Gradient - Statique des fluides

L'étude de la statique des fluides doit nous permettre de comprendre un certain nombre de phénomènes quotidiens de la vie courante. Toutefois, cette loi utilise, dans son formalisme, un outil mathématique qui ne nous est pas familier : le gradient. Cet outil est un opérateur qui agit sur une fonction scalaire $f(M)$ des paramètres décrivant l'espace concrétisé ici par la dépendance de f en fonction d'un point M quelconque de l'espace :

$$\overrightarrow{grad}\, f(M) = \overrightarrow{grad}\, f(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\, f(r,\theta,z) = \overrightarrow{grad}\, f(r,\theta,\varphi)$$

Nous allons commencer par nous familiariser avec le gradient.

1 Le gradient

1.1 Quelques images

Le gradient est un vecteur qui va permettre de représenter des évolutions d'une fonction scalaire de plusieurs variables puisqu'il est basé sur les dérivées partielles par rapport à chaque variable d'espace. La photographie de la figure 1 présente un paysage de montagne.

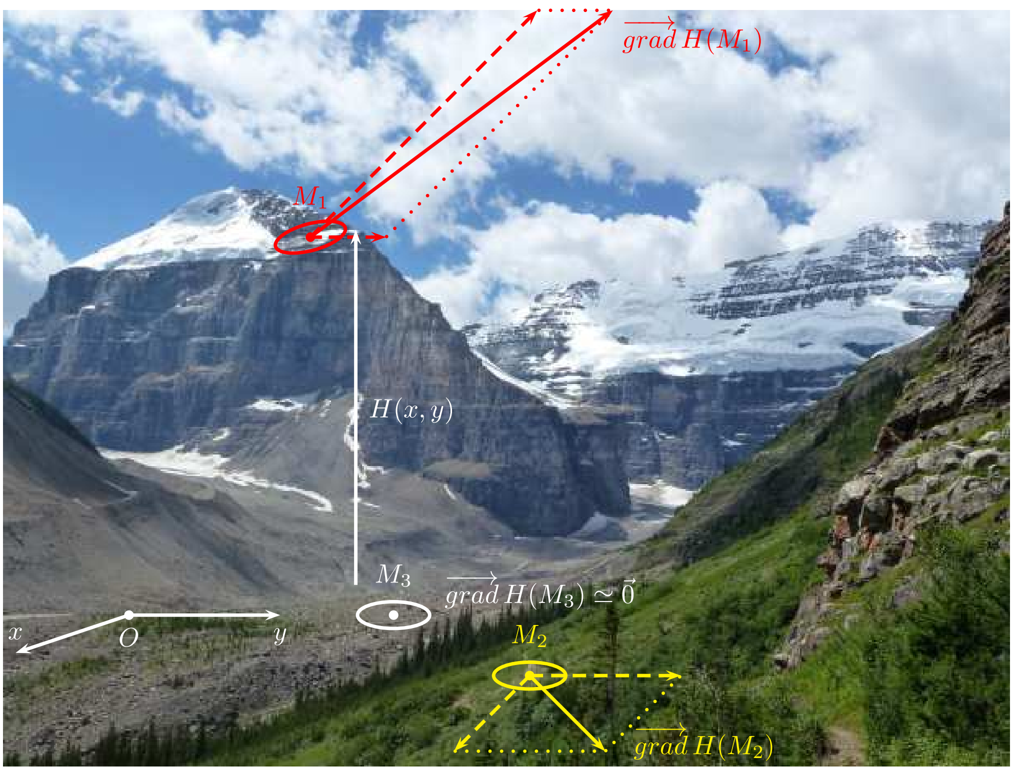

Figure 1 – Paysage de montagne et plan de référence

On définit un plan de référence pour les altitudes. La fonction $H(x,y)$ représente l'altitude de tous les points de la montagne apparaissant sur la photographie par rapport à ce plan. Au niveau du point M_1, on a une très forte déclivité lorsque l'on progresse à x croissant. Pour un déplacement selon y, on a plutôt un plan incliné modéré. Le vecteur gradient en M_1 se construit à partir de deux composantes : une forte composante négative sur l'axe Ox et une composante modérée positive sur Oy. Au niveau du point M_2, on trouve une montée modérée en suivant le sentier que l'on devine - il arrive en bas à droite de l'image -. L'altitude augmente de façon modérée sur x et de façon un peu plus importante sur y. On en déduit le vecteur gradient. Pour comprendre cette construction, il faut se référer à l'expression du gradient, ici en coordonnées cartésiennes[1].

