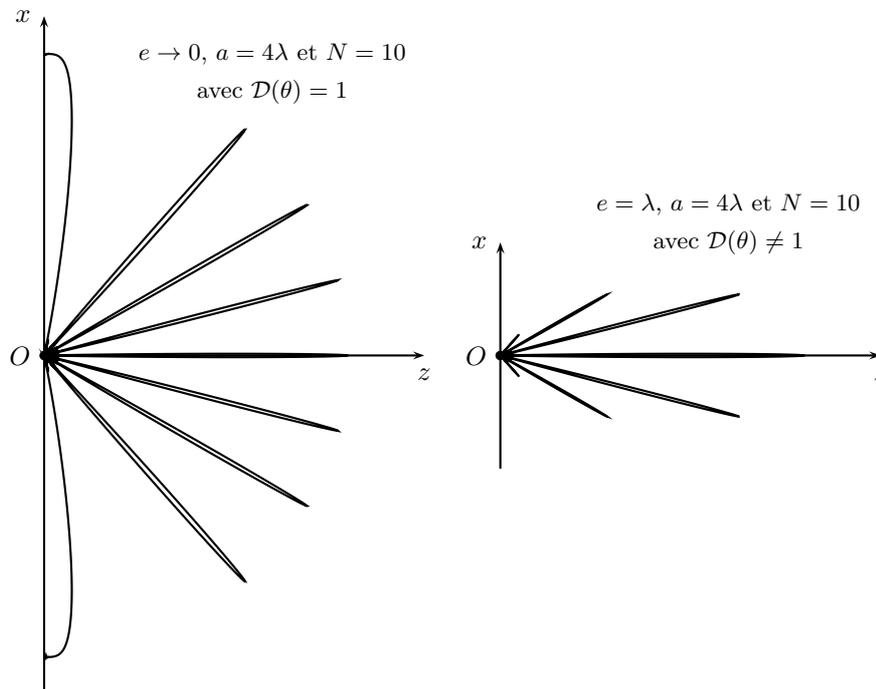


FIGURE 7 – Réseau

On constate sur la figure 7 que le nombre des franges brillantes ne change pas, ni leur position par rapport au cas des interférences à deux motifs. Par contre, la largeur de la frange brillante est nettement réduite. Le réseau concentre la lumière dans les ordres entiers.

3.2 Pouvoir de résolution du réseau

Dans l'étude précédente du paragraphe 3.1, les calculs sont effectués avec $N = 10$ ce qui ne correspond pas du tout à l'ordre de grandeur de motifs utilisés dans les réseaux. En effet, on a très vite N compris entre 1 000 et 10 000. L'effet de réseau correspond à une très forte concentration de la lumière dans les ordres entiers (ou dans les franges brillantes) au détriment des intensités intermédiaires entre les franges brillantes et les franges sombres. Cela est extrêmement utile pour le physicien qui veut séparer deux composantes spectrales $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$ avec $\Delta\lambda \ll \lambda$. On rappelle que le pouvoir de résolution du réseau est donné par la formule :

$$\mathcal{PR} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = pN$$

où p est l'ordre d'interférence utilisé et N le nombre total de motifs diffractant la lumière du réseau.

4 Un réseau pharaonique

Inauguré en mars 2013, le radiotélescope ALMA (Atacama Large Millimeter Array) est constitué par un réseau de 66 antennes. Ces antennes sont conçues pour détecter le rayonnement émis dans l'Univers dans les longueurs d'ondes du domaine des radiofréquences d'où son nom de radiotélescope. Les longueurs d'ondes observées sont celles de l'intervalle $\lambda \in [0, 3 \text{ mm}; 9, 6 \text{ mm}]$. Cet observatoire a été réalisé par trois grands organismes de recherche : l'Observatoire européen austral (ESO), l'Observatoire national de radioastronomie (NRAO) américain et l'Observatoire astronomique national du Japon (NAOJ). Il a été conçu pour détecter avec une précision record les systèmes planétaires en formation et les premières galaxies, voir la photographie générale du site où il est installé à la figure 8. Tous les radiotélescopes ne sont pas encore installés comme on peut le voir sur la photographie. Ce réseau n'est pas constitué par une structure périodique, il ne correspond pas aux développements théoriques précédents.



