

Rotation

Le programme se limite aux rotations autour d'un axe fixe. Ce cours propose une révision du thème étudié en première année. La limitation de l'étude de la rotation aux axes fixes empêche - théoriquement... - d'étudier tout objet roulant sur un support comme on serait amené à le faire pour le mouvement d'un véhicule. Dans le cas de tels mouvements, les rotations s'effectuent autour d'un axe de direction fixe mais dont la position dans l'espace évolue au cours du temps.

1 Moment cinétique

1.1 Approche

Dans l'exemple de la rotation d'un DVD, on comprend bien que plus le point est éloigné de l'axe de rotation $Oz = Gz$, plus sa quantité de mouvement va varier au cours du démarrage de la lecture. Il est donc évident que la distance à l'axe est une grandeur qui va intervenir dans le problème. De plus, une vitesse de rotation est viscéralement attachée à un produit vectoriel, voir le schéma de la figure 1. Nous avons vu précédemment que si l'on définissait par l'angle θ la direction du vecteur \vec{e}_r des coordonnées polaires par rapport à l'axe Ox , la vitesse de rotation était $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$ où $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$.

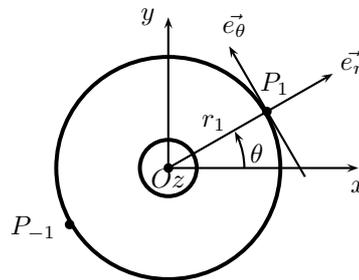


FIGURE 1 – Vitesse de rotation et produit vectoriel

Dans ces conditions, il est plus aisé de comprendre l'origine de la définition du moment cinétique. Nous allons commencer par la rappeler pour un point matériel M de masse m . Pour y arriver, il faut définir une origine et un référentiel. Le référentiel est noté \mathcal{R} , le point origine peut être choisi arbitrairement mais nous allons choisir un point intéressant pour l'étude en général. Soit O le point servant d'origine pour le calcul des moments cinétiques. La quantité de mouvement de M dans \mathcal{R} est $\vec{p}_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$. Le moment cinétique est la quantité $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ définie selon :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Le moment cinétique est le moment de la quantité de mouvement. Un moment fait toujours intervenir un vecteur position par rapport à une origine et un produit vectoriel.

1.2 Moment cinétique d'un objet étendu

Le moment cinétique est une grandeur vectorielle qui va autoriser la superposition vectorielle de toutes les contributions.

Continuons de prendre comme exemple le DVD évoqué avant. Le point P_1 , voir la figure 1 de masse m_p situé à la distance r_1 de O alors que la vitesse de rotation est $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ possède une vitesse $\vec{v}_{P_1/\mathcal{R}} = r_1\omega\vec{e}_\theta$. Le vecteur position est $\overrightarrow{OP}_1 = r_1\vec{e}_r$. Le moment cinétique est donc $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{P_1} = r_1\vec{e}_r \wedge m_p r_1 \omega \vec{e}_\theta = m_p r_1^2 \omega \vec{e}_z$. Considérons en plus du point P_1 , le point P_{-1} symétrique de P_1 par rapport à O . Dans ces conditions, la vitesse de P_{-1} est $\vec{v}_{P_{-1}/\mathcal{R}} = -r_1\omega\vec{e}_\theta$ où, attention, \vec{e}_θ est le vecteur unitaire orthoradial associé au point P_1 et non pas au point P_{-1} . De la même façon, le vecteur position va être $\overrightarrow{OP}_{-1} = -r_1\vec{e}_r$. Le moment cinétique est donc $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{P_{-1}} = -r_1\vec{e}_r \wedge -m_p r_1 \omega \vec{e}_\theta = m_p r_1^2 \omega \vec{e}_z$. On constate aussitôt que $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{P_1} = \vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{P_{-1}}$ et par conséquent $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{P_1} + \vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{P_{-1}} \neq \vec{0}$.

Par cet exemple élémentaire, nous constatons que même si la quantité de mouvement du système (P_1, P_{-1}) s'annule $\vec{p}_{/\mathcal{R}}^{P_1} + \vec{p}_{/\mathcal{R}}^{P_{-1}} = \vec{0}$, le moment cinétique du système ne s'annule pas puisqu'il vaut $2m_p r_1^2 \omega \vec{e}_z$. D'autre part, si la vitesse de rotation ω évolue au cours du temps - ce qui se produit inévitablement - alors le moment

cinétique augmente ou bien diminue. La définition du moment cinétique semble intéressante de prime abord puisqu'il apparaît comme le reflet de la rotation de notre DVD¹. Nous pouvons donner la définition générale du moment cinétique d'un objet étendu que nous considérons soit comme un ensemble discret de point M_i de masse m_i , soit comme un ensemble continu de point M et de masse élémentaire dm . Le moment cinétique du système en O dans \mathcal{R} est :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \quad \text{ou} \quad \vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \int \overrightarrow{OM} \wedge dm \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Dans un cas général, il peut être intéressant de faire intervenir le centre d'inertie G du système dans le calcul du moment cinétique. Nous ne le ferons pas car cela nous entraînerait beaucoup trop loin pour une première approche. Nous ferons aussi remarquer qu'en choisissant comme exemple au départ un DVD, nous avons été amenés à choisir $O = G$ ce qui ne reflète pas, là non plus, la situation générale.

1.3 Expression du moment cinétique d'un point

Jusqu'à présent, nous avons limité nos études au monde à 2D en considérant que les mouvements du point M de masse m étaient confinés au plan Oxy . Soit \mathcal{R} le référentiel auquel sont attachés les axes Ox et Oy . La position de M est donnée par $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, sa vitesse est donc $\vec{v}_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$. Le moment cinétique de M calculé en O est donc :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{/\mathcal{R}} = m(xy - yx)\vec{e}_z$$

Nous avons donné l'expression de ce moment cinétique uniquement dans le but de montrer que son expression mathématique ne sera pas simple et encore, nous avons limité le mouvement à un plan. Dans l'espace tridimensionnel, l'expression d'un moment cinétique d'un point est encore moins parlante... Du calcul précédent, nous retiendrons seulement que l'orientation du moment cinétique est perpendiculaire au plan d'évolution de M .