Sur la photographie de la figure 2 à gauche, on peut voir un écran placé parallèlement[2] à la direction d'un faisceau lumineux sortant d'une lentille convergente non diaphragmée et éclairée en lumière blanche. On fait apparaître les défauts de la focalisation qui est loin d'être ponctuelle et qui comporte des lieux de

1. Même si, ici, il est sans doute assez difficile d'obtenir les coordonnées des points M_1 et M_2 à moins de disposer d'un GPS.
2. En réalité, l'écran est légèrement incliné par rapport à la direction principal d'éclairage. Il y a un effet de projection.

focalisation différents pour les différentes longueurs d'onde. On peut voir le rouge iriser le début de la tache lumineuse intense et le bleu la fin de cette même tache. Sur l'écran, on dira qu'il y a un gradient - important ici - d'intensité lumineuse. Cela signifie que l'intensité lumineuse évolue rapidement à certains endroits de l'image. La reconnaissance sur les images est en plein développement depuis quelques années. Les techniques informatiques de détermination des contours sont basées sur le gradient.

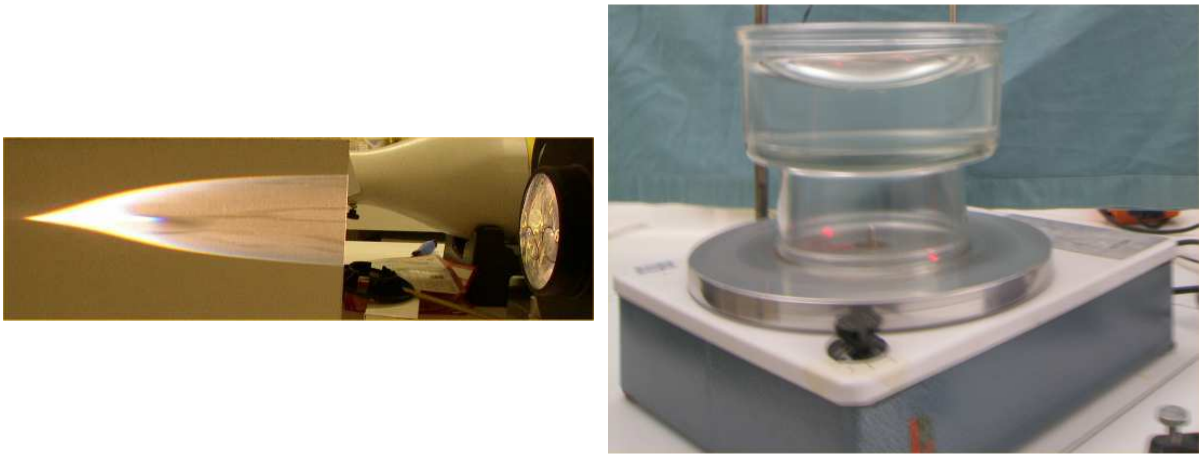

FIGURE 2 – Gradient d'intensité lumineuse à gauche - Gradient de pression à droite

Sur la photographie de la figure 2 à droite, on peut voir un cristallisoir en rotation sur une platine. Cette platine tourne à une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ constante. On peut voir la forme incurvée de la surface de l'eau qui est stable si on aboutit à un régime permanent où la vitesse de rotation est bien fixée. La surface libre de l'eau est en contact avec l'atmosphère, c'est une surface isobare à la pression atmosphérique. Compte tenu de sa forme, il devient évident qu'un gradient de pression non nul existe dans ce problème. C'est ce que nous verrons plus loin.

