

## La Terre : un référentiel non galiléen

Jusqu'à présent, vous avez toujours considéré le référentiel terrestre - c'est-à-dire le référentiel constitué par la Terre assimilée à un solide - comme galiléen. Comme nous l'avons vu dans le cadre du cours précédent de Mécanique nous avons constaté qu'assimiler la Terre à un référentiel galiléen est tout à fait possible à condition toutefois que la durée de l'expérience soit relativement brève et que l'extension spatiale sur laquelle elle se déroule soit petite. Toutes ces précautions sont indispensables car, comme GALILÉE l'a fait observer, la Terre tourne. Elle possède un mouvement de rotation qui fait, qu'en toute rigueur, les forces d'inertie doivent intervenir. Ceci est l'objet de cette étude qui nous permettra de comprendre ce qu'est le poids d'un corps, que si l'on étudie sa chute sur des hauteurs de l'ordre de 100 m, comme cela a été fait au XIX<sup>e</sup> siècle par REICH, on constate que cette chute présente ce que l'on appelle une déviation vers l'Est et une autre plus petite vers le Sud. La prise en compte du caractère non galiléen permettra aussi de comprendre des phénomènes naturels comme celui des marées ou bien la formation des cyclones dans l'atmosphère. La rotation de la Terre est à l'origine des forces d'inertie que nous rencontrerons, il est important de rappeler que c'est l'expérience du pendule de FOUCAULT qui a permis de mettre en évidence cette rotation sans qu'il soit nécessaire de se référer à des étoiles.

### 1 La Terre en rotation

#### 1.1 Précisions

La Terre effectue 366,24 rotations sur elle-même au cours d'une année mais seulement 365,24 rotations autour du Soleil. En effet, son centre effectue un mouvement elliptique - quasi circulaire - autour du Soleil. Le parcours complet de l'orbite terrestre correspond donc à une rotation supplémentaire par rapport au référentiel géocentrique qui a pour origine le centre  $O$  de la Terre et qui est défini par 3 directions pointant vers trois étoiles lointaines fixes<sup>1</sup>. La durée du jour solaire est  $T_{sol} = 24 \times 3600 = 86400$  s. On définit le jour sidéral comme la période de rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. La durée d'un jour sidéral est donc nécessairement plus petite dans le rapport  $\frac{365,24}{366,24}$  que la durée du jour solaire. On peut donc calculer la durée du jour sidéral, cette durée permet de déterminer la valeur de la vitesse de rotation de la Terre que nous noterons  $\Omega$  :

$$T_{sid} = 86164 \text{ s} \quad \text{d'où} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T_{sid}} = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le vecteur rotation de la Terre est porté par l'axe qui joint les pôles Sud et Nord, orienté du Sud vers le Nord. On a  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_{SN}$ . Dans les études mettant en jeu la rotation terrestre que nous conduirons, nous considérerons ce vecteur comme constant. Cela n'est pas tout à fait exact car la direction du vecteur rotation  $\vec{e}_{SN}$  évolue, certes lentement mais de façon perceptible, en décrivant un cône dans le référentiel géocentrique. Ce mouvement dit de *précession* s'effectue en 26000 ans. D'autre part, en raison des effets de marée que nous allons expliquer, une partie de l'énergie cinétique de rotation de la Terre est convertie en énergie interne. La valeur de la vitesse de rotation diminue. Cette diminution est minime mais elle a été mesurée. Elle correspond à une augmentation de la période de rotation de 1,6 ms par siècle! Dans la suite de cette étude, on considère toutefois  $\vec{\Omega}$  comme un vecteur constant.

En raison de la rotation de la Terre sur elle-même de vecteur  $\vec{\Omega}$ , il est tout à fait évident que le référentiel qui y est attaché appelé référentiel terrestre que nous noterons  $\mathcal{R}$  ne peut pas être considéré comme galiléen pour l'étude d'un certain nombre de phénomènes. Il est tentant de se rabattre sur le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{géo}$  lorsqu'on est à la recherche d'un référentiel galiléen. Cela peut convenir pour l'étude d'un certain nombre de phénomènes comme par exemple pour l'étude des mouvements des satellites. Toutefois, il n'est pas lui non plus galiléen. Le référentiel géocentrique n'effectue pas de rotation,  $\vec{\Omega}_{géo} = \vec{0}$ , mais il a un mouvement de translation elliptique autour du Soleil. Son caractère non galiléen impose de tenir compte d'une force d'inertie d'entraînement dans les bilans de force<sup>2</sup>. En conclusion, le vecteur rotation de la Terre est  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{géo}}$ . La non-rotation du référentiel géocentrique est à percevoir dans le mouvement du référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{géo}$  par rapport au référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}_{hélio}$ .

#### 1.2 Système de coordonnées terrestres

Comme nous évoluons de façon presque exclusive à la surface de la Terre ou à son voisinage proche, le repérage d'un point nécessite la donnée de deux paramètres complétés par la donnée d'une altitude par rapport au niveau de la mer si cela est nécessaire. La Terre étant modélisée par une sphère, il est traditionnel de fournir

1. Que l'on peut considérer comme fixes sur de très longues durées.  
2. Il n'y a pas de force de CORIOLIS du fait de l'absence de rotation.

deux angles pour repérer un point. Ces deux angles sont la latitude souvent notée  $\lambda$  et la longitude notée  $\varphi$ . Ces coordonnées sont représentées sur le schéma de la figure 1 pour l'hémisphère Nord. Par rapport aux coordonnées sphériques, on note que la latitude  $\lambda$  et l'angle  $\theta$  sont liés par la relation  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Pour une bonne compréhension des phénomènes se produisant à la surface de la Terre, il est important de maîtriser le repérage et de connaître les directions classiques comme le Sud, le Nord, l'Est, l'Ouest et la verticale locale que nous allons définir dans le cadre de la définition du poids d'un corps.