Continuons un peu les calculs de moments cinétiques. En choisissant de décrire le mouvement du point M en coordonnées cylindriques, nous pouvons obtenir quelque chose d'intéressant que nous pourrions plus facilement exploiter que l'expression précédente. La position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, la vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Le moment cinétique s'exprime donc selon $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$. Comme $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$, il ne reste finalement que le résultat de $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$. L'expression du moment cinétique est :

$$L_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{/\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

Cette expression est identique dans sa forme à celle obtenue pour le point P_1 du DVD (ou le point P_{-1}), on remarque toujours que le moment cinétique est orienté sur une perpendiculaire au plan d'évolution de M . Dans l'étude de l'interaction gravitationnelle, vous avez vu que cette expression était très utile. Elle a permis en classe de Sup de montrer que la loi de conservation du moment cinétique impliquait la validité de la loi des aires de KÉPLER.

1.4 Expression du moment cinétique d'un système

Nous allons choisir un exemple simple pour illustrer le calcul d'un moment cinétique. Le DVD présenté avant sera considéré comme un solide homogène où, par conséquent, la distribution de masse est identique en tout point compris entre les rayons a et $b > a$. En effet, il faut tenir compte de l'absence de matière sur la partie centrale du disque. Compte tenu de la faible épaisseur du disque dont la masse totale est notée m_{tot} , nous le décrirons à 2D comme constitué par un ensemble continu de surfaces élémentaires $dS = r dr d\theta$ auxquelles nous allons associer une masse dm qui sera proportionnelle à la surface prise en compte : $dm = \sigma dS$ où σ – rapport d'une masse sur une surface – est la masse surfacique. Le schéma de la figure 2 permet de mieux comprendre le calcul envisagé. L'élément de surface dS sera considéré comme localisé au point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

Le moment cinétique élémentaire associé à la masse dm se calcule selon $d\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge dm\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$. On note $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ la vitesse de rotation du DVD. La vitesse du point M est $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = r\omega\vec{e}_\theta$. Nous avons donc $d\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = r\vec{e}_r \wedge dmr\omega\vec{e}_\theta$. Le produit vectoriel engendre une orientation sur \vec{e}_z . En utilisant l'expression de la masse élémentaire $dm = \sigma r dr d\theta$, on obtient $d\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \sigma\omega r^3 dr d\theta \vec{e}_z$. Le moment cinétique correspond à l'intégration sur tout le DVD. On a donc $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \iint_{\text{DVD}} \sigma\omega r^3 dr d\theta \vec{e}_z$. Nous avons affaire à une intégrale double ce qui est normal car pour décrire le DVD, il faut deux paramètres : r et θ . On remarque aussi que, quel que soit

1. Réduire la perception du moment cinétique à un reflet de la rotation est discutable mais cela permet une première approche de cette notion assez peu intuitive par rapport à la quantité de mouvement qui l'est tout de même plus.

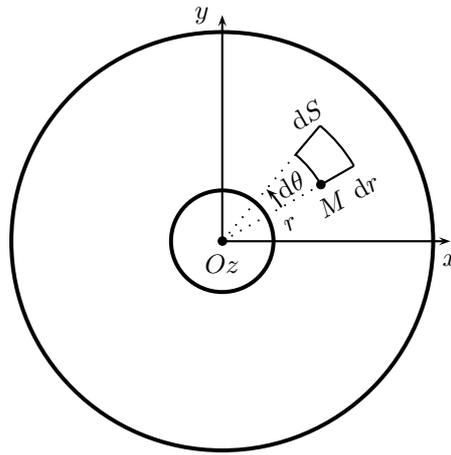


FIGURE 2 – Moment cinétique d'un DVD

le point M que l'on envisage, σ est toujours le même par hypothèse d'homogénéité du disque, que ω est aussi une constante pour tous les points et que le vecteur \vec{e}_z ne varie pas en fonction de r et de θ . Ces trois grandeurs peuvent donc sortir de l'intégrale. Notre calcul devient donc : $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \vec{e}_z \sigma \omega \iint_{\text{DVD}} r^3 dr d\theta$. Les paramètres de repérage r et θ étant indépendants l'un de l'autre, l'intégrale double devient le produit de deux intégrales, l'une portant sur r , l'autre portant sur θ . On obtient : $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \vec{e}_z \sigma \omega \int_a^b r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$. Les bornes sont déterminées de telle sorte que l'on puisse passer en revue tous les points du DVD. La primitive de la fonction de r^3 étant $r^4/4$, on peut facilement calculer le moment cinétique. On arrive à $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \vec{e}_z \sigma \omega \left(\frac{b^4 - a^4}{4} 2\pi \right)$. Comme le DVD a été supposé homogène, la masse surfacique est alors le rapport de la masse totale sur la surface. On a ainsi $\sigma = \frac{m_{tot}}{\pi(b^2 - a^2)}$. En utilisant le fait que $b^4 - a^4 = (b^2 - a^2)(b^2 + a^2)$, on peut simplifier l'expression du moment cinétique du DVD et conclure que :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m_{tot} (a^2 + b^2) \omega \vec{e}_z$$

La quantité $J_{Oz} = \frac{1}{2} m_{tot} (a^2 + b^2)$ est très importante en Mécanique, son unité est le $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. C'est ce que l'on appelle un moment d'inertie. Dans notre cas particulier, J_{Oz} est le moment d'inertie du DVD par rapport à l'axe de rotation Oz . En fait, lorsqu'on étudie des problèmes limités à des translations, c'est la masse m_{tot} qui est la grandeur pertinente pour traduire l'inertie mais dès qu'il y a rotation, ce seront les moments d'inertie². En fonction de la situation, les moments d'inertie auront des expressions plus ou moins complexes, certaines calculables de façon littérale, comme nous venons de le faire, mais d'autres ne seront accessibles qu'à partir de calculs numériques réalisés à l'ordinateur. En effet, dès que la distribution des masses manquera de symétrie, le seul recours sera le calcul numérique. Des logiciels spécialisés en la matière seront utilisés en Physique et en Sciences Industrielles pour l'Ingénieur.