1.2 Expressions, propriétés

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

L'opérateur gradient vérifie une relation très importante qui permet de retrouver son expression à partir de la différentielle de la fonction scalaire f :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

On pose, en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{grad}\, f = gr_r\vec{e}_r + gr_\theta\vec{e}_\theta + gr_z\vec{e}_z$. Comme on a $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$, on obtient :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = gr_r\,\mathrm{d}r + gr_\theta\, r\mathrm{d}\theta + gr_z\,\mathrm{d}z$$

On peut donc identifier les deux expressions et obtenir les coordonnées (gr_r, gr_θ, gr_z) du gradient fournie avant :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Ceci est reproductible sur les deux autres systèmes de coordonnées.

Une propriété importante du gradient va nous être utile dans le cadre de l'étude de la statique des fluides, c'est le théorème intitulé Kelvin 2 du formulaire d'analyse vectorielle :

$$\text{Kelvin 2} \quad \oiint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}S\vec{n} = \iiint_{\tau/S} \overrightarrow{grad}\, f\,\mathrm{d}\tau$$

Ce résultat est très important lorsque l'on fait un bilan des forces de pression qui agissent sur un système comme nous allons le comprendre par la suite. Il peut se démontrer en faisant le rapprochement avec le théorème de Green-Ostrogradski.

On considère un vecteur quelconque $\vec{u}$ uniforme dans tout l'espace d'intégration. Si l'on multiplie l'intégrale de surface par ce vecteur, on obtient :

$$\vec{u}\cdot\oiint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}\vec{S} = \oiint_{\mathcal{S}} f\vec{u}\cdot\,\mathrm{d}\vec{S}$$

puisque ce vecteur constant peut entrer dans l'intégrale. On retrouve alors une intégrale sur une surface fermée du flux du vecteur $f\vec{u}$. On utilise alors le théorème de Green-Ostrogradski pour passer à une intégrale de volume :

$$\oiint_{\mathcal{S}} f\vec{u}\cdot\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\tau/S} \mathrm{div}\,(f\vec{u})\,\mathrm{d}\tau$$

Nous savons que la dérivée d'un produit en maths est du type $(uv)' = u'v + uv'$. Pour $\mathrm{div}\,(f\vec{u})$, il en va de même à ceci près que les dérivées ne sont pas aussi classiques que pour les fonctions usuelles auxquelles on appliquait la loi précédente. En effet, on a :

$$\mathrm{div}\,(f\vec{u}) = \overrightarrow{grad}\, f\cdot\vec{u} + f\mathrm{div}\,\vec{u}$$

C'est maintenant que nous profitons de la propriété du vecteur $\vec{u}$ qui est uniforme : sa divergence est nulle. Dans le cas précis, on a donc $\mathrm{div}\,(f\vec{u}) = \overrightarrow{grad}\, f\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\, f$. On peut donc remplacer dans l'intégrale de volume. Cela nous amène à l'égalité suivante :

$$\vec{u}\cdot\oiint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\tau/S} \vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\, f\,\mathrm{d}\tau = \vec{u}\cdot\iiint_{\tau/S} \overrightarrow{grad}\, f\,\mathrm{d}\tau$$

On a ressorti le vecteur $\vec{u}$ de l'intégrale du fait de son uniformité. Comme la démonstration est valable pour n'importe quel vecteur $\vec{u}$ uniforme, on peut donc conclure sur l'égalité des deux intégrales. Cela démontre le théorème dit de Kelvin 2 :

$$\oiint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}S\vec{n} = \iiint_{\tau/S} \overrightarrow{grad}\, f\,\mathrm{d}\tau$$

2 La pression, les forces de pression

2.1 Définition

La pression est définie comme un paramètre intensif qui exprime le rapport d'une force exercée sur une surface. On considère un système et une surface élémentaire de ce système qui sépare le système de l'extérieur. La force exercée par l'extérieur est, en général, répulsive[3]. On est dans le contexte du schéma de la figure 3 en isolant une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ orientée par la normale $\vec{n}$ dirigée vers l'extérieur du système.