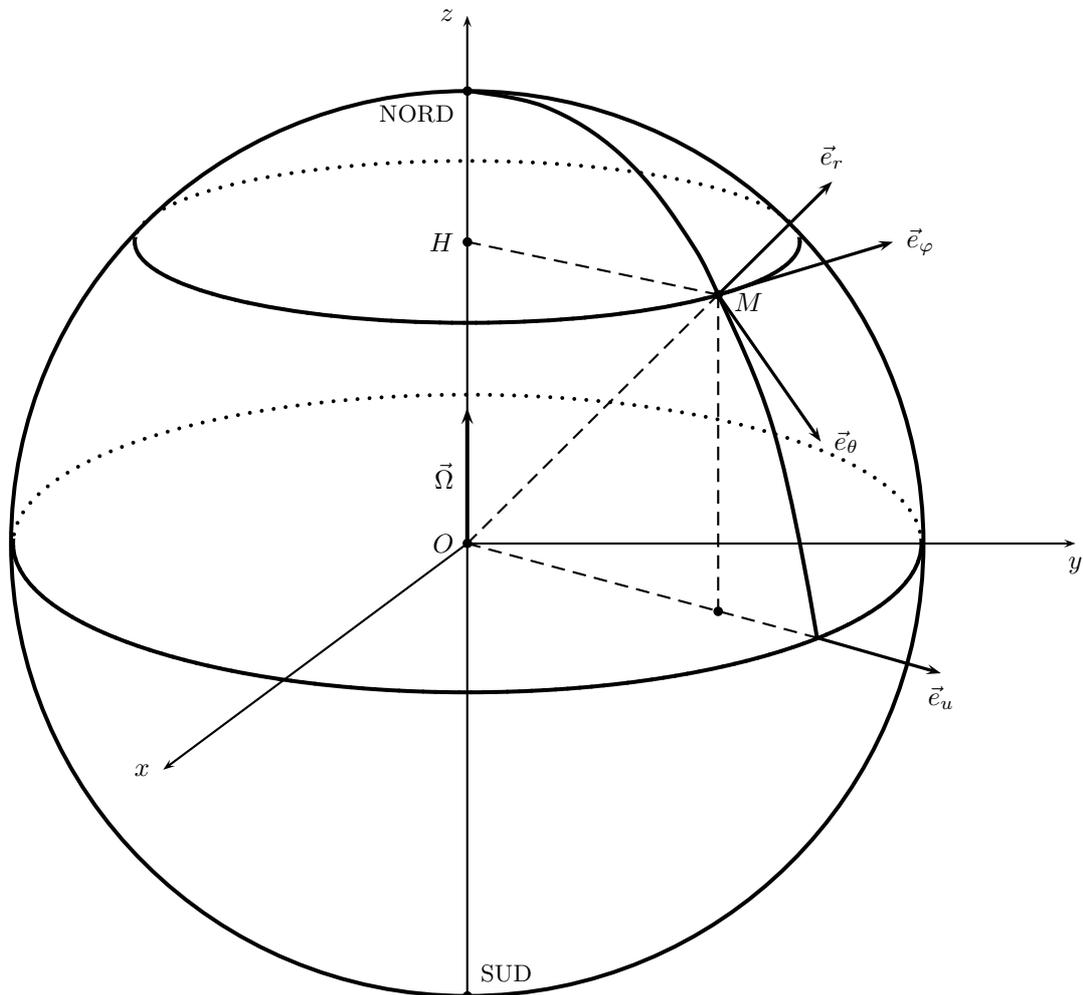


FIGURE 1 – Repérage sur Terre

## 2 Le poids d'un corps

### 2.1 Définition

On considère un système appelé *fil à plomb*. Il s'agit d'une masse ponctuelle  $m$  suspendue par un fil à une potence fixée au niveau du sol. Lorsque la masse  $m$  est à l'équilibre dans le référentiel terrestre, son accélération est nulle. On définit alors le poids de ce corps. Le poids est la force opposée à la tension du fil. La verticale locale est définie par la direction du poids. Le poids du corps est en général exprimé par la relation :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

où  $\vec{g}$  est le champ de pesanteur. La verticale locale est la direction du champ de pesanteur  $\vec{g}$ . Si l'on effectue un bilan des forces sur la masse  $m$ , elle subit la force gravitationnelle de la Terre et la tension du fil  $\vec{T}$ . L'étude de l'équilibre est effectuée dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . Il faut donc ajouter à ce bilan des forces les forces d'inertie. Ici, nous étudions un état d'équilibre dans le référentiel, la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  est nulle  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$ . Par conséquent, la force de CORIOLIS est nulle puisqu'elle s'exprime par :  $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ . Il reste donc la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{F}_{ent} = -m\vec{a}_{ent} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$ . Le principe fondamental de la Dynamique nous fait donc écrire :

$$m\vec{a}_{M/R} = \vec{0} = -\frac{\mathcal{G}mM}{R^2}\vec{e}_r + \vec{T} - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = \vec{T} + m\vec{g}$$

où  $M = 6 \times 10^{24}$  kg est la masse de la Terre et  $R = 6400$  km son rayon. La constante de la force d'interaction gravitationnelle est  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## 2.2 Calcul du champ de pesanteur

On constate que le vecteur position  $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM}$  possède une contribution parallèle à  $\vec{\Omega}$ . Lorsqu'on effectue le produit vectoriel  $\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ , on peut donc écrire que  $\vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{OH} + \vec{HM}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{HM}$ . Comme  $\vec{HM}$  est perpendiculaire au vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ , on peut donc écrire que :  $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -\Omega^2 \vec{HM}$ . Le champ de pesanteur donne la direction de la verticale locale et s'exprime selon :

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{R^2}\vec{e}_r + \Omega^2 \vec{HM} = \vec{G} + \Omega^2 \vec{HM}$$

Sur la schéma de la figure 2, on met en évidence l'écart qui existe entre la direction du centre de la Terre - considérée comme sphérique<sup>3</sup>. Bien que la contribution du terme  $\omega^2 \vec{HM}$  soit relativement faible, il n'est pas possible de l'ignorer. On trouve numériquement  $\frac{\mathcal{G}M}{R^2} = 9,770 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  alors que la valeur maximale du terme d'entraînement est obtenue à l'équateur avec  $\Omega^2 R = 0,034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

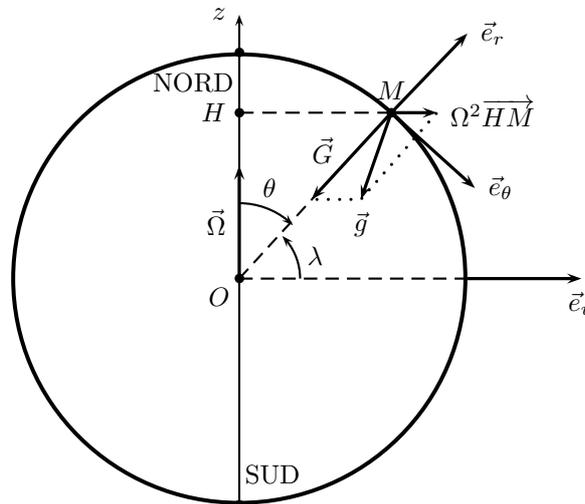


FIGURE 2 – Champ de pesanteur et verticale locale

Le champ de pesanteur évolue en fonction de la latitude. En effet  $\vec{HM} = R \sin \theta \vec{e}_u = R \cos \lambda \vec{e}_u$ . Or, on a  $\vec{e}_u = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$  ou bien encore  $\vec{e}_u = \cos \lambda \vec{e}_r + \sin \lambda \vec{e}_\theta$ . Le champ de pesanteur s'exprime alors dans la base des coordonnées sphériques selon :

$$\vec{g} = \left( \Omega^2 R \cos^2 \lambda - \frac{\mathcal{G}M}{R^2} \right) \vec{e}_r + \Omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda \vec{e}_\theta$$

La norme du champ de pesanteur est donc :

$$g = \sqrt{\frac{\mathcal{G}^2 M^2}{R^4} + \Omega^4 R^2 \left( 1 - \frac{2\mathcal{G}M}{R^3 \Omega^2} \right) \cos^2 \lambda}$$

Le champ de pesanteur évolue entre le pôle où il est colinéaire à l'axe des pôles et l'équateur. En réalité, les variations du champ de pesanteur ne sont pas uniquement dues au terme d'inertie d'entraînement que nous venons de mettre en évidence. Il faut aussi prendre en compte la forme non sphérique de la Terre. On admet les valeurs suivantes :  $g = 9,830 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  au niveau des pôles,  $9,780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  à l'équateur. Pour notre latitude habituelle, on peut utiliser la valeur de  $9,807 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  établie pour  $\lambda = 45^\circ$ .

3. En raison sa rotation sur elle-même et du fait de la présence en surface de la Terre de grandes masses d'eau, la Terre n'est pas sphérique mais un peu aplatie aux pôles. À l'opposé, elle présente un renflement au niveau de l'équateur.

### 3 Mouvements dans le champ de pesanteur

L'objectif de ce paragraphe n'est pas d'aborder les mouvements classiques avec ou sans<sup>4</sup> frottement avec l'air. Il s'agit d'évoquer des mouvements où le caractère non galiléen du référentiel terrestre se manifeste.

#### 3.1 La force de Coriolis

Dès qu'il y a mouvement dans le référentiel terrestre, il faut ajouter au bilan des forces s'exerçant sur le mobile, la force de CORIOLIS puisque maintenant - contrairement à la situation précédente d'équilibre qui nous a permis de définir le poids d'un corps - la vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ . Lorsque l'on écrit la relation de la dynamique au voisinage de la surface de la Terre, on a donc :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{\mathcal{G}mM}{R^2}\vec{e}_r - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{F}_{\text{autres}}$$

où  $\vec{F}_{\text{autres}}$  représente l'ensemble des forces supplémentaires liées à des interactions entre le mobile et son environnement. L'équation précédente se simplifie en introduisant le champ de pesanteur. On obtient :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{F}_{\text{autres}}$$

La force de CORIOLIS correspond à une contribution à l'accélération du mobile due au terme  $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ . Il est naturel de s'interroger sur son ordre de grandeur. Comme  $\Omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  est fixée puisqu'il s'agit de la vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique, cette contribution peut paraître automatiquement faible mais nous ne savons rien de la vitesse. Il est pertinent de comparer  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $2\Omega v = 1,5 \times 10^{-4}v$  où  $v$  sera exprimée en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il faut donc comparer environ  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  à  $10^{-4}v$  ! Cela signifie que pour que la contribution de CORIOLIS corresponde à environ 1% de la pesanteur, il faut une vitesse de l'ordre  $1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui fait la bagatelle de  $3600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . La force de CORIOLIS restera toujours modeste dans le référentiel terrestre mais ce n'est pas pour autant que ces effets ne sont pas perceptibles comme nous allons le voir dans ce qui suit.