1.5 Moments d'inertie

Le calcul des moments d'inertie n'est pas au programme à l'exception de quelques cas que nous allons voir. En fait, il existe un cas extrêmement simple pour un calcul de moment d'inertie. Considérons un cerceau homogène de masse m et de rayon R , le cerceau est considéré sans épaisseur ce qui revient à le considérer comme un objet unidimensionnel. Voir le schéma de la figure 3.

En ce qui concerne, la rotation par rapport à l'axe Oz , tous les points du cerceau étant à une distance R de l'axe Oz , ils contribuent tous pour R^2 dans le calcul du moment d'inertie qui finalement est très simplement $J_{Oz} = mR^2$. Par contre, si l'on s'intéresse au moment d'inertie par rapport à l'axe Ox ou Oy , le calcul n'est pas aussi immédiat que dans le cas précédent. On peut toutefois remarquer que $J_{Ox} = J_{Oy}$ par symétrie des axes par

2. Le calcul que nous avons effectué concerne un cas simple à forte symétrie. Dans un cas plus général, l'expression du moment cinétique d'un solide et a fortiori d'un système quelconque sera plus complexe. Dans le cadre de la Mécanique des solides étudiée en Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, vous verrez apparaître dans les calculs de moments cinétiques la matrice d'inertie. Cette matrice 3×3 comporte neuf termes dont trois sont des moments d'inertie, les six autres sont appelés produits d'inertie. Ils s'expriment eux aussi en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si pour la translation l'inertie d'un système est fournie par la donnée de la masse totale m_{tot} , il en va tout autrement dès que le système possède une rotation : l'inertie est fournie par la matrice d'inertie.

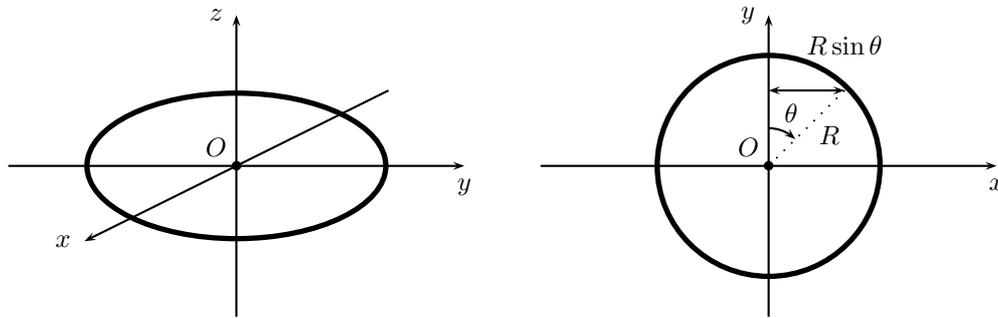


FIGURE 3 – Moments d'inertie du cerceau

rapport au cerceau homogène. Calculons le moment d'inertie J_{Oy} en considérant un petit élément de longueur $Rd\theta$ du cerceau dont la position est repérée par l'angle θ comme le montre la figure 3. Le moment d'inertie élémentaire est donc $dJ_{Oy} = dm R^2 \sin^2 \theta$ où dm est la masse élémentaire correspondant à la portion $Rd\theta$ du cerceau. Comme il est homogène, cette masse élémentaire est simplement déterminée par proportionnalité à la longueur considérée. On a donc $dm = \frac{m}{2\pi R} Rd\theta = \frac{m}{2\pi} d\theta$. On en déduit que $dJ_{Oy} = \frac{m}{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$ qu'il faut intégrer pour obtenir le moment d'inertie recherché. On obtient $J_{Oy} = \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$. Cela revient à déterminer la moyenne de $\sin^2 \theta$ sur deux fois sa période, c'est 1/2. On peut conclure en écrivant :

$$\text{Cerceau homogène} \quad J_{Oz} = mR^2 \quad J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{1}{2}mR^2$$

On peut citer comme autre exemple le moment d'inertie d'une boule homogène par rapport à un axe représentant un de ses diamètres :

$$\text{Boule homogène} \quad J_{Ox} = J_{Oy} = J_{Oz} = \frac{2}{5}mR^2$$

à condition que m soit la masse de la boule et R son rayon. Les moments d'inertie sont, en général, donnés. On rencontre assez souvent le cas d'un cylindre homogène d'axe Oz , de masse m , de rayon R et de hauteur h . Son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est :

$$\text{Cylindre homogène} \quad J_{Oz} = \frac{1}{2}mR^2$$

On relèvera que le moment d'inertie ne dépend pas de h , ceci est la conséquence de l'invariance de la distance des points du cylindre à l'axe pour une translation d'axe Oz .

1.6 Théorème de Huygens

Ce théorème établit une relation entre deux moments d'inertie dans les conditions suivantes : on considère deux axes de rotation parallèles dont l'un passe obligatoirement par le centre d'inertie G du solide. Nous allons illustrer ce théorème en considérant le cerceau avec l'axe de rotation passant par un point de sa périphérie, voir le schéma de la figure 4. Le centre d'inertie G du cylindre homogène est le centre de celui-ci par propriétés de symétrie de la distribution des masses. On a donc comme cela a été vu avant $J_{Gz} = \frac{1}{2}mR^2$. Si l'on veut étudier, par exemple, la rotation du cerceau par rapport à un point A de sa périphérie, il faut considérer l'axe Az . Le théorème de HUYGENS permet d'écrire que :

$$J_{Az} = J_{Gz} + m d_{GzAz}^2$$

où m est la masse du cerceau et d_{GzAz} la distance séparant les axes Gz et Az . Cette expression a une conséquence immédiate, c'est que le moment d'inertie d'un solide en rotation a toujours la plus petite valeur lorsque l'axe de rotation passe par son centre d'inertie puisque $m d_{GzAz}^2 > 0$. Dans le cas du cylindre avec A à la périphérie, on a $d_{GzAz} = R$ d'où :

$$\text{Cylindre homogène} \quad J_{Az} = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Lorsque l'on fait tourner un rotor, on place, en général, le centre d'inertie G sur l'axe de rotation pour économiser l'énergie à fournir pour obtenir une certaine vitesse de rotation. Une étude dynamique montrerait aussi que cela diminue les actions mécaniques au niveau des paliers de liaison et évite d'endommager les liaisons pivot ou

rotule avec le bâti. Cela se ressent très bien lorsqu'une des roues directrices d'une voiture n'est plus équilibrée, le volant se met très vite à vibrer.