FIGURE 8 – The array of ALMA antennas is located in the Chilean Andes, on the Chajnantor Plateau, near the border with Bolivia and Argentina, at an altitude of 5 000 metres above sea level. ©ALMA (ESO/NAOJ/NRAO)

Ce réseau a été installé à haute altitude (5 100 m) pour éviter l'absorption du signal lumineux par la vapeur d'eau atmosphérique car le site choisi est un des plus sec au monde. Les radiotélescopes sont installés sur des socles en béton et peuvent être déplacés en fonction du type d'étude souhaité. 192 socles en béton ont été prévus pour recevoir les 66 antennes. Chaque antenne a été conçue pour résister aux risques sismiques de la région. Voir la photographie de la figure 9.



FIGURE 9 – The new ALMA radio telescope is now fully operational. It has been inaugurated on 13 March 2013 in the Chilean Andes. The Atacama Large Millimeter/submillimeter Array (ALMA) is a partnership between Europe, North America and East Asia in cooperation with the Republic of Chile. ALMA is the largest ground-based astronomical observatory in existence. It is so huge that no single country could have afforded such an astronomical tool alone. ©ALMA (ESO/NAOJ/NRAO)

Les antennes de 12 m de diamètre sont composés de 120 panneaux en nickel ajustés avec une précision de $25\ \mu\text{m}$. L'amplitude des variations de température locale entre le jour et la nuit (photographie de la figure 10) atteignent régulièrement $40\ ^\circ\text{C}$ et la présence régulière de vent ont été pris en compte pour assurer la meilleure résolution angulaire possible puisqu'elle sera de $0,01''$ d'arc contre $0,30''$ actuellement pour la meilleure résolution (radiotélescope du plateau de Bure 2250 m Hautes Alpes - France).



FIGURE 10 – Fifty-four 12-metre and twelve smaller 7-metre dish antennas of the ALMA array work together as a single telescope. Each antenna collects radiation coming from space and focuses it onto a receiver. The 66 ALMA antennas can be arranged in different configurations, where the maximum distance between antennas can vary from 150 metres to 16 kilometres. ©ALMA (ESO/NAOJ/NRAO)

Les images des galaxies obtenues seront d'une précision inégalée non seulement en raison de la structure des antennes formant le réseau mais aussi par le traitement des données enregistrées, voir la photographie de la figure 11. Il va être nécessaire de synchroniser à mieux à la femtoseconde (10^{-15} s) les signaux reçus de chaque antenne. Le calculateur réalisant ces opérations doit effectuer un peu plus de 10^{16} opérations par seconde. Le coût final de cet immense radiotélescope est de l'ordre d'un milliard d'euros réparti entre l'Europe, les États-Unis et le Japon.



FIGURE 11 – The ALMA radio telescope studies light from some of the coldest objects in the Universe. This light has wavelengths of around a millimetre, between infrared light and radio waves. For astrophysicists, ALMA opens a window on the ‘cold’ universe like early galaxies, clouds of gas and dust where stars and planetary systems are born, or even the chemistry of the interstellar medium. On this picture, one can see a spiral structure of matter surrounding the R. Sculptoris star. ©ALMA (ESO/NAOJ/NRAO)

5 Autres réseaux

5.1 Capteurs d'images

Sur l'image de la figure 12, on peut voir la structure périodique bi-dimensionnelle d'un capteur d'images constitué de petites cellules (les fameux pixels...) des capteurs CCD du récepteur d'une webcam. Que l'on ait affaire à des capteurs CCD ou des photodiodes, une partie de la lumière reçue est réfléchie. Cette lumière réfléchie subit le phénomène de diffraction à deux dimensions du fait de la régularité de l'implantation des capteurs. La diffraction peut avoir des effets assez perceptibles car la taille des capteurs de l'ordre du micron se rapproche de la longueur d'onde de la lumière.