#### 3.2 Le pendule de Foucault

L'expérience de 1852 de LÉON FOUCAULT au Panthéon a déjà été évoquée dans le précédent cours de Mécanique. Le pendule était constitué d'une masse  $m = 30 \text{ kg}$  accrochée au sommet du dôme du Panthéon constituant un pendule de longueur  $\ell = 67 \text{ m}$ . Écarté de sa position d'équilibre, le pendule oscille dans un plan fixé par les conditions initiales. Ce plan reste fixe dans le référentiel géocentrique car les seules forces appliquées dans ce référentiel considéré comme galiléen sont l'interaction gravitationnelle et la tension du fil, bien sûr si on néglige tout phénomène dissipatif avec l'air par exemple. Il est par contre évidemment que le plan du mouvement tourne dans le référentiel terrestre. La trace du mouvement du pendule dans le plan horizontal local tourne progressivement. FOUCAULT avait prédit que son pendule, installé au niveau du pôle Nord, tournerait sur la période correspondant à un jour sidéral, c'est-à-dire environ 24 h. Le Panthéon à Paris étant situé à la latitude  $\lambda = 48^\circ 51'$ , la période de rotation du plan d'évolution du pendule est de 31 h 46 min. Ceci peut s'expliquer simplement sur le schéma de la figure 3.

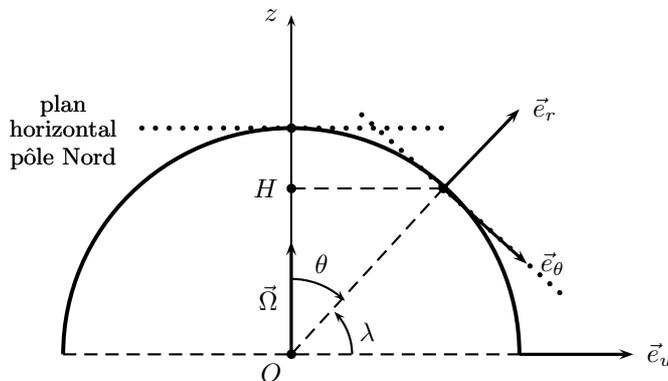


FIGURE 3 – Rotation du plan du pendule de FOUCAULT

4. La trajectoire suivie étant parabolique dans le champ de pesanteur uniforme.

La vitesse de rotation de la trace du plan d'oscillation du pendule dans le plan horizontal à Paris est donnée par :

$$T_{\text{Paris}} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} \simeq 32 \text{ h}$$

Si l'on étudie le pendule dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ , on écrit :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_{\text{géo}}} = -\frac{GmM}{R^2}\vec{e}_r + \vec{F}_{\text{fil}}$$

Par contre si l'on écrit l'équation du mouvement du pendule dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ , on a :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{GmM}{R^2}\vec{e}_r - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{F}_{\text{fil}} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{F}_{\text{fil}}$$

Si on projette cette équation dans le plan horizontal local de Paris équipé du repère de coordonnées  $(x_p, y_p)$ , on obtient les équations différentielles suivantes<sup>5</sup> où l'on voit la traduction de la force de CORIOLIS :

$$\begin{cases} \ddot{x}_p - 2\Omega \sin \lambda \dot{y}_p + \frac{g}{\ell} x_p = 0 \\ \ddot{y}_p + 2\Omega \sin \lambda \dot{x}_p + \frac{g}{\ell} y_p = 0 \end{cases}$$

L'étude de ce système d'équations s'effectue en complexes en posant  $\underline{u} = x_p + iy_p$ . L'équation différentielle est alors :

$$\ddot{\underline{u}} + i2\Omega \sin \lambda \dot{\underline{u}} + \omega_0^2 \underline{u} = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

En tenant compte du fait que  $\omega_0 \gg \Omega$ , on détermine les racines de l'équation caractéristique :

$$r = -i\Omega \sin \lambda \pm i\omega_0$$

La forme imaginaire de ces racines montre que l'on a des solutions oscillantes pour chaque contribution. Le terme rapide est celui de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , c'est le mouvement classique du pendule. L'autre terme est une oscillation lente à la pulsation  $\Omega \sin \lambda$ . C'est ce facteur qui exprime la rotation de la trace du plan du mouvement du pendule dans le plan horizontal local  $(x_p, y_p)$ .

### 3.3 Déviation vers l'Est

Ce constat a été effectué en 1833 par l'allemand FERDINAND REICH qui a mesuré une déviation vers l'Est de 28 mm pour une masse tombant dans un puits de mine sur la hauteur  $h = 158$  m. Cet écart de 28 mm a été mesuré par rapport au point d'impact qui aurait été obtenu si la masse en chute libre avait été suivie la verticale locale.

L'étude de cette chute s'effectue dans le référentiel terrestre non galiléen  $\mathcal{R}$ . On néglige les frottements exercés par l'air. L'équation du mouvement du corps en chute libre est donc :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Une étude quantitative sera effectuée en exercice. Ici, nous nous contenterons d'une approche qualitative. Dans un cas comme dans l'autre, on est amené à faire des approximations tout à fait raisonnables puisque la force de CORIOLIS est faible devant le poids. On considère que le champ de pesanteur  $\vec{g}$  se situe selon  $-\vec{e}_r$ , l'angle  $\varepsilon$  entre sa direction réelle et  $-\vec{e}_r$  étant vraiment faible comme on l'a vu avant. On considère que la vitesse du mobile en chute libre est donc orientée selon  $\vec{e}_r$ , voir le schéma de la figure 4.

La situation est donc la suivante :  $\vec{g} = -g\vec{e}_r$ ,  $\vec{v} = -v\vec{e}_r$  et  $\vec{\Omega} = \Omega(\sin \lambda \vec{e}_r - \cos \lambda \vec{e}_\theta)$ . Le produit vectoriel représentant la force de CORIOLIS est donc :

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\Omega(\sin \lambda \vec{e}_r - \cos \lambda \vec{e}_\theta) \wedge (-v)\vec{e}_r = 2m\Omega v \cos \lambda \vec{e}_\varphi$$

Cette force est bien orientée vers l'Est (sens de  $+\vec{e}_\varphi$ ) comme cela a été vérifié par REICH. Si l'on effectue un raisonnement un peu moins approché, on peut mettre en évidence un second effet de la force de CORIOLIS. Il se produit une légère déviation vers le Sud. Les ordres de grandeurs des deux déviations ne sont pas les mêmes. La déviation vers l'Est est de l'ordre du centimètre alors que celle vers le Sud est de l'ordre du micromètre.