La force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}S$ est :

$$\mathrm{d}\vec{f_p} = -p_{ext}\,\mathrm{d}S\,\vec{n} = -p_{ext}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

3. Dans le cas plus rare d'une force attractive, on parlera alors d'une pression négative. La pression est a priori une grandeur algébrique même si elle est la plupart du temps perçue comme positive.

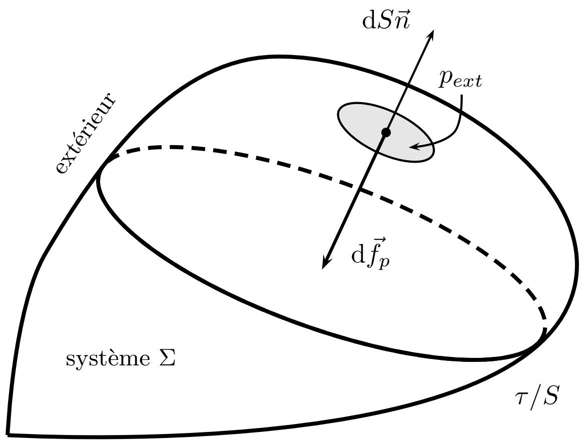

Figure 3 – Pression exercée sur un système

La résultante des forces de pression est l'intégrale sur l'ensemble de la surface fermée S qui définit le système :

$$\vec{f}_p = \oiint_S -p_{ext}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\iiint_{\tau/S} \overrightarrow{grad}\,p_{ext}\,\mathrm{d}\tau$$

Nous allons concrétiser ce résultat par une approche en coordonnées cartésiennes :

2.2 Poussée d'Archimède

La poussée d'ARCHIMÈDE fait partie des forces les plus célèbres de la Physique... Et pourtant, ce n'est pas la plus simple des forces qui soit ! On parle de poussée d'ARCHIMÈDE lorsque l'extérieur qui exerce une force répulsive sur le système est un fluide, liquide ou gazeux. La poussée d'ARCHIMÈDE est la résultante des forces de pression exercée sur le système Σ. En général, on notera alors la pression exercée par le fluide $p_{ext} = p_{\text{fluide}}$. Il arrive que l'on note aussi cette pression p mais cette notation peut entraîner des confusions avec la pression à l'intérieur du système lorsque le système est un fluide (gaz ou liquide). Il est préférable de privilégier p_{fluide} pour la pression exercée par le fluide extérieur sur le système. La poussée d'ARCHIMÈDE est donc :

$$\vec{\Pi}_A = - \iiint_{\tau/S(\Sigma)} \overrightarrow{grad}\, p_{\text{fluide}} \, \mathrm{d}\tau$$

Comme nous l'avons dit tout le problème consiste à calculer cette force. Il faut donc connaître le gradient de pression au sein du fluide qui entoure le système.

Imaginons que la pression extérieure exercée par le fluide p_{fluide} soit uniforme, on alors $\overrightarrow{grad}\, p_{\text{fluide}} = \vec{0}$. La poussée d'ARCHIMÈDE est donc nulle :

$$\text{Pression uniforme} \qquad \vec{\Pi}_A = \vec{0}$$

On peut imaginer assez facilement qu'obtenir une pression uniforme dans un fluide ne doit être chose très courante par la nature même de ce milieu très déformable. Nous verrons toutefois que cette hypothèse peut s'avérer quand même fondée. Sur le schéma de la figure 4, on note R le rayon du cylindre, h sa hauteur. La pression du fluide extérieur à Σ est notée $p_{\text{fluide}} = P_0$.