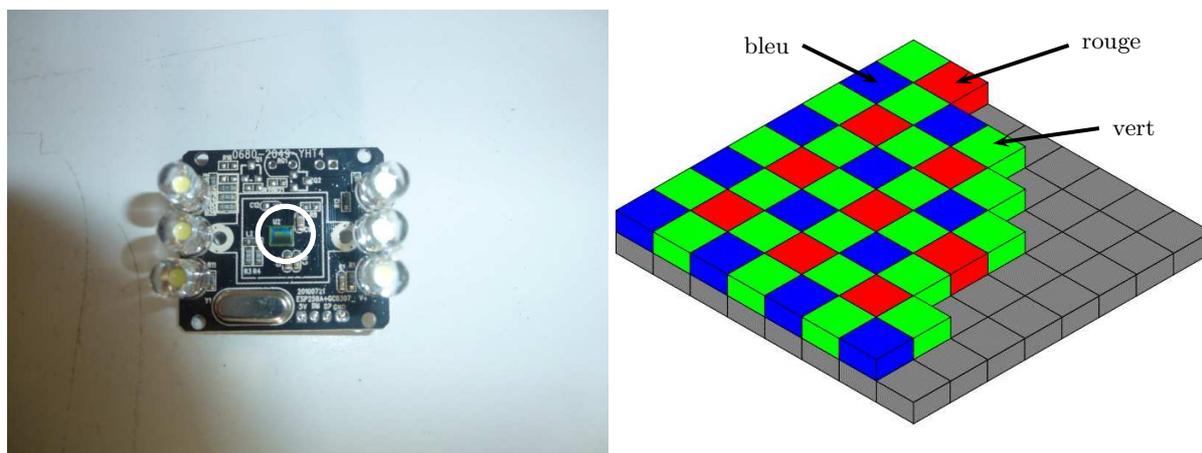


FIGURE 12 – Capteur de la webcam à l'intérieur du cercle blanc et filtre de BAYER

5.2 Un réseau en Mécanique

Sur les photographies de la figure 13, on peut voir un réseau un peu particulier. Il est constitué d'un ensemble périodique de pieux en bois disposés parallèlement à l'océan. Ce dispositif a été installé pour protéger une dune de l'île de Noirmoutier (85). La distance séparant deux pieux consécutifs a été choisie pour favoriser la diffraction. L'énergie des vagues est ainsi répartie dans de nombreuses directions. Les ondes n'arrivent plus de manière frontale sur le pied de la dune, l'effet d'érosion est moindre.

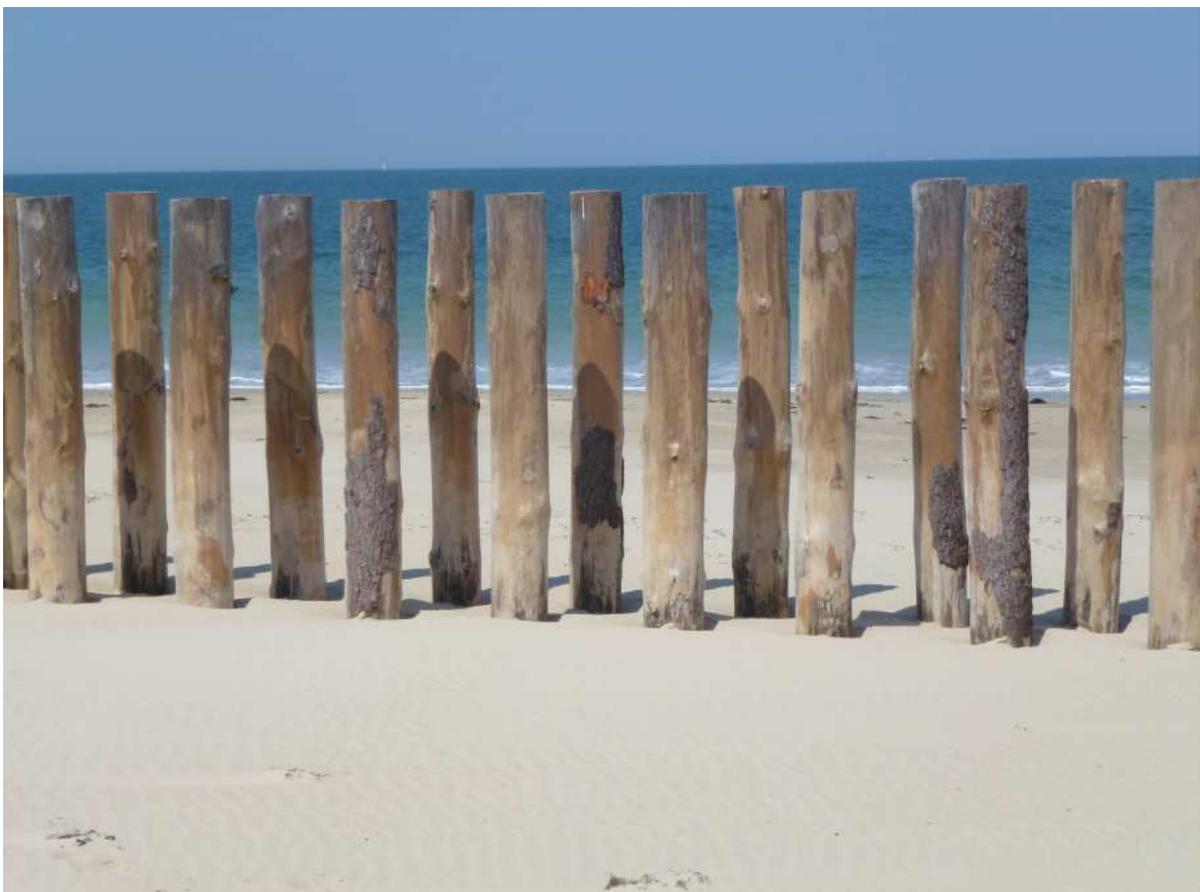


FIGURE 13 – Le Devin (L'Épine) - Noirmoutier (85)