5. En négligeant le mouvement sur la verticale locale  $z_p$ , ce qui revient à écrire que  $F_{\text{fil}} \simeq mg$ .

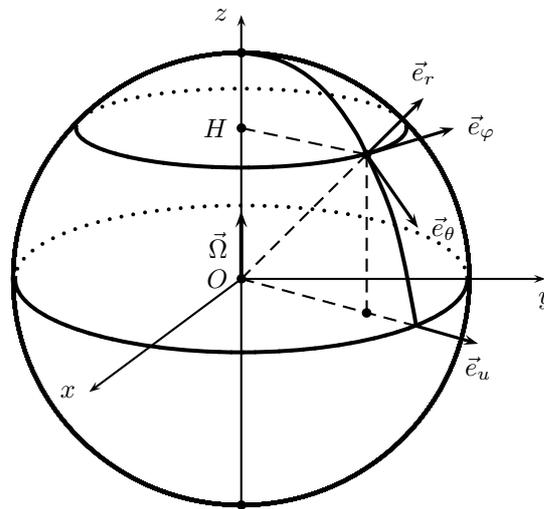


FIGURE 4 – Chute libre et déviation vers l’Est

### 3.4 Cyclones

Sur Terre, trois termes désignent le même phénomène même si les situations ne sont jamais strictement équivalentes. Le terme cyclone est le terme générique qui devient un ouragan lorsqu’il se produit dans l’Atlantique Nord ou dans le Pacifique Nord-Est. En Asie de l’Est, on parle de typhon. Dans les autres océans, on utilise plutôt le terme cyclone. Vous pouvez voir une photographie du cyclone Katrina qui a touché les Caraïbes et les États-Unis en 2005 à la figure 5. Les cyclones prennent naissance dans les océans de la zone intertropicale à la faveur d’une température de l’eau élevée qui favorise la formation de vapeur d’eau dans l’atmosphère. La force de CORIOLIS explique le sens de rotation des ces immenses systèmes dépressionnaires.



FIGURE 5 – Cyclone Katrina - Août 2005

L'équation régissant l'écoulement des fluides est une application du principe fondamental de la Dynamique, que l'on pratique ici dans le référentiel terrestre non galiléen. Le système étudié est une particule élémentaire de volume de fluide  $d\tau$  de masse  $dm = \mu d\tau$ . En lui appliquant la loi précédente et en factorisant pour chaque terme intervenant le volume  $d\tau$ , on aboutit à l'équation suivante qui, finalement, est l'équation<sup>6</sup> régissant l'écoulement d'un volume unitaire de fluide :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} - 2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

Dans cette équation, le premier membre représente la quantité d'accélération. Dans le second membre, on reconnaît la contribution du poids  $\mu \vec{g}$ , celle des forces de pression que nous avons déjà rencontrées dans l'étude de la Statique des fluides en  $-\overrightarrow{\text{grad}} P$ , la prise en compte des forces de viscosité entre les particules de fluides (frottements) en  $\eta \Delta \vec{v}$  (laplacien de  $\vec{v}$ ). Il reste, enfin, la force, ici volumique, de CORIOLIS en  $-2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ . Pour expliquer le sens de rotation des cyclones, notre attention ne sera portée que sur deux des termes de cette équation : celui des forces de pression et celui de la force de CORIOLIS.

On travaille dans le plan horizontal local à proximité du point  $M$  centre du cyclone. Ce plan sera assimilé au plan  $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  de nos représentations précédentes de la Terre comme à la figure 1. Dans un cyclone, la pression au centre du cyclone - dans l'œil du cyclone - est faible comparativement à la pression sur les bords. Le gradient de pression est donc orienté vers l'extérieur et son opposé  $-\overrightarrow{\text{grad}} P$  vers l'intérieur. Ce constat explique que la vitesse des vents est orientée vers le centre. Plaçons-nous sur le méridien passant par le point  $M$ , un peu au Sud de celui-ci. D'après ce que nous venons de dire, nous avons  $\vec{v} = -v\vec{e}_\theta$ . Nous allons évaluer la force de CORIOLIS qui agit sur le fluide :

$$-2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2\mu \Omega (\sin \lambda \vec{e}_r - \cos \lambda \vec{e}_\theta) \wedge (-v)\vec{e}_\theta = 2\mu \Omega \sin \lambda v \vec{e}_\varphi$$

La force de CORIOLIS est orientée selon le vecteur unitaire  $\vec{e}_\varphi$ , elle provoque la rotation du fluide dans le cyclone dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, voir la figure 5.



FIGURE 6 – Ouragan Irma - Septembre 2017

6. Cette équation est hors programme. La forme que prend l'accélération dans le cadre de l'étude des fluides ne peut être comprise sans qu'il soit effectué une introduction à la Cinématique des fluides.



FIGURE 7 – Ouragan Florence - Septembre 2018

Sur la photographie de la figure 7, on peut voir le cyclone Florence qui a particulièrement touché la Caroline aux USA en septembre 2018. Sur l'image, on peut voir en même temps deux autres cyclones plus au large des côtes. En dessous à la figure 8, un second cyclone dévastateur qui a touché la Floride. On peut très bien distinguer l'œil du cyclone.



FIGURE 8 – Ouragan Michaël - Octobre 2018

Les cyclones existent aussi sur Jupiter. Voici des photographies<sup>7</sup> des pôles Nord de la figure 9 et Sud de la figure 10. Les images captées dans l'infrarouge par la sonde *Juno* sont en fausses couleurs, le jaune correspondant à  $-13^{\circ}\text{C}$ , le rouge sombre à  $-83^{\circ}\text{C}$ .