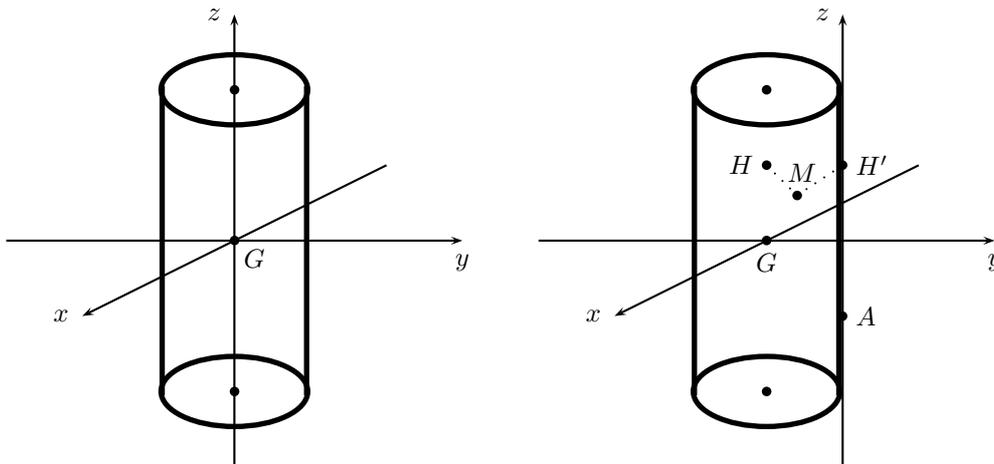


FIGURE 4 – Moments d'inertie du cylindre homogène et théorème de HUYGENS

La démonstration du théorème tient aux définitions des moments d'inertie ainsi qu'à celle donnant la propriété du centre d'inertie G . On considère un élément de masse dm du cylindre en un point M . On note H et H' les projetés orthogonaux du point M sur les axes Gz et Az respectivement, voir le schéma de la figure 4. Par définition du moment d'inertie, on a $J_{Az} = \int dm \overline{MH'}^2 = \int dm (\overline{MH} + \overline{HH'})^2$. En développant le carré, il vient $J_{Az} = \int dm \overline{HM}^2 + md^2 + 2 \int dm \overline{MH} \cdot \overline{HH'}$. Or, $\int dm \overline{MH} \cdot \overline{HH'} = \int dm (\overline{MG} + \overline{GH}) \cdot \overline{HH'} = \int dm \overline{MG} \cdot \overline{HH'}$ car $\overline{GH} \perp \overline{HH'}$. Mais on peut écrire que $\int dm \overline{MG} \cdot \overline{HH'} = (\int dm \overline{MG}) \cdot \overline{HH'}$. Comme on a $\int dm \overline{GM} = \vec{0}$ par définition de la position du centre d'inertie, barycentre des masses, on peut conclure que le double produit n'a pas de contribution dans le calcul et donc que $J_{Az} = \int dm \overline{HM}^2 + md_{AzGz}^2 = J_{Gz} + md_{AzGz}^2$. Sur la figure 4, on a $d_{AzGz} = R$.

1.7 Moment cinétique et particules élémentaires

Reprenons l'expression du moment cinétique pour un point $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overline{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$. Nous voyons que la dimension du moment cinétique est le $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Revenons sur le cas du photon : il possède une quantité de mouvement $p = h/\lambda = \hbar k$ où $k = 2\pi/\lambda$ est la norme du vecteur d'onde de l'onde associée à ce photon et λ la longueur d'onde. On constate donc que le produit de p par λ consiste à fabriquer une grandeur qui est bien le produit d'une distance par une quantité de mouvement. Nous avons alors une quantité de dimension identique à un moment cinétique. Dans ces conditions, vous ne serez pas surpris de voir que le moment cinétique scalaire associé à un photon est donné par :

$$L_{\text{photon}} = \hbar$$

Lorsque nous avons présenté le photon, nous avons déjà été surpris par le fait qu'il ne possédait pas de masse du fait de sa vitesse de propagation c dans le vide. Il faut convenir que l'expression de la valeur de son moment cinétique est plutôt déstabilisante puisque, contrairement à la quantité de mouvement qui dépend de la longueur d'onde $p = h/\lambda$, le moment cinétique est le même pour tous les photons. Malgré tout, l'expression précédente du moment cinétique associé au photon a été validée expérimentalement en étudiant les interactions entre un faisceau laser et un milieu absorbant le faisceau.

Dans le cadre de l'étude de la structure atomique de la matière, vous avez vu que l'état d'un des électrons du cortège électronique d'un atome est décrit au moyen de quatre nombres quantiques (n, ℓ, m, s) . n est le nombre quantique principal, c'est un entier naturel non nul : $n = 1, 2, 3, \dots$. On peut dire en simplifiant qu'il permet de localiser les endroits de l'espace autour du noyau où la probabilité de trouver l'électron est la plus grande. Le nombre ℓ est le nombre quantique secondaire. Il est en relation avec la valeur du moment cinétique de l'électron. C'est aussi un entier naturel tel que $0 \leq \ell \leq n - 1$. m est le nombre quantique magnétique, il caractérise le moment magnétique³ orbital d'un électron, c'est-à-dire le moment magnétique consécutif au mouvement de l'électron autour du noyau. Ce nombre est un entier relatif respectant $-\ell \leq m \leq \ell$. Enfin, s

3. Le moment magnétique sera défini dans le cours d'Électromagnétisme.

est le nombre quantique de spin. Il caractérise le moment magnétique intrinsèque de l'électron, il vérifie pour l'électron $s = \pm \frac{1}{2}$.