6 Compléments sur la fonction de réseau

6.1 Situation étudiée

Afin de simplifier au maximum l'approche, on étudie un réseau plan par transmission éclairé sous incidence normale par une onde monochromatique de longueur d'onde λ provenant du foyer objet d'une lentille convergente. Le réseau comprend, au total, N fentes séparées par le pas a . On étudie la diffraction à l'infini dans la direction θ . Voir la figure 14.

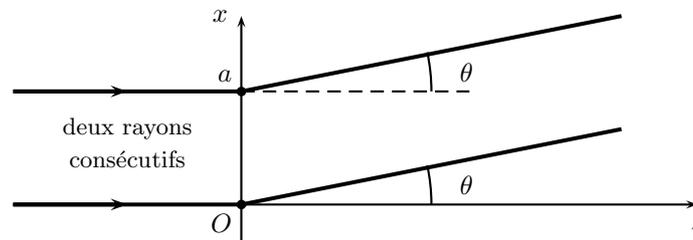


FIGURE 14 – Diffraction par un réseau plan de pas a

La différence de marche entre les deux rayons consécutifs est $\delta = a \sin \theta$. L'ordre d'interférence est donné par $a \sin \theta = \delta = p\lambda$. Le déphasage entre deux rayons consécutifs est $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$.

6.2 Amplitude diffractée

À l'infini, l'amplitude obtenue dans la direction d'angle θ est la somme de N contributions d'amplitudes régulièrement déphasées :

$$s = \sum_{m=0}^{N-1} s_0 \exp jm\varphi = s_0 (1 + \exp j\varphi + \exp j2\varphi + \dots + \exp j(N-1)\varphi)$$

Cette expression est clairement la somme de N termes d'une suite géométrique de raison $\exp j\varphi$. Cela nous permet d'écrire s sous une forme plus exploitable :

$$s = s_0 \frac{1 - \exp jN\varphi}{1 - \exp j\varphi} = s_0 \exp j \left[(N-1) \frac{\varphi}{2} \right] \frac{\sin N \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

6.3 Intensité diffractée

L'intensité \mathcal{I} diffractée est donnée par $\mathcal{I} = \alpha s s^*$. On a alors :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \frac{\sin^2 N \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \mathcal{I}_0 \frac{\sin^2 N\pi p}{\sin^2 \pi p}$$

Ce résultat demande un peu d'attention car à chaque fois que la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde - $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{Z}$ - le dénominateur s'annule. La condition d'interférences constructives provoque l'annulation du dénominateur mais cela n'empêche pas la fonction d'être évaluée par prolongement par continuité. En effet, au même moment le numérateur s'annule puisque Np est aussi un entier et qu'alors $\sin Np\pi = 0$. En raisonnant sur les équivalents au voisinage de $p\pi$ du numérateur et du dénominateur, on voit que pour toutes les valeurs de p entières, l'intensité est maximale et donnée par :

$$\mathcal{I}_{max} = N^2 \mathcal{I}_0$$

Pour les réseaux les plus courants, N est un nombre très élevé de l'ordre de plusieurs centaines ou de plusieurs milliers. L'intensité obtenue est très forte lorsque la condition d'interférence constructive est réalisée. Elle sera très faible ailleurs comme nous allons le comprendre en observant le graphique de $\mathcal{I}(p)$ représenté à la figure 15. On peut commencer par remarquer que \mathcal{I} est le produit de deux fonctions l'une est rapide du fait de l'argument en $Np\pi$ du numérateur par rapport à l'autre argument $p\pi$. La fonction lente sera l'enveloppe de la fonction rapide :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \times \text{Lente} \times \text{Rapide} = \mathcal{I}_0 \times \frac{1}{\sin^2 \pi p} \times \sin^2 N\pi p$$