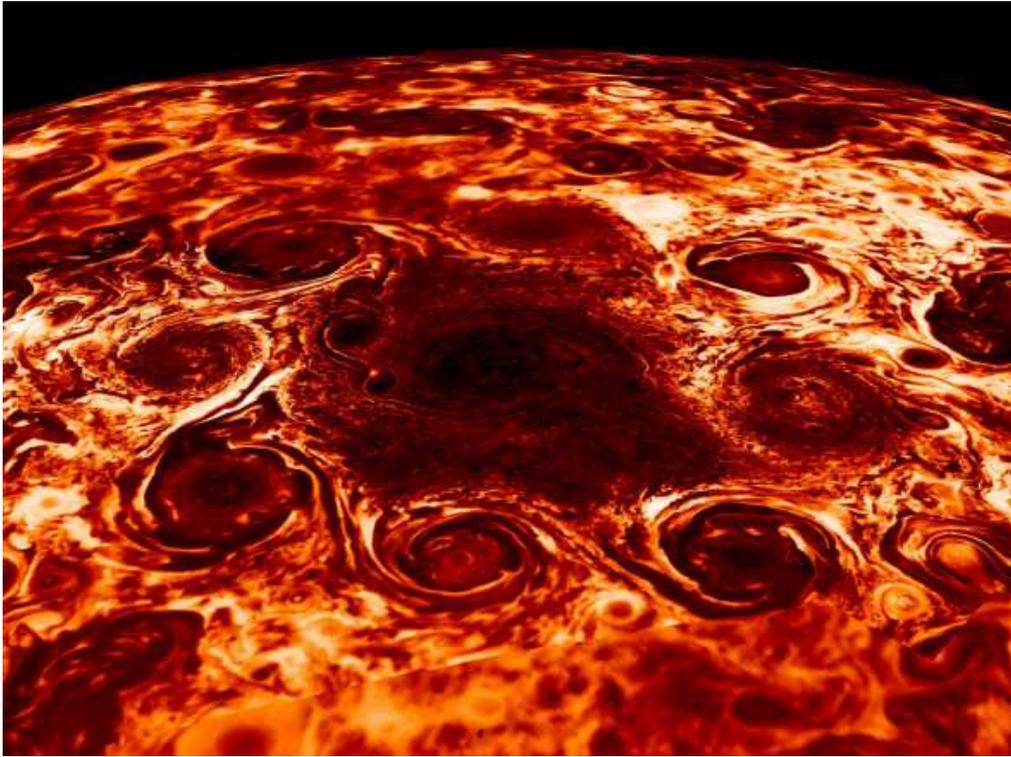


FIGURE 9 – Pôle Nord de Jupiter - Image NASA

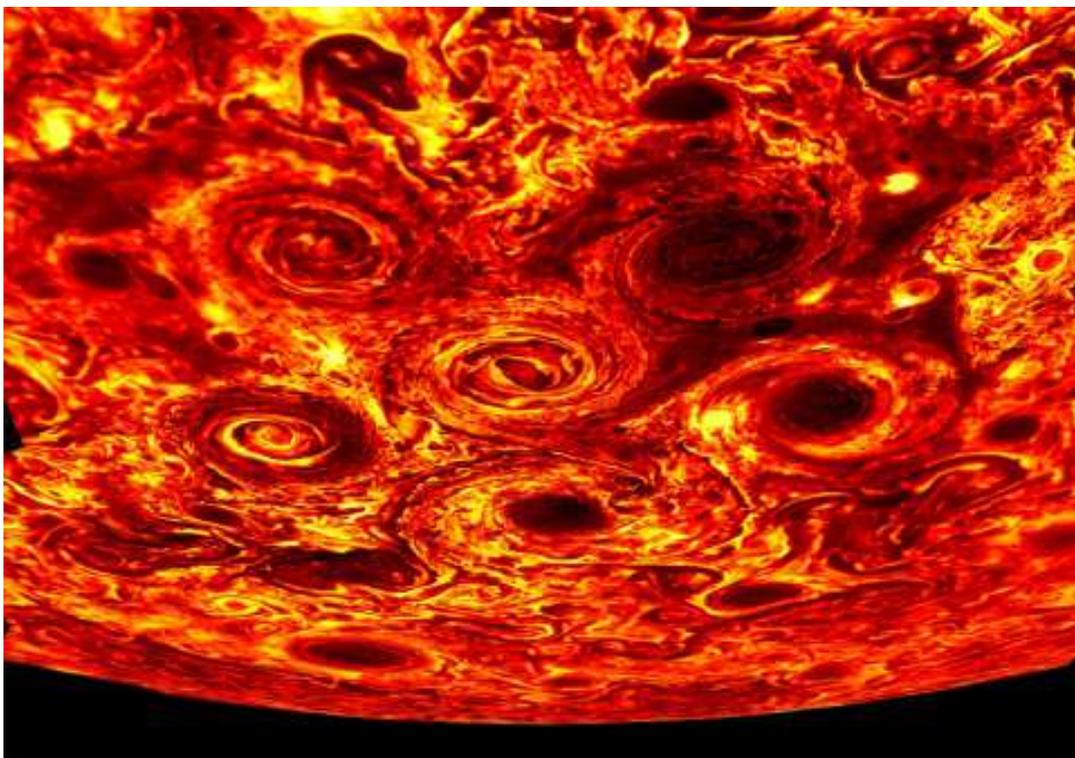


FIGURE 10 – Pôle Sud de Jupiter - Image NASA

7. Les images ont été obtenues sur le blog de M. Guillaume Cannat, Le Monde, Internet.

Jupiter est une planète géante, de rayon 10 fois la Terre essentiellement liquide avec une fine atmosphère gazeuse. Elle est composée à 86% de dihydrogène  $H_2$  et 13% d'hélium  $He$ . Le reste de la composition (1%) est dominée par le méthane  $CH_4$  et l'eau  $H_2O$ . Sur la photographie de la figure 11, on peut voir l'évolution importante de la température sur la taille des cyclones qui est de l'ordre de 5 000 km. Le gradient de température est donc assez important, tout comme le gradient de pression pour générer de telles structures météorologiques. Les vitesses des vents dans ces cyclones sont estimées de l'ordre de  $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  pouvant atteindre  $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

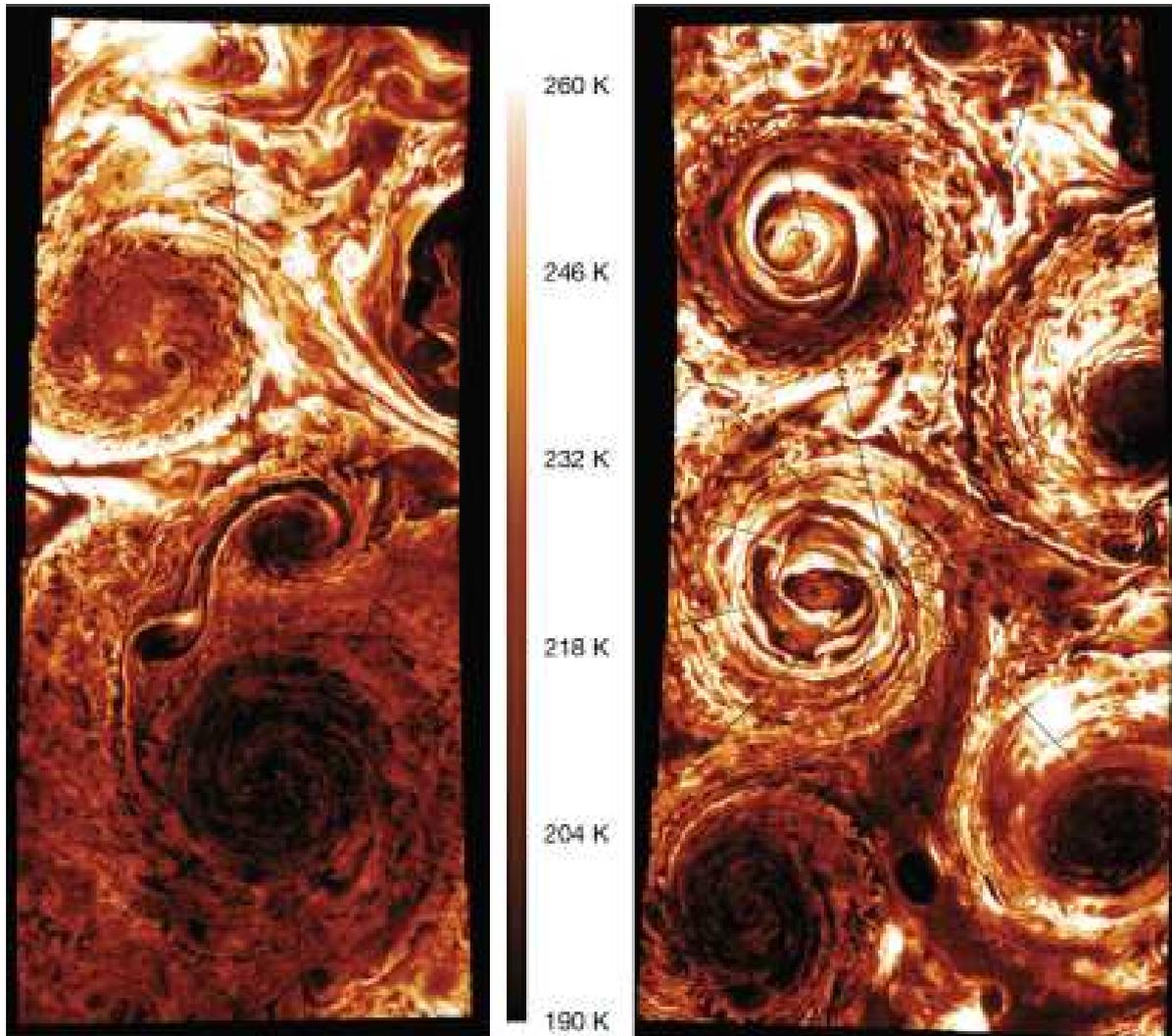


FIGURE 11 – Jupiter : pôle Nord à gauche, pôle Sud à droite - Image NASA

## 4 Impesanteur, microgravité

### 4.1 Définition

On parle d'impesanteur - de préférence à apesanteur afin d'éviter la difficulté de langage entre l'apesanteur et la pesanteur - dans des situations particulières où l'effet du poids ne se fait plus sentir alors que le système étudié est pourtant toujours soumis soit au champ de pesanteur terrestre, soit au champ gravitationnel. La notion d'impesanteur est à associer à une absence totale de poids ressenti ? Ceci peut très bien ne se produire qu'en un seul point de l'espace. La limitation de l'effet à un point de l'espace peut paraître très contraignante, toutefois, dans un volume d'extension raisonnable autour de ce point, le champ de pesanteur - ou de gravitation - ressenti est très faible. C'est pourquoi on parle plutôt de microgravité.