Il est difficile de donner une image satisfaisante de la notion de moment magnétique de spin, nous nous contenterons de dire que cela revient à considérer que l'électron a les mêmes propriétés que celles qu'aurait un petit aimant ou une petite aiguille aimantée. En Mécanique quantique, à ce moment magnétique de spin est associé un moment cinétique de spin dont la projection sur la direction du champ magnétique \vec{B} est :

$$L_{\text{spin},\parallel\vec{B}} = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

Le moment cinétique orbital de l'électron peut être concrétisé comme nous l'avons fait pour un point du DVD. Comme $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$, il est aisé de comprendre que, par exemple, sur un mouvement circulaire $L = mrv$. En Mécanique quantique, on démontre que la valeur de L est donnée par l'expression :

$$L_{orb} = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar$$

Nous terminerons en signalant que la valeur M_{mag} de ce moment magnétique est reliée au moment cinétique orbital par la relation $M_{mag} = gL_{orb}$, où g est le rapport gyromagnétique de l'électron défini par $g = e/(2m_e)$, où e est la valeur absolue de la charge de l'électron et m_e sa masse. Le nombre quantique magnétique m fixe, lui, la valeur de la projection sur la direction du champ magnétique \vec{B} du moment magnétique. On a :

$$M_{mag,\parallel\vec{B}} = m g \hbar$$

Par ces développements, nous avons voulu montrer toute l'importance de la notion de moment cinétique au niveau de la description de particules élémentaires. Vous avez pu aussi mesurer l'importance de la constante de PLANCK dans l'expression des moments cinétiques.

2 Énergie cinétique

2.1 Approche

2.2 Expression pour une rotation autour d'un axe fixe

3 Principe et lois

3.1 Complément au principe d’inertie

Nous allons proposer un complément au principe d’inertie vu en Mécanique. Ce complément est :

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , un corps isolé possède un moment cinétique $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ constant.

3.2 Loi des moments des forces pour un point

Cette loi est fréquemment appelée théorème du moment cinétique. On considère un point matériel M de masse m constante soumis à une force \vec{F} étudié dans un référentiel galiléen \mathcal{R} d’origine O . Il vérifie le principe fondamental de la Dynamique $\frac{d\vec{p}/\mathcal{R}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_{M/\mathcal{R}})}{dt} = \vec{F}$. Nous allons calculer la dérivée du moment cinétique $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ par rapport au temps. Nous avons donc $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}})$. Même si l’opération est un produit vectoriel, le calcul de dérivée est du même type que lorsqu’en Mathématiques vous avez calculé $(fg)' = f'g + fg'$. Nous obtenons donc $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}$. Dans ce développement, nous observons que $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et que $m\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{F}$. La dérivée du moment cinétique par rapport au temps peut donc évoluer puisque $\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$. En effet, le produit vectoriel d’un vecteur par lui-même est nul. Finalement, il ne reste plus que $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$. Dans cette expression, nous voyons intervenir la quantité $\vec{OM} \wedge \vec{F}$. Elle présente la même structure que $\vec{OM} \wedge \vec{p}/\mathcal{R}$ qui avait été définie comme le moment de la quantité de mouvement. Il est logique, dans ces conditions, d’appeler $\vec{OM} \wedge \vec{F}$ moment en O de la force \vec{F} . La loi des moments des forces pour un point est donc :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d’un point M est égale à la somme des moments des forces agissant sur ce point :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

La loi que nous venons de démontrer n’est pas tout à fait générale. En effet, elle ne s’applique que si le point de calcul des moments, en l’occurrence O , est un point fixe⁴ du référentiel \mathcal{R} .

3.3 Loi 2 des actions réciproques

On considère, dans un référentiel galiléen, deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 constantes et de vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Nous supposons que ces deux points constituent un système isolé mais que les points exercent entre eux deux forces \vec{F}_{1sur2} et \vec{F}_{2sur1} . Le moment cinétique en O de l’ensemble est $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{M_1} + \vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{M_2}$. D’après la loi des moments des forces, nous avons $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{M_1}}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2sur1}$ et $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{M_2}}{dt} = \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1sur2}$. Dans ces conditions, la dérivée du moment cinétique global est donc $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2sur1} + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1sur2}$. D’après le principe d’inertie complété, le moment cinétique de l’ensemble doit être une constante, on a $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0}$. Cela impose $\vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2sur1} + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1sur2} = \vec{0}$. Or, nous savons que les actions réciproques d’un point sur

4. Si l’on considère un point A mobile dans le référentiel \mathcal{R} , dans la démonstration de la loi, le terme $\frac{d\vec{AM}}{dt} = \frac{d\vec{AO}}{dt} + \frac{d\vec{OM}}{dt} = -\vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ fait apparaître un terme complémentaire lié à $\vec{v}_{A/\mathcal{R}}$. En général, on essaiera d’appliquer en Physique la loi des moments des forces en un point fixe du référentiel. En Sciences Industrielles pour l’Ingénieur, on pourra rencontrer la version la plus générale du théorème du moment cinétique.

l'autre sont opposées : $\vec{F}_{2sur1} = -\vec{F}_{1sur2}$. On en déduit que $(-\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2) \wedge \vec{F}_{1sur2} = \vec{0}$ ou ce qui revient au même $\vec{M}_1\vec{M}_2 \wedge \vec{F}_{1sur2} = \vec{0}$. Ce produit vectoriel est nul dans trois cas. Tout d'abord, $\vec{M}_1\vec{M}_2 = \vec{0}$ ce qui n'a pas d'intérêt car nous n'avons plus un système de deux points mais un seul point. Ensuite, $\vec{F}_{1sur2} = \vec{0}$. Là encore, il n'y aurait aucune interaction entre les deux points du système. Ceci est contraire à notre hypothèse initiale. Il ne reste plus qu'à en déduire que les vecteurs $\vec{M}_1\vec{M}_2$ et $\vec{F}_{1sur2} = -\vec{F}_{2sur1}$ sont colinéaires. C'est évidemment cette conclusion que nous allons retenir pour énoncer la loi complétée des actions réciproques concernant des points :

Lorsque deux points interagissent, les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre sont opposées : $\vec{F}_{1sur2} = -\vec{F}_{2sur1}$

Ces deux forces sont colinéaires à la direction qui joint les deux points.