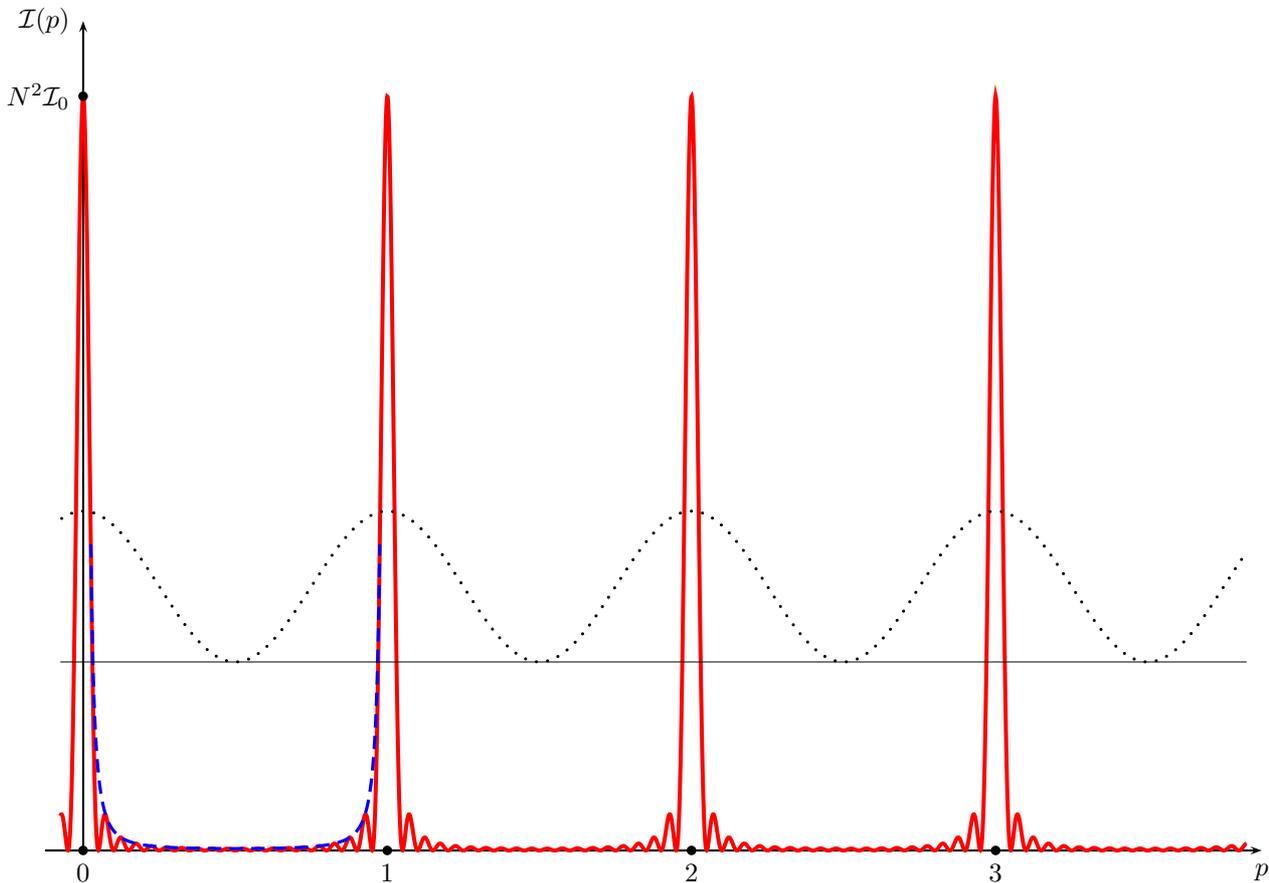


FIGURE 15 – Intensité diffractée $\mathcal{I}(p)$

L'enveloppe est représentée pour $0 < p < 1$ en pointillés bleus sur le graphique de la figure 15. Pour rappel, on a aussi représenté sur le graphique, l'intensité des interférences pour deux ondes - sans prise en compte d'échelle d'intensité - à savoir $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0(1 + \cos \pi p)$. On constate bien l'effet de concentration de l'intensité lumineuse dans les ordres p entiers pour le réseau. Le maximum d'intensité est toujours obtenu dans les ordres entiers mais, en dehors de ceux-ci, il n'y a quasiment pas d'énergie dans le cas du réseau.