### 4.2 Impesanteur ou microgravité au voisinage de la Terre

Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , on peut se trouver en situation d'impesanteur lorsque l'accélération que l'on subit est nulle malgré la présence du poids. Évidemment cette situation est envisagée sans qu'aucune force de contact - comme celle exercée par un support - ne soit présente. On ne dit pas qu'un objet posé sur une table est en état d'impesanteur. En effet, dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  considéré comme galiléen, il subit comme force son poids<sup>8</sup>  $m\vec{g}$  et la force de réaction de la table  $\vec{N}$ . L'objet est immobile sur la table, on a donc  $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}$ . Cette situation ne correspond pas à l'impesanteur. Celle-ci se manifeste dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en mouvement dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . Les situations d'impesanteur s'observent dans les stations spatiales en orbite autour de la Terre ou dans des avions dédiés comme on peut le voir sur les photographies de la figure 12 où un Airbus A300 Zéro G est photographié. On donne à cet avion une vitesse orientée vers le haut et on coupe les moteurs pendant environ une minute. L'avion suit une trajectoire parabolique, c'est au cours de cette phase que se produit la situation d'impesanteur.



FIGURE 12 – Airbus A300 Zéro G et impesanteur

8. Qui prend en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre.

On considère un référentiel attaché au centre de gravité de l'avion  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . On étudie le mouvement d'une personne de masse  $m$  : elle subit comme force son poids  $m\vec{g}$  et la force d'inertie d'entraînement liée au mouvement de l'origine du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . La personne est supposée être en contact avec une paroi ou un support exerçant la force  $\vec{N}$ . L'équation de son mouvement est donc :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_{ent \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

On étudie maintenant le mouvement de l'avion dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. L'avion subit son poids  $M_a\vec{g}$ , la force consécutive à l'expulsion d'une grande quantité de gaz brûlés par les réacteurs souvent nommée poussée des réacteurs  $\vec{\Pi}$ . Cette présentation un peu simpliste des choses permet toutefois de comprendre pourquoi on observe l'impesanteur. L'équation du mouvement du centre de gravité de l'avion est donc :

$$M_a\vec{a}_{A/\mathcal{R}} = M_a\vec{g} + \vec{\Pi}$$

Lorsque les moteurs sont coupés  $\vec{\Pi} = \vec{0}$ , l'accélération du centre de gravité de l'avion par rapport au référentiel terrestre s'identifie donc au champ de pesanteur :

$$\vec{a}_{A/\mathcal{R}} = \vec{g}$$

Revenons à l'étude du mouvement de la personne dans l'avion. Compte tenu de ce que nous venons de voir, l'accélération d'entraînement  $\vec{a}_{ent \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  correspond à  $\vec{a}_{A/\mathcal{R}} = \vec{g}$ . Nous avons donc :

$$\vec{a}_{ent \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{g}$$

L'équation du mouvement de la personne dans l'avion devient :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = \vec{N}$$

Cette équation n'est valable que lorsque la personne exerce une force sur le plancher qui sert de support. En réalité, c'est au moment où  $\vec{a}_{ent \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{g}$  qu'elle pourra quitter le contact avec le plancher de l'avion en poussant un tout petit peu sur ses pieds. Notons que si elle pousse un peu trop fort sur ses pieds, elle pourrait bien se taper la tête dans le plafond de l'avion car dès que le contact avec le support est rompu, l'équation de son mouvement est :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = \vec{0} \quad \vec{v}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{Cte} \quad \text{ou équilibre}$$

Une fois la poussée exercée sur la paroi, le centre de gravité de la personne va se déplacer à vitesse constante... jusqu'à ce qu'elle rencontre l'autre paroi de l'avion. C'est ce type de situation qui donne les images toujours autant appréciées de personnes ou d'objets en situation d'impesanteur. Tout se passe comme si la personne ne subissait plus son poids, d'où l'expression *Zéro G*. Pendant la phase du vol parabolique qui permet d'observer l'impesanteur ou la microgravité, on peut constater qu'en l'absence de toute autre force que le poids - compensé par la force d'inertie d'entraînement, le mouvement est rectiligne et uniforme. Si la vitesse initiale du système est nulle alors le système est à l'équilibre.

En 2021, deux vols à haute altitude ont été réalisés par Richard Branson avec son véhicule VSS Unity de l'entreprise Virgin Galactic et par Jeff Bezos grâce au New Shepard de Blue Origin, voir les photographies de la figure 13. Ces vols ont été présentés comme le début du tourisme spatial. Il est plus raisonnable de parler de vols à la limite de l'atmosphère - pour l'instant -. En effet, la hauteur de l'atmosphère de la Terre est d'environ 100 km, c'est à cette altitude que l'on place la limite entre l'atmosphère et l'espace. Ces deux vols ont atteint une altitude d'environ 90 à 100 km. Pourquoi évoquer ces vols dans le cadre de notre étude de la microgravité ? C'est parce que l'un des intérêts de pouvoir placer les voyageurs dans une situation de d'impesanteur pendant une durée de quelques minutes, 10 minutes représentant une durée maximale de microgravité. Au cours de ses voyages, on gagne un facteur d'environ 10 sur la durée pendant laquelle on peut se retrouver en impesanteur par rapport à l'Airbus A300 Zéro G. On pourra toujours faire remarquer que pour ressentir des effets voisins de la microgravité les parcs d'attraction spécialisés ou les fêtes foraines sont nettement plus abordables sur le plan financier...



FIGURE 13 – VSS Unity de Virgin Galactic et New Shepard de Blue Origin

### 4.3 Impesanteur ou microgravité dans une station spatiale

La situation d'impesanteur dans une station spatiale en orbite autour de la Terre où on peut voir les astronautes nager s'explique d'une façon légèrement différente du cas précédent. On étudie le mouvement de l'astronaute dans le référentiel  $\mathcal{R}_s$  attaché au centre de gravité  $G_s$  de la station spatiale et en translation par rapport au référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{géo}$ . L'astronaute ( $as$ ) subit l'attraction gravitationnelle de la Terre de masse  $M$ , une force de contact avec la paroi de la station  $\vec{N}$  et la force d'inertie d'entraînement lié au mouvement de  $G_s$  dans le référentiel géocentrique. L'équation de son mouvement est :

$$m\vec{a}_{as/\mathcal{R}_s} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r_{as-T}^2}\vec{e}_{as} + \vec{N} - m\vec{a}_{ent\ as/\mathcal{R}_{géo}}$$

On étudie maintenant le mouvement du centre de gravité  $G_s$  de la station spatiale par rapport au référentiel géocentrique. Elle ne subit que l'attraction gravitationnelle de la Terre. On a donc :

$$m_s\vec{a}_{G_s/\mathcal{R}_{géo}} = -\frac{\mathcal{G}m_sM}{r_{G_s-T}^2}\vec{e}_{G_s}$$

Grâce à l'équation précédente, on peut déterminer l'accélération d'entraînement à prendre en compte dans l'étude du mouvement de l'astronaute puisque l'on a :

$$\vec{a}_{ent\ as/\mathcal{R}_{géo}} = \vec{a}_{G_s/\mathcal{R}_{géo}} = -\frac{\mathcal{G}M}{r_{G_s-T}^2}\vec{e}_{G_s}$$

L'identification entre ces deux accélérations n'est valable que si  $r_{G_s-T} = r_{as-T}$  et si  $\vec{e}_{as} = \vec{e}_{G_s}$ . Au niveau du centre de gravité de la station spatiale - ou tout au moins au voisinage de celle-ci - on constate comme dans le cas de l'avion que la force d'inertie d'entraînement compense la force d'interaction gravitationnelle. On est à nouveau dans le même cas de figure qu'avec l'avion : la station spatiale peut être considérée comme un référentiel inertiel. On a donc une situation d'impesanteur puisque si l'astronaute ne touche pas une paroi  $\vec{N} = \vec{0}$ , on peut écrire :

$$m\vec{a}_{as/\mathcal{R}_s} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{e}_r + \vec{N} - m\vec{a}_{ent\ as/\mathcal{R}_{géo}} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{e}_r + m\left(\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\vec{e}_r\right) = \vec{0}$$