3.4 Loi des moments des forces pour un système

Afin d'illustrer une forme un peu plus générale de la loi des moments des forces que nous avons démontrée pour un point, nous allons considérer un système. Afin que la démonstration soit la plus simple possible, ce système est un système de deux points qu'il conviendra de ne pas confondre avec le précédent. Considérons donc, dans un référentiel galiléen, deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 constantes et de vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Nous supposons que ces deux points constituent un système non isolé. Les points exercent entre eux deux forces \vec{F}_{1sur2} et \vec{F}_{2sur1} mais chacun des deux subit une force liée à une interaction extérieure. Notons \vec{F}_a la force subie par le point M_1 et \vec{F}_b celle subie par M_2 . La loi des moments des forces pour un point conduit donc à écrire que $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{M_1}}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge (\vec{F}_{2sur1} + \vec{F}_a)$ et $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}^{M_2}}{dt} = \vec{OM}_2 \wedge (\vec{F}_{1sur2} + \vec{F}_b)$. En sommant les moments cinétiques de chaque point ou plutôt leur dérivée, on arrive facilement à $\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge (\vec{F}_{2sur1} + \vec{F}_a) + \vec{OM}_2 \wedge (\vec{F}_{1sur2} + \vec{F}_b)$. Or, nous venons de voir dans la loi des actions réciproques que $\vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2sur1} + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1sur2} = \vec{0}$. Finalement, en travaillant en un point fixe du référentiel galiléen choisi, nous montrons que la dérivée du moment cinétique correspond à la somme des moments des forces extérieures⁵ agissant sur le système :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique en O origine du référentiel galiléen \mathcal{R} est égale à la somme des moments des forces extérieures :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_a + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_b$$

3.5 Aspect énergétique pour la rotation d'un solide autour d'un axe fixe

5. Dans un référentiel non galiléen, il faudra ajouter le moment des forces d'inertie pour compléter l'écriture du théorème.

4 Analogies translation-rotation

5 Applications

5.1 Action du moteur sur le DVD

Pour mettre en rotation un DVD, un CD, voire un disque vinyle, on utilise un moteur. Celui-ci vient au contact de la partie centrale évidée et va exercer un ensemble de forces tel que leur résultante soit nulle : $\vec{F} = \vec{0}$ puisque nous avons vu que $\vec{a}_{G\mathcal{R}} = \vec{0}$. La situation peut s'illustrer par une représentation simplificatrice où l'on ne fait apparaître que 2 points d'application des forces exercées par le moteur alors que l'action du moteur est répartie sur tout le périmètre de la zone évidée. La représentation de la situation est effectuée sur le schéma de la figure 5.

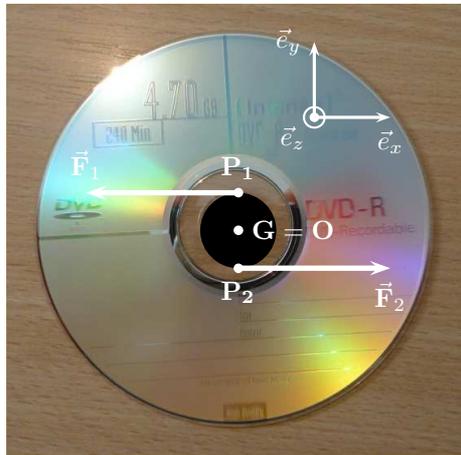


FIGURE 5 – Représentation simplifiée de l'action du moteur d'un lecteur de DVD

Comme nous l'avons vu, le centre d'inertie G du DVD ne bouge pas dans le référentiel \mathcal{R} constitué par le lecteur considéré comme galiléen. Son accélération est donc nulle. Nous avons alors $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. La résultante des forces exercées par le moteur est nulle. Mais leur moment ne va pas l'être afin d'assurer la mise en rotation du DVD. Dans une telle situation, on dit que le moteur soumet le DVD à un couple que l'on caractérise par le moment résultant des forces. Souvent pour un moteur, il est noté $\vec{\Gamma}_{mot}$ et s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}$ puisque le moment d'une force est le produit d'une force en N par une distance en m .

Comme dans le calcul du moment cinétique du DVD, nous notons a le rayon intérieur du DVD. Nous avons vu que le moment cinétique du DVD s'exprimait selon la formule $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = J_{Oz} \omega \vec{e}_z$ où $\omega \vec{e}_z$ est la vitesse de rotation du DVD autour de l'axe Oz perpendiculaire au plan du DVD et passant par son centre d'inertie puisque $O = G$. L'application de la loi des moments des forces est donc :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = J_{Oz} \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_z = \vec{OP}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OP}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{\Gamma}_{mot}$$