6.4 Pouvoir de résolution du réseau

On étudie maintenant une situation où la lumière éclairant le réseau dans les mêmes conditions qu'avant est composée de deux longueurs d'onde proches $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda$ avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. On choisit de définir $\Delta\lambda > 0$. Le pouvoir de résolution du réseau est une donnée quantitative qui va permettre d'estimer la capacité du réseau à séparer les deux longueurs d'onde. Tout d'abord, il y a séparation des deux longueurs d'onde car leur ordre pour une même différence de marche δ sera différent. Par exemple, si $\lambda = \lambda_0$ présente une intensité maximale à l'ordre p pour la différence de marche δ , alors $\delta = p\lambda_0$. δ ne peut pas correspondre à une intensité maximale pour λ' car il est évident que $\delta \neq p(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. L'intensité maximale à l'ordre p pour λ' sera obtenue pour une différence de marche un peu plus grande $\delta' = p(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \delta + p\Delta\lambda$. On peut observer le phénomène sur le graphique de la figure 16 où on a adapté les échelles et le nombre de motifs du réseau pour voir correctement le phénomène.

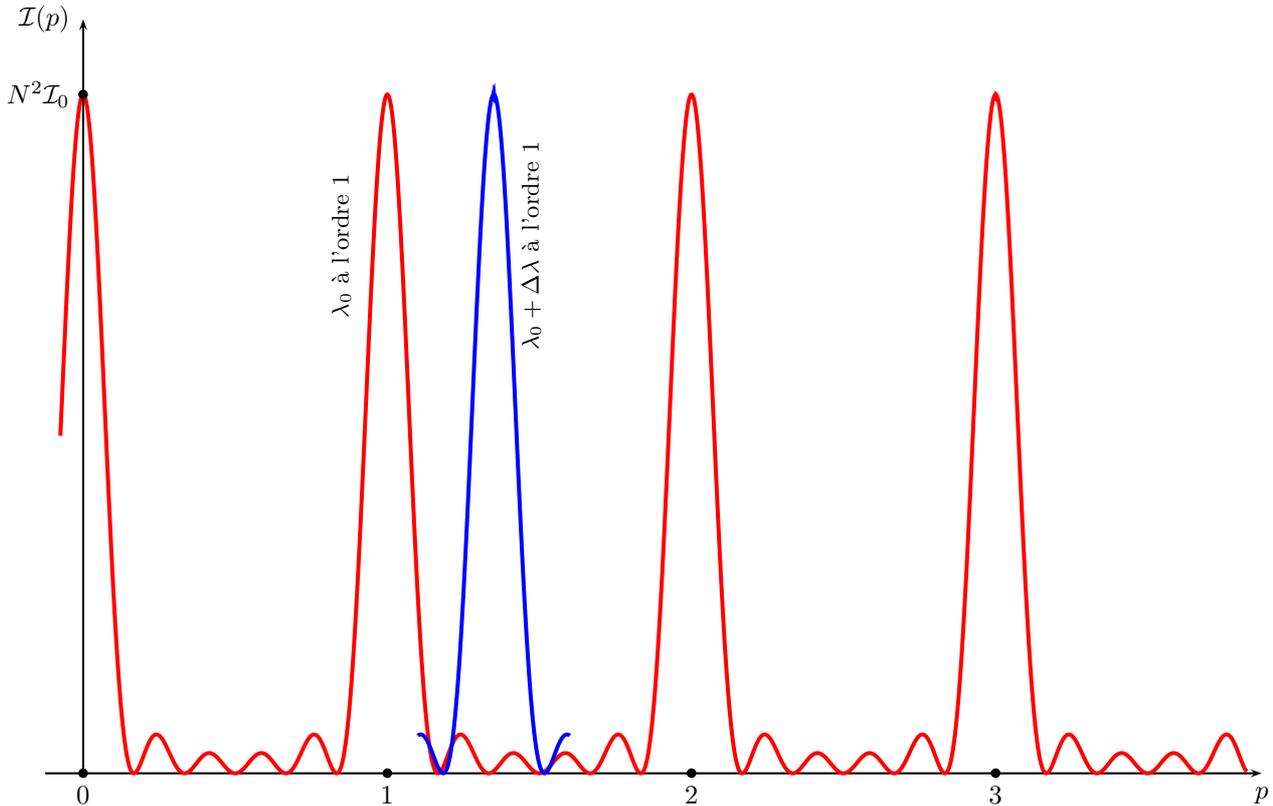


FIGURE 16 – Séparation de longueurs d’onde par un réseau dans l’ordre 1

On peut légitimement se poser la question du critère permettant de décréter que deux longueurs sont séparées. On utilise le critère de RAYLEIGH qui dit que l’on peut considérer le doublet de longueur d’onde résolu lorsque le maximum à l’ordre p de $\lambda_0 + \Delta\lambda$ se trouvera au même endroit que le premier zéro qui suit l’ordre p pour la longueur d’onde λ_0 . La fonction réseau atteint son maximum lorsque