Notion de vitesse de groupe

1 Généralités

1.1 Définition

La vitesse de groupe est définie par :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

Elle correspond à la vitesse de propagation d'un paquet d'ondes, c'est-à-dire à la vitesse de propagation de l'information. On montre aussi qu'elle correspond à la vitesse de propagation de l'énergie même si ce résultat n'est pas général. Il convient de ne pas confondre vitesse de groupe et vitesse de phase définie par $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ pour une onde dont la phase est donnée par $(\omega t - kz)$ où le vecteur d'onde k est réel pour une forme d'onde en $\exp j(\omega t - kz)$. La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation de l'onde monochromatique de pulsation ω faisant partie du paquet d'onde. Cette onde monochromatique ne peut constituer à elle seule une quelconque information. En effet, un signal sinusoïdal est monochromatique uniquement s'il est indéfini dans le temps et aucune information ne peut être obtenue d'un signal dont l'amplitude n'évolue pas au cours du temps. C'est de l'évolution de l'amplitude du signal que naît l'information.

1.2 Situation de D'Alembert

Dans le cas où l'onde qui se propage dans un milieu obéit à l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$, la relation de dispersion est $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. On en déduit que vitesse de phase et vitesse de groupe sont identiques : $v_g = v_\varphi = c$. Ici, toutes les composantes monochromatiques du paquet d'ondes se propagent à la même vitesse puisque $v_\varphi = c$ est indépendante de ω. L'ensemble du paquet d'onde se propage donc aussi à la vitesse c, il est donc logique d'obtenir par le calcul $v_g = c$. Finalement, ce cas très couramment rencontré dans le cadre du programme, ne permet pas de bien percevoir la différence entre vitesse de phase et vitesse de groupe. Le signal (paquet d'ondes) se propage sans se déformer.

1.3 Situation de Klein-Gordon

L'équation d'onde de Klein-Gordon est de la forme $\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2}s$. La relation de dispersion est alors $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$. La propagation s'effectue pour $\omega \geq \omega_0$. On en déduit que la vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_0^2/\omega^2}}$. Le calcul de la vitesse de groupe est plus aisé à effectuer en différentiant la relation de dispersion. On obtient : $2k\mathrm{d}k = \frac{2\omega\mathrm{d}\omega}{c^2}$. On obtient dans ce cas la relation $v_\varphi v_g = c^2$ qu'il convient de pas généraliser à toutes les situations de propagation. La vitesse de groupe est par conséquent : $v_g = c\sqrt{1-\omega_0^2/\omega^2}$. On constate que la vitesse de phase dépend de la pulsation ω. Ainsi, une composante monochromatique du signal à la pulsation ω_1 ne se propagera pas à la même vitesse qu'une autre composante de pulsation ω_2. Le signal va se déformer, un peu comme un peloton de cyclistes qui se déforme au fil de la course par l'effet des différences de vitesse qui peuvent exister entre les coureurs. Sur le graphique de la figure 1, on a représenté les vitesses de phase et de groupe de la situation de Klein-Gordon.
Dans cette image, chaque cycliste correspond à une onde monochromatique du paquet d'onde assimilable au peloton. La vitesse de groupe correspond à la vitesse du peloton. Dans le cas des courses cyclistes, lorsque le peloton arrive sans cassure, le temps du dernier coureur du groupe est pris égal au temps du premier. Il ne serait pas raisonnable dans le domaine des ondes de reproduire cette situation. On peut envisager de mesurer la vitesse de propagation du paquet d'ondes en repérant le cycliste se trouvant au milieu du peloton. C'est ce que nous allons faire. Soit ω_m une pulsation du paquet d'onde qu'il n'est pas satisfaisant de qualifier de moyenne mais plutôt de *représentative* des composantes monochromatiques de plus forte amplitude, la vitesse de propagation du paquet d'onde sera donnée par $v_g = v_g(\omega_m)$. On constate que la vitesse de groupe est toujours inférieure à c alors que la vitesse de phase est toujours supérieure. Dans le cas où c serait la célérité c serait la vitesse de la lumière dans le milieu de propagation, on pourrait s'alarmer de voir $v_\varphi > c$! En fait, ce résultat ne remet pas en cause les théories de la relativité d'Einstein puisque v_φ n'a pas de sens physique comme nous l'avons expliqué avant du fait de l'absence d'information transportée par un signal purement monochromatique.

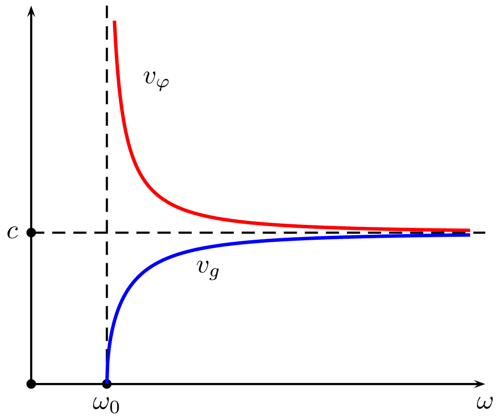

FIGURE 1 – Vitesses de phase et de groupe dans la situation de KLEIN-GORDON

1.4 Ondes de houle

La description des phénomènes de houle est bien caractérisée par la relation de dispersion $k = \dfrac{\omega^2}{g}$ où g est l'accélération de la pesanteur. La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{g}{\omega}$. En différentiant la relation de dispersion, on arrive à $\mathrm{d}k = \dfrac{2\omega \mathrm{d}\omega}{g}$. La vitesse de groupe est donc : $v_g = \dfrac{g}{2\omega}$. On constate, dans ce cas particulier, que $v_g(\omega) = v_\varphi(\omega)/2$. L'évolution de ces vitesses avec la pulsation est représentée sur le graphique de la figure 2.

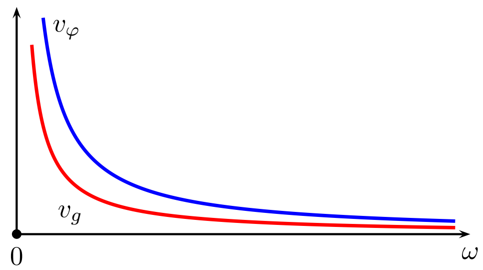

FIGURE 2 – Vitesses de phase et de groupe de la houle

2 Illustration graphique

Dans le cas des ondes de houle, on considère un signal dont la forme peut être appréciée sur le schéma de la figure 3. D'après la théorie de FOURIER, il peut être considéré comme une somme de composantes sinusoïdales de pulsation ω formant un paquet d'ondes. Sur ce premier schéma est représenté le paquet d'ondes ainsi qu'une de ses composantes sur laquelle on a fait apparaître un *pic* pour des besoins de compréhension.