En tenant compte de $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, on obtient $\vec{OP}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OP}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{P}_1\vec{P}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{\Gamma}_{mot}$. On a $\vec{P}_1\vec{P}_2 = -2a\vec{e}_y$ et $\vec{F}_2 = F\vec{e}_x$. Le couple auquel est soumis le moteur est donc $\vec{\Gamma}_{mot} = -2a\vec{e}_y \wedge F\vec{e}_x = 2aF\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = 2aF\vec{e}_z$. La loi d'évolution de la valeur de la vitesse de rotation du DVD est donnée par :

$$J_{Oz} \frac{d\omega}{dt} = 2aF = \Gamma_{mot}$$

Cette loi ne pourra être intégrée que si l'on connaît la dépendance du couple moteur avec le temps car il est plutôt attendu que $\Gamma = \Gamma(t)$. En effet, imaginons que le couple moteur soit constant, alors l'équation différentielle est très simple à intégrer puisque $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Gamma}{J_{Oz}} = \text{Cte}$. Si le DVD part du repos à la date $t = 0$, sa vitesse de rotation obéit à :

$$\omega(t) = \frac{\Gamma}{J_{Oz}} t$$

Il n'est pas raisonnable d'avoir comme solution une vitesse qui ne ferait que croître au cours du temps. En réalité, la lecture sur le DVD se fait à vitesse angulaire variable. En effet, l'information est inscrite dans le relief d'une piste en spirale qui part du bord central du DVD pour aller vers le bord périphérique. C'est la vitesse de lecture sur cette piste de rayon de plus en grand qui doit être constante. Cela impose une vitesse de rotation décroissante. Bien sûr, lors du lancement de la lecture du DVD sa vitesse de rotation augmente jusqu'à atteindre

la valeur nécessaire au début de la lecture de la piste - si tant est que l'on lise depuis le début...-. Le couple exercé par le moteur est en fait régulé pour que la lecture des informations soit faite à vitesse linéaire constante. Si à la date t , la lecture s'effectue à la distance $r(t)$ de O , la vitesse linéaire étant quasiment assimilable à celle obtenue sur un cercle, on a $v_{\text{lecture}} \simeq r(t)\omega(t)$. D'une façon générale, la vitesse de rotation du DVD est donnée par :

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \frac{\Gamma(t)}{J_{Oz}} dt$$

5.2 Pendule pesant

Sur la photographie de la figure 6, on peut voir une pendule du style empire avec son pendule. Le pendule est modélisé par un solide plan de masse m , de centre d'inertie G et de moment d'inertie J_{Oz} par rapport à l'axe Oz . Nous posons $\ell = OG$ la distance constante entre l'axe et le centre d'inertie. Nous supposons que la liaison au niveau de l'axe de rotation Oz est parfaite, cela signifie qu'elle ne fait pas intervenir de frottements. Le mouvement du pendule se déroule dans le plan Oxy . Le pendule, ou plutôt le balancier de la pendule, est destiné à réguler les mouvements du mécanisme permettant la progression régulière des aiguilles.

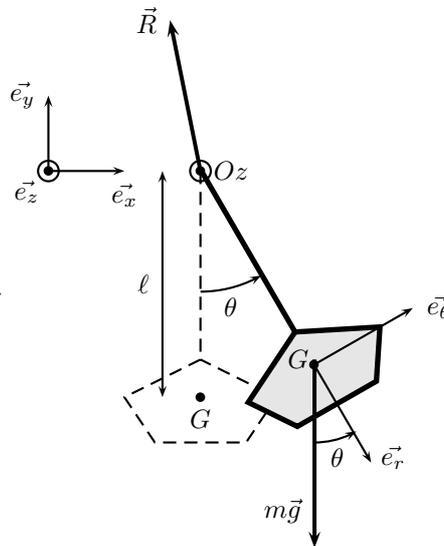


FIGURE 6 – Une pendule, son pendule et sa modélisation

Le pendule est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R} considéré comme galiléen. Il subit deux forces : son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$ et l'action de l'axe Oz . Cette force \vec{R} accroche le pendule au bâti de la pendule, elle est nécessairement orientée vers le haut afin de compenser le poids. Cette force pose des difficultés⁶ car, comme il s'agit d'une action de contact, elle est inconnue a priori. Cette étude va nous montrer que l'application du principe fondamental de la Dynamique ne permet pas d'obtenir l'équation du mouvement. Le mouvement de G étant circulaire de rayon $r = \ell$, il est plus pratique d'utiliser les coordonnées cylindriques pour poursuivre nos développements. Nous savons que l'accélération du centre d'inertie est $\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. Le poids se projette dans la base polaire selon : $m\vec{g} = mg \cos\theta\vec{e}_r - mg \sin\theta\vec{e}_\theta$. Pour la force exercée par l'axe, nous écrirons donc que $\vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_\theta\vec{e}_\theta$ avec $R_r < 0$ puisqu'il est plus que raisonnable de dire que \vec{R} est orientée vers le haut⁷. En appliquant $m\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{R}$, nous arrivons aux deux équations :

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg \cos\theta + R_r \quad \text{et} \quad m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin\theta + R_\theta$$

Nous disposons donc de 2 équations qui contiennent 3 inconnues : une inconnue cinématique θ et deux inconnues dynamiques R_r et R_θ . Il n'est pas possible, comme nous l'avions déjà affirmé, de déterminer l'équation du mouvement du pendule. En fait si : avec une autre méthode, nous arrivons à déterminer $\theta(t)$, ces deux équations nous permettent ensuite de caractériser la force \vec{R} par le biais de la détermination de R_r et de R_θ . Comme vous allez le constater, c'est l'application de la loi des moments des forces qui va débloquer la situation.

L'étude s'effectue toujours dans le référentiel \mathcal{R} galiléen. Nous avons vu que le choix du point d'application de la loi des moments des forces est important. Cette liberté du choix du point de calcul est fondamentale

6. L'expérience montre que cette force est très fréquemment oubliée dans le bilan des forces lorsqu'on étudie ce type de problème...