La dimension d'une station spatiale étant très petite devant les distances  $r$  intervenant dans la force d'interaction gravitationnelle, on peut en conclure que la situation d'impesanteur se vérifiera très correctement dans tout le volume de la station spatiale où, par conséquent, on aura :

$$m\vec{a}_{as/\mathcal{R}_s} = \vec{0} \quad \vec{v}_{as/\mathcal{R}_s} = \overrightarrow{Ct\acute{e}} \quad \text{ou équilibre}$$

## 5 Les marées

### 5.1 Champ des marées

Nous venons de voir dans l'étude précédente que l'état d'impesanteur régnant dans une station spatiale pouvait s'étendre du centre de gravité de la station à l'ensemble de son volume du fait de sa très petite dimension. Sur Terre, le phénomène des marées est lié au fait que l'attraction gravitationnelle du Soleil évolue de façon petite mais non négligeable en fonction de la position du point considéré sur Terre. Le point de surface de la Terre le plus près du Soleil est plus attiré que le point qui lui est diamétralement opposé. En valeur absolue, l'écart est donné par :

$$\frac{\mathcal{G}M}{(d-R)^2} - \frac{\mathcal{G}M}{(d+R)^2} = \frac{4\mathcal{G}MR}{d^3}$$

Comme  $R = 6400$  km et  $d = 1,5 \times 10^8$  km, il était logique d'effectuer un développement limité lors du calcul de cet écart. Le champ gravitationnel créé par le Soleil au niveau du centre de gravité de la Terre supposé de symétrie sphérique est  $G_c = \frac{\mathcal{G}M}{d^2}$ . Il est intéressant pour la suite d'évaluer l'écart  $\Delta G$  identique en valeur absolue entre le champ de gravitation créé par le Soleil au centre de la Terre et l'un des deux points précédents. On a donc :

$$\frac{\Delta G}{G_c} = \frac{2R}{d} = 8,5 \times 10^{-5}$$

Cette valeur peut paraître très ténue mais elle suffit à créer le phénomène des marées observable par tout un chacun puisque le champ gravitationnel agit sur un fluide plus propice à se déformer que la croûte terrestre.

On étudie le mouvement d'un point  $M$  de la surface de la Terre qui subit un ensemble de forces liées à son environnement proche comme le poids, et des forces de contact. L'ensemble de ces forces est noté  $\vec{F}$ . Le point subit aussi une interaction gravitationnelle exercée par le Soleil et les autres planètes du système solaire, la Lune, Mars, Vénus... On note  $\vec{G}_{tot}(M)$  le champ gravitationnel correspondant. L'étude du mouvement de ce point est effectué dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{géo}$  qui doit être considéré comme non galiléen du fait de son mouvement de translation elliptique - quasi circulaire - autour du Soleil. Il faut donc ajouter la force d'inertie d'entraînement uniquement puisque ce référentiel est en translation par rapport au référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}_{hélio}$ , considéré comme galiléen. L'équation du mouvement de  $M$  est donc :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_{géo}} = \vec{F} + m\vec{G}_{tot}(M) - m\vec{a}_{ent \mathcal{R}_{géo}/\mathcal{R}_{hélio}}$$

L'accélération d'entraînement correspond à l'accélération du centre  $O$  de la Terre dans le référentiel héliocentrique. Pour l'obtenir, il faut étudier le mouvement de la Terre dans ce référentiel. La Terre subit uniquement l'interaction gravitationnelle de l'ensemble des astres et planètes qui peuplent son environnement. L'équation du mouvement est donc :

$$M\vec{a}_{O/\mathcal{R}_{hélio}} = M\vec{G}_{tot}(O)$$

On en déduit que l'accélération d'entraînement correspond au champ gravitationnel existant au centre  $O$  de la Terre :

$$\vec{a}_{O/\mathcal{R}_{hélio}} = \vec{a}_{ent \mathcal{R}_{géo}/\mathcal{R}_{hélio}} = \vec{G}_{tot}(O)$$

Dans ces conditions, on peut transformer l'équation du mouvement du point  $M$  situé à la surface de la Terre<sup>9</sup> et faire apparaître un terme de différence entre deux champs gravitationnels qui porte le nom de *champ des marées* que l'on notera  $\vec{C}(M)$  :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_{géo}} = \vec{F} + m \left( \vec{G}_{tot}(M) - \vec{G}_{tot}(O) \right) = \vec{F} + m\vec{C}(M)$$

Dans le champ des marées, on compte deux contributions principales et la plus importante n'est pas celle que l'on pourrait croire au premier abord ! En effet la contribution de la Lune est le double de celle du Soleil. Le Soleil est nettement plus massif que la Lune mais il est situé beaucoup plus loin. Au début de ce paragraphe, nous avons situé l'ordre de grandeur du différentiel de champ gravitationnel du Soleil lorsque nous avons calculé  $\Delta G = |G(M) - G(O)|$ .

9. On situe le point à la surface de la Terre car le problème posé concerne les marées, mais évidemment la portée de ce développement n'est pas limitée aux points de la surface de la Terre.

## 5.2 Marées dues à la Lune

Sur le schéma de la figure 14, nous n'avons représenté que la Lune afin de bien faire comprendre le phénomène des deux marées par jour. Sur ce schéma, si on considère un point  $M$  proche de la Lune et un point  $M'$  à l'opposé, constate que les champs gravitationnels créés par la Lune en  $M$ ,  $O$  et  $M'$  sont tous dirigés vers le centre de la Lune mais que l'on a - en tenant compte d'une distance croissante de  $M$  à  $O$  puis  $M'$  - la relation d'ordre suivante :

$$G_{\text{Lune}}(M) > G_{\text{Lune}}(O) > G_{\text{Lune}}(M') \quad \text{et que} \quad G_{\text{Lune}}(M) - G_{\text{Lune}}(O) = - [G_{\text{Lune}}(M') - G_{\text{Lune}}(O)]$$

Des relations précédentes, on peut déduire que  $\vec{C}_{\text{Lune}}(M)$  est dirigé vers la Lune alors que  $\vec{C}_{\text{Lune}}(M') = -\vec{C}_{\text{Lune}}(M)$  est de même valeur mais qu'il est dirigé à l'opposé de la Lune.