p est entier puisqu’alors $\sin p\pi = 0$ et $\sin Np\pi = 0$. L’intensité va s’annuler pour la première fois lorsque l’ordre sera un peu plus grand que p à savoir $p_{1z} = p + \frac{1}{N}$. En effet, on a alors $\sin Np_{1z}\pi = \sin N(p + \frac{1}{N})\pi = \sin(Np + 1)\pi = 0$ alors que $\sin p_{1z}\pi = \sin(p\pi + \frac{\pi}{N}) = \pm \sin \frac{\pi}{N} \neq 0$. On se reportera à la figure 17 pour visualiser la situation.

On note δ la différence de marche à l’endroit qui marque la limite de résolution. Pour cette valeur commune de la différence de marche pour les deux longueurs d’onde, on traduit le fait que l’ordre est p pour $\lambda_0 + \Delta\lambda$ et qu’en même temps l’ordre est p_{1z} pour λ_0 . On a donc la relation :

$$\delta = \left(p + \frac{1}{N}\right) \lambda_0 = p (\lambda_0 + \Delta\lambda)$$

Cette relation conduit immédiatement à l’expression du pouvoir de résolution que l’on a déjà énoncée :

$$\mathcal{PR} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = pN$$

Il est important d’insister sur la capacité d’un réseau à séparer les longueurs d’onde contenues dans le spectre d’une source lumineuse. N est vite de l’ordre de 1000 en TP, quant à p il ne faut pas imaginer que toutes les possibilités sont offertes car tous les ordres p n’existent pas nécessairement comme nous l’avons vu dans l’étude de la loi de BRAGG. Avec $p = 2$, on a $\mathcal{PR} = 2000$. Pour un doublet de longueur d’onde $\lambda_0 = 600$ nm, on peut obtenir sa résolution pour $\Delta = 0,3$ nm. Ceci sera perceptible sur le spectrogoniomètre à réseau en TP. Le réseau étale fortement les différents spectres qu’il forme dans ses ordres entiers, à tel point que les spectres peuvent se mélanger comme on peut le voir à la figure 18 où c’est de la lumière blanche qui est analysée.