7. Cette remarque n'est valable que pour les angles $|\theta| < \pi/2$, ce qui est forcément le cas pour des pendules.

en Mécanique. La loi du moment des forces fait intervenir des calculs du type $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ où M est le point d'application de la force. Mais si ce point d'application est le point choisi pour le calcul, le moment de la force est nul ! C'est parfait pour notre étude. La force \vec{R} est inconnue, on choisit donc comme point de calcul le point d'application de cette force. En l'occurrence, ce point est le point O . La somme des moments des forces va se résumer au moment du poids : $\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$. Le modèle utilisé pour décrire le pendule est plan. Comme dans le cas du DVD, le moment cinétique en O dans le référentiel \mathcal{R} du pendule s'exprimera simplement par $\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = J_{Oz}\omega\vec{e}_z$ avec $\omega = \dot{\theta}$. La loi du moment des forces est alors :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = J_{Oz} \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_z = J_{Oz} \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_z = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$$

Calculons le moment du poids en O : $\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \ell\vec{e}_r \wedge mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) = -mg\ell\sin\theta\vec{e}_z$ puisque nous avons $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$ et $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$. Nous obtenons l'équation différentielle $J_{Oz}\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$. En divisant par J_{Oz} , cette équation peut encore être écrite sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg\ell}{J_{Oz}}\sin\theta = 0 \quad \text{ou bien} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$

où l'on a posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J_{Oz}}}$ qui constitue la pulsation propre de l'oscillateur. La solution de cette équation différentielle est difficile à obtenir sur le plan analytique car c'est une équation différentielle non linéaire du fait de la présence du terme $\sin\theta$. Elle demande des développements mathématiques complexes. De nos jours, nous privilégierons une solution par des calculs numériques. Nous avons étudié une situation où les frottements ont été négligés, il y a aura donc des oscillations indéfinies et périodiques. La période du mouvement du pendule dépendra de l'amplitude des oscillations. On peut s'intéresser à un cas particulier : celui des oscillations d'amplitude faible. Pour des angles θ tels que le développement limité de la fonction sinus en 0 soit limité au terme d'ordre 1, à savoir $\sin\theta \simeq \theta$, on retrouve la même forme d'équation différentielle que celle obtenue pour le ressort :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg\ell}{J_{Oz}}\theta = 0 \quad \text{ou bien} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Cette forme est valable pour $|\theta| \ll \pi$. L'approximation du sinus à l'angle donne de bons résultats pour $|\theta| < 10^\circ$. L'équation différentielle est donc maintenant linéaire et possède des solutions sinusoïdales. Si à la date $t = 0$, on lâche sans vitesse initiale le pendule depuis la position $\theta_{t=0} = \theta_m$, la solution est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J_{Oz}}}$$

Que nous soyons dans le cas non linéaire ou bien dans celui de l'oscillateur harmonique, nous constatons donc bien que l'application de la loi du moment des forces nous a permis de déterminer la loi horaire du mouvement $\theta(t)$. Nous allons terminer cette étude en déterminant la forme des composantes de l'action \vec{R} au niveau de l'axe dans le cas général. Nous avons tout d'abord $R_\theta = m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta$. Or, par l'équation différentielle du mouvement, nous savons que $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta$ avec $\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{J_{Oz}}$. On voit facilement que la composante orthoradiale de l'action au niveau de l'axe de rotation sur le pendule est :

$$R_\theta = mg \left(1 - \frac{m\ell^2}{J_{Oz}} \right) \sin\theta$$

Comme θ est une fonction du temps, nous voyons bien qu'il était difficile d'appréhender a priori cette force de contact. La situation est en quelque sorte la même pour la composante radiale R_r , même si le calcul est un peu plus long. En effet, nous avons $R_r = -m\ell\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$. Le problème de ce calcul est qu'il est nécessaire d'exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de la position θ pour donner une forme intéressante à R_r . On part toujours de l'équation différentielle mais on multiplie celle-ci par $\dot{\theta}$. Cela donne $\dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2\dot{\theta}\sin\theta = 0$. Cette opération de calcul est vraiment probante car elle fait apparaître deux facteurs dont on peut aisément trouver une primitive. $\dot{\theta}\ddot{\theta}$ possède comme primitive $\dot{\theta}^2/2$ et $\dot{\theta}\sin\theta$ engendre $-\cos\theta$. Le résultat de la recherche de primitives est donc : $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2\cos\theta = \text{Cte}$. Nous déterminons la constante d'intégration en utilisant les conditions initiales. Nous conservons $\dot{\theta}_{t=0} = 0$ et $\theta_{t=0} = \theta_m$. Nous avons donc $\text{Cte} = -\omega_0^2\cos\theta_m$. Ainsi, nous obtenons $\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_m)$. En injectant ce résultat dans l'expression initiale de R_r , nous aboutissons à :

$$R_r = -mg \left[\cos\theta + \frac{2m\ell^2}{J_{Oz}} (\cos\theta - \cos\theta_m) \right]$$

Nous pouvons faire quelques observations sur les formes de R_r et R_θ . Tout d'abord, comme $|\theta| < \pi/2$, nous avons toujours $\cos \theta > 0$. Comme θ_m est nécessairement l'angle maximal atteint, nous en déduisons que $\cos \theta \geq \cos \theta_m$ puisque $\theta \leq \theta_m$. Dans ces conditions, nous voyons immédiatement que $R_r < 0$, ce que nous avons prévu en disant que \vec{R} était orientée vers le haut. D'autre part, nous pouvons observer la situation lorsque $\theta = 0$. Nous avons toujours $R_r < 0$ mais $R_\theta = 0$. Lorsque le pendule passe par le point le plus bas de sa trajectoire – sa position d'équilibre naturelle –, l'action de l'axe est verticale et orientée vers le haut. Lorsque le pendule est aux extrémités de sa trajectoire $\theta = \pm\theta_m$, nous avons $R_r = -mg \cos \theta_m$ et $R_\theta = \pm mg \left(1 - \frac{m\ell^2}{J_{Oz}}\right) \sin \theta_m$. La valeur absolue de R_θ est donc maximale alors que celle de R_r est minimale.

5.3 Précession

Il existe un certain nombre de situations physiques pour lesquelles on obtiendra une équation différentielle caractéristique d'un mouvement de précession :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

Elle est écrite ici pour le moment cinétique \vec{L} pour des raisons que nous comprendrons plus tard mais on peut la rencontrer pour d'autres vecteurs... Nous allons en étudier les conséquences.