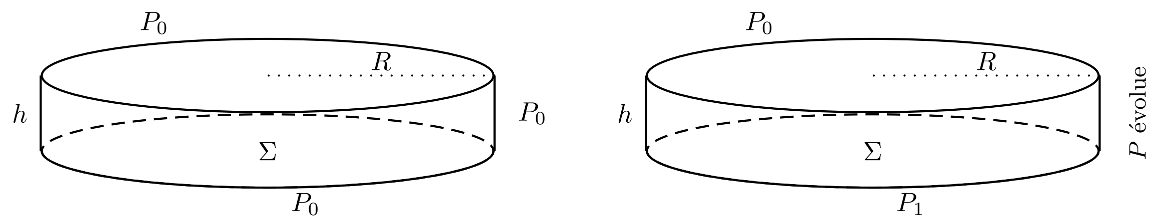

FIGURE 4 – Résultante des forces de pression sur un cylindre

2.3 Force de pression sur une hémisphère

Le calcul simple précédent nous a montré que la force exercée par le fluide de pression uniforme P_0 situé au-dessus de la surface grisée, voir la figure 5, était :

$$\vec{F} = -P_0\,\pi R^2\,\vec{e}_z$$

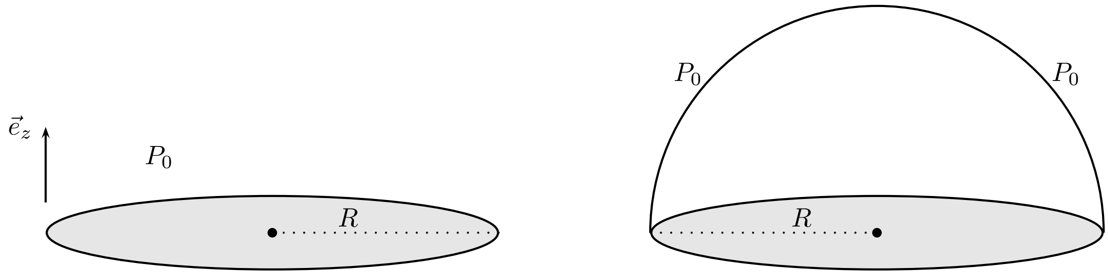

Figure 5 – Forces de pression sur le côté d'un disque, sur une hémisphère

Nous allons calculer la force due à la pression uniforme P_0 s'exerçant sur l'hémisphère.

3 Statique des fluides

3.1 Étude d'un élément de fluide

On considère comme système un élément d'un fluide de volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Ce volume $\mathrm{d}\tau$ est une portion élémentaire du fluide étudié. Souvent, on se trouvera dans le référentiel terrestre. On note μ_f la masse volumique du fluide, ce qui permet de définir la masse élémentaire $\mathrm{d}m = \mu_f\,\mathrm{d}\tau$ de l'élément de fluide. Cet élément de fluide possède une accélération $\vec{a}$ dans le référentiel d'étude. Il subit les forces suivantes :

- son poids $\mu_f \mathrm{d}\tau\,\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur
- une force électrique $\rho\mathrm{d}\tau\,\vec{E}$ s'il est chargé et subit un champ électrique $\vec{E}$, la charge volumique qui le caractérise est ρ,
- une force magnétique de Laplace[4] $\vec{j}\mathrm{d}\tau \wedge \vec{B}$ s'il est parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j}$ et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$,
- des forces de frottements, on parle pour un fluide de forces de viscosité que nous négligerons[5],
- des forces de pression dont la résultante est $\displaystyle\oiint_{\mathrm{d}S} -p_{\text{fluide}}\,\mathrm{d}^2\vec{S}$ où $\mathrm{d}\vec{S}$ est la surface fermée définissant l'élément de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ que l'on étudie.