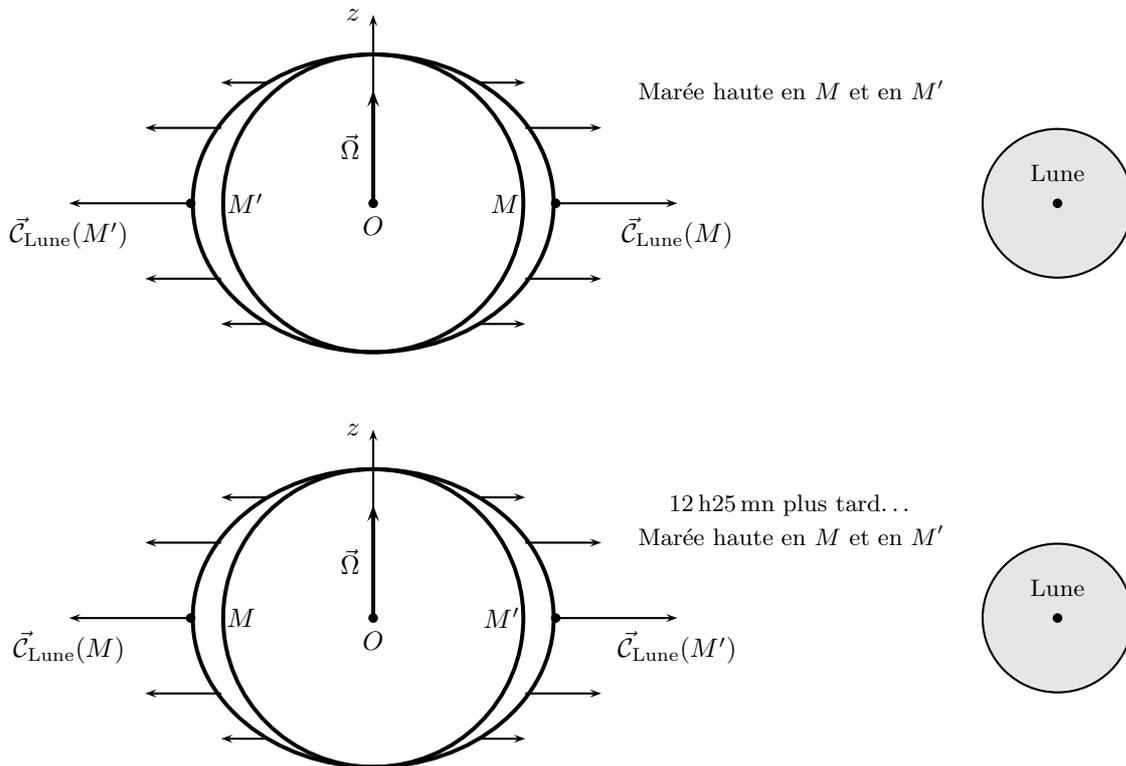


FIGURE 14 – Les deux marées hautes journalières dues à la Lune

La surface fluide des océans subit donc le champ de marée qui tend à la faire gonfler comme l'indique de façon très qualitative les flèches sur le schéma de la figure 14 que représentent  $\vec{C}_{\text{Lune}}$ . L'océan gonfle aussi bien lorsqu'il se trouve en face de la Lune que lorsqu'il est à l'opposé. La Terre tourne sur elle-même en environ 24 h, on pourrait donc penser que les deux marées basses ou hautes sont séparées par une durée de 12 h. Lorsque l'angle que l'océan<sup>10</sup> avec la Lune est de  $90^\circ$ , on a une marée basse. Il s'écoule donc 6 h entre une marée basse et une marée haute. En réalité, les choses sont un peu plus compliquées car la direction Terre-Lune tourne dans le référentiel géocentrique d'un tour en 28 jours. Il se produit alors un décalage de  $\frac{24}{28} \text{ h} \simeq 50 \text{ mn}$ . La durée entre deux marées hautes ou basses est d'environ 12 h 25 mn.

## 5.3 Marées dues à la Lune et au Soleil

Pour le Soleil, la situation est exactement la même que pour la Lune. Les marées hautes liées au Soleil se produisent en même temps pour le point le plus proche du Soleil et pour le point le plus éloigné, comme on a pu le voir sur le schéma de la figure 15. Lorsqu'on prend en compte les contributions des deux astres, la situation se complique sérieusement car l'effet résultant dépend de leurs positions relatives.

Lorsque la Lune et le Soleil sont alignés, leurs champs de marée  $\vec{C}_{\text{Lune}}$  et  $\vec{C}_{\text{Soleil}}$  sont colinéaires et de même sens. Ils s'additionnent de façon constructive, on a une marée qualifiée de *vive-eau*. Cela se produit de la même

10. En fait lorsque la normale à la surface océanique fait un angle de  $90^\circ$  avec la direction entre le centre de la Terre et celui de la Lune.

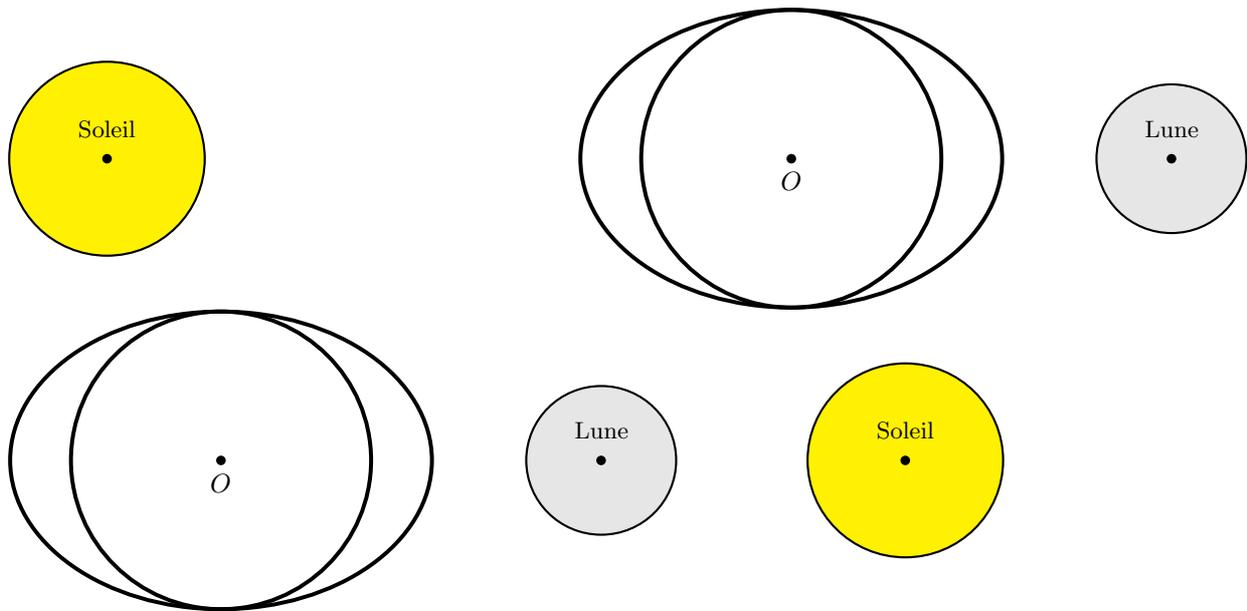


FIGURE 15 – Le Soleil a rendez-vous avec la Lune - Marée de vive-eau

façon lorsque la Lune et le Soleil sont du même côté de la Terre ou bien du côté opposé. Pour s'en convaincre, il suffit de bien regarder l'orientation des champs de marée sur la figure 15.

Les marées de *morte-eau* sont obtenues lorsque le Soleil et la Lune sont situés sur des directions perpendiculaires comme on peut le voir sur le schéma de la figure 16.

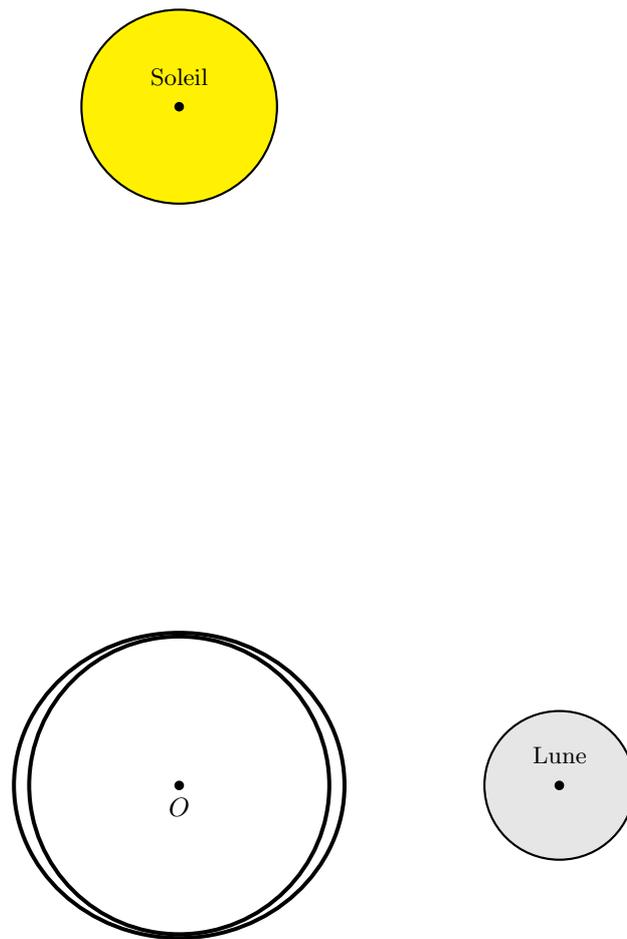


FIGURE 16 – Marée de morte-eau



FIGURE 17 – Octobre 2019 : le typhon Hagibis qui touche le Japon