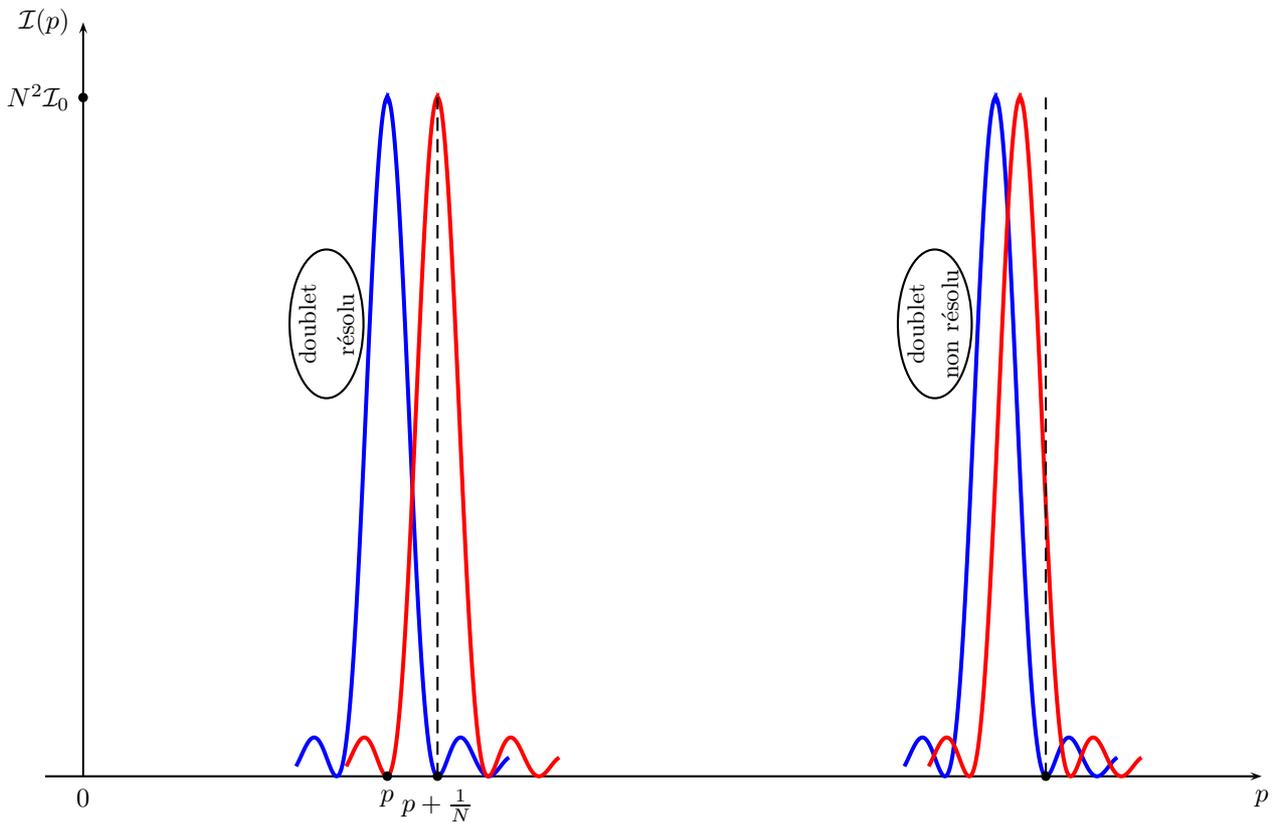


FIGURE 17 – Critère de RAYLEIGH

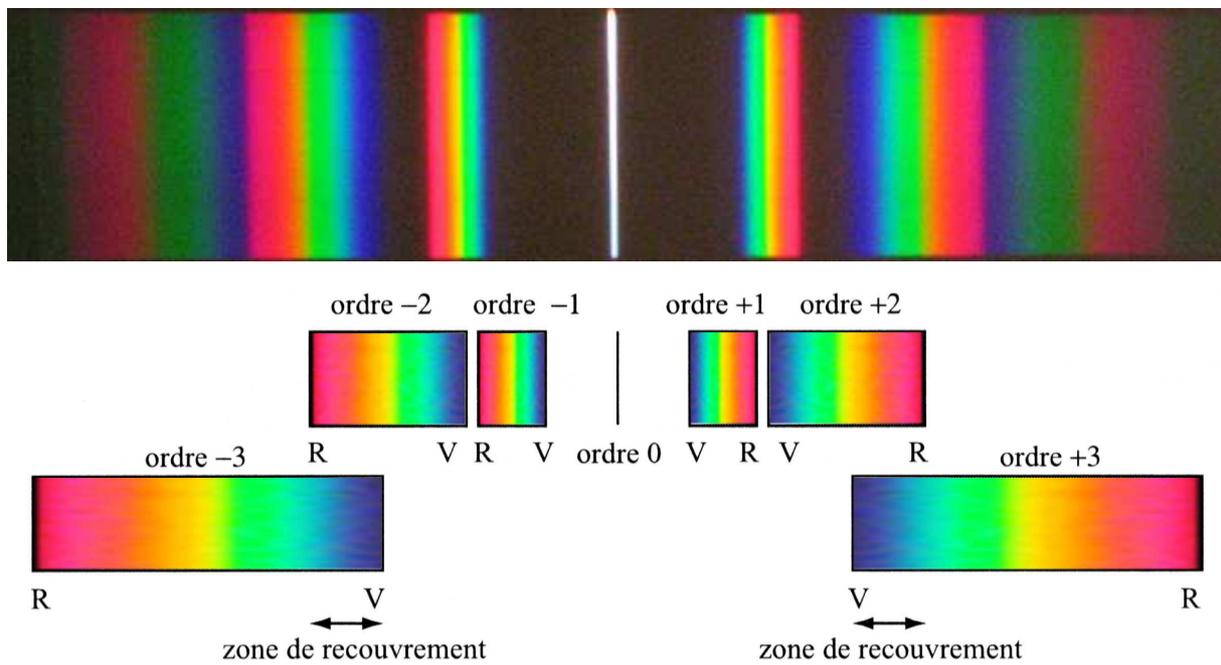


FIGURE 18 – Superposition des ordres pour le réseau en lumière blanche

On distingue au centre l'ordre 0, non dispersif donc blanc, et de chaque côté des spectres pour chaque ordre observable mais certains se recouvrent! Seuls les spectres d'ordres +1 et -1 sont isolés des autres et exploitables. . . Ici, la superposition du rouge de l'ordre 2 avec le violet de l'ordre 3 donne par synthèse additive une teinte magenta.