Écrivons la relation fondamentale de la Dynamique au système, on obtient :

$$\mu_f \mathrm{d}\tau\,\vec{a} = \mu_f \mathrm{d}\tau\vec{g} + \rho\mathrm{d}\tau\,\vec{E} + \vec{j}\mathrm{d}\tau\,\wedge\vec{B} + \oiint_{\mathrm{d}S} -p_{\text{fluide}}\,\mathrm{d}^2\vec{S}$$

Dans ce bilan de force, on est amené à distinguer des types de forces : les forces volumiques qui agissent à distance comme le poids, la force électrique et la force magnétique et les forces de surface comme la force de pression exercée par le fluide qui entoure l'élément $\mathrm{d}\tau$. Il est un peu dommage dans cette relation d'avoir essentiellement des termes qui s'expriment en fonction du volume et un terme qui s'exprime en fonction de la surface. C'est à ce stade que l'on profite du théorème de Kelvin 2 pour écrire :

$$\oiint_{\mathrm{d}S} -p_{\text{fluide}}\,\mathrm{d}^2\vec{S} = -\overrightarrow{grad}\,p_{\text{fluide}}\,\mathrm{d}\tau$$

Grâce à cette transformation, on peut factoriser le volume $\mathrm{d}\tau$ dans la relation de la Dynamique et conclure sur l'équation suivante :

$$\mu_f\,\vec{a} = \mu_f\,\vec{g} + \rho\,\vec{E} + \vec{j}\wedge\vec{B} - \overrightarrow{grad}\,p_{\text{fluide}}$$

Cette équation est en général assez difficile à exploiter, heureusement qu'une majorité d'études des fluides concerne des fluides non chargés et qui ne conduisent pas le courant... Si l'on rajoute les forces liées à la viscosité on obtient une équation difficile à gérer. Cela est peut-être difficile à comprendre en ignorant que l'expression de l'accélération $\vec{a}$ de l'élément de fluide étudié est loin d'être aussi simple que celles des accélérations que l'on rencontre lorsque l'on étudie la Mécanique du point. Pour avoir une idée de la situation, on a :

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\,\vec{v}$$

En combinant l'ensemble des expressions de l'accélération et des forces, on obtient l'équation de Navier-Stokes que je vous laisse la curiosité de découvrir seul si cela vous intéresse.

Rapprochons-nous de notre programme en supposant $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$. On a donc :

$$\mu_f\,\vec{a} = \mu_f\,\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,p_{\text{fluide}}$$

C'est à partir de cette forme que nous étudierons la suite.

4. Cette force sera étudiée et justifiée ultérieurement dans le cadre de l'étude de l'Électromagnétisme.
5. Nous étudierons des situations d'équilibre où elles n'interviennent pas. Toutefois, si l'on devait les prendre en compte, il faudrait mettre en place une étude déjà approfondie de la Mécanique des fluides pour comprendre la forme mathématique de leur expression. Cela nous éloignerait beaucoup trop de ce que nous devons étudier.

3.2 Loi de la statique des fluides

Lorsque le fluide est à l'équilibre dans le référentiel d'étude, on a $\vec{a} = \vec{0}$. On peut donc en déduire la loi de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{grad}\, p_{\text{fluide}} = \mu_f\, \vec{g}$$

Dans cette expression, la loi fait apparaître l'égalité entre le gradient des forces de pression et les forces volumiques qui s'exercent sur ce même fluide. On peut donc généraliser la loi de la statique des fluides en faisant apparaître la résultante des forces volumiques s'exerçant sur le fluide définie par $\vec{f}_{vol} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\tau}$. La loi la plus générale de la statique des fluides est :

$$\overrightarrow{grad}\, p_{\text{fluide}} = \vec{f}_{vol}$$

où $\vec{f}_{vol}$ représente l'ensemble des forces volumiques que l'on prend en compte. Le poids intervient en premier lieu, mais on aussi avoir une force électrique ou une force de Laplace comme nous l'avons vu avant.

3.3 Retour sur la poussée d'Archimède

On plonge un système Σ dans un fluide. On fait l'hypothèse que le fluide est à l'équilibre. Cette hypothèse est assez systématique même pour des situations où il y peut y avoir des mouvements de fluides. L'hypothèse est souvent implicite, il suffit que les mouvements du fluide soit assez limités [6] pour que l'on puisse se placer dans le cadre de la statique, on peut parler d'approximation quasi-statique.

Nous avons vu que la poussée d'Archimède était donnée par :

$$\vec{\Pi}_A = -\iiint_{\tau/S(\Sigma)} \overrightarrow{grad}\, p_{\text{fluide}}\, \mathrm{d}\tau$$

Il suffit de remplacer le gradient de la pression par les forces volumiques. En l'occurrence, nous ne considérons que le poids du fluide : $\overrightarrow{grad}\, p_{\text{fluide}} = \mu_f\, \vec{g}$. On obtient, dans ce cas, une expression simple de la poussée d'Archimède :

$$\vec{\Pi}_A = -\iiint_{\tau/S(\Sigma)} \mu_f\, \vec{g}\, \mathrm{d}\tau = -m_{\text{fluide}}\, \vec{g}$$

C'est sous cette expression que la poussée d'Archimède est la plus connue et qu'elle se traduit par l'opposé du poids du fluide *déplacé*.

Il faut bien retenir l'origine de cette expression qui est une situation d'équilibre. La poussée d'Archimède est quoi qu'il arrive la résultante des forces de pression s'exerçant sur le système en contact avec le fluide. Son origine est le gradient de pression. C'est bien parce que la pression n'est pas uniforme sur toute l'extension spatiale du système Σ qu'il y a une force résultante. Dans de l'eau par exemple, il est évident - ce que nous allons démontrer après - que la pression est plus forte en profondeur qu'en surface. L'action de la force exercée sur la partie basse de Σ et dirigée vers le haut possède une norme plus élevée que la force exercée sur la partie haute et dirigée vers le bas. La poussée d'Archimède sera orientée vers le haut. Comme nous l'avons vu, le gradient de pression est relié aux forces qui s'exercent sur le fluide.

6. Limite assez difficile à définir, l'hypothèse d'équilibre est validée par la confrontation des résultats obtenus avec les observations.

Centre de poussée, point d'application de la poussée d'Archimède

Le problème de la stabilité d'un bateau

3.4 Statique des fluides dans un liquide incompressible

3.5 Statique des fluides dans une atmosphère isotherme

3.6 Eau dans le cristallisoir tournant

L'étude de cette situation doit s'effectuer dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ associé au cristallisoir. C'est dans ce référentiel que le fluide est à l'équilibre. La difficulté est que le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen au contraire du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ que l'on peut considérer comme galiléen. Nous étudierons dans le cours de Mécanique, la méthode à employer dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Toutefois, on peut dans le cas proposé raisonner en considérant, dans $\mathcal{R}$ une accélération non nulle pour un élément de fluide $\mathrm{d}\tau$. Voir le schéma de la figure 6.

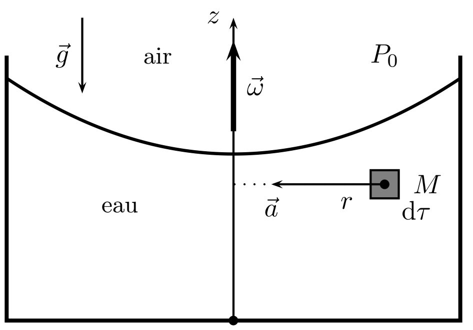

FIGURE 6 – Cristallisoir en rotation uniforme

On peut donc écrire que :

$$\mu_f\,\vec{a} = \mu_f\,\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,p_{\text{fluide}}$$

Or, en supposant la rotation uniforme et le régime permanent atteint, l'élément de fluide localisé en M effectue un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse angulaire ω. Il possède donc une accélération $\vec{a} = -\omega^2\,r\,\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r$ est le vecteur radial des coordonnées cylindriques traditionnelles. Avec $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, on arrive à la relation donnant la gradient de la pression du fluide :

$$\overrightarrow{grad}\,p_{\text{fluide}} = \mu_f\omega^2 r\,\vec{e}_r - \mu_f g\,\vec{e}_z$$

Cette expression du gradient va nous permettre de comprendre la forme prise par la surface libre de l'eau, c'est-à-dire la forme prise par l'eau qui en contact avec l'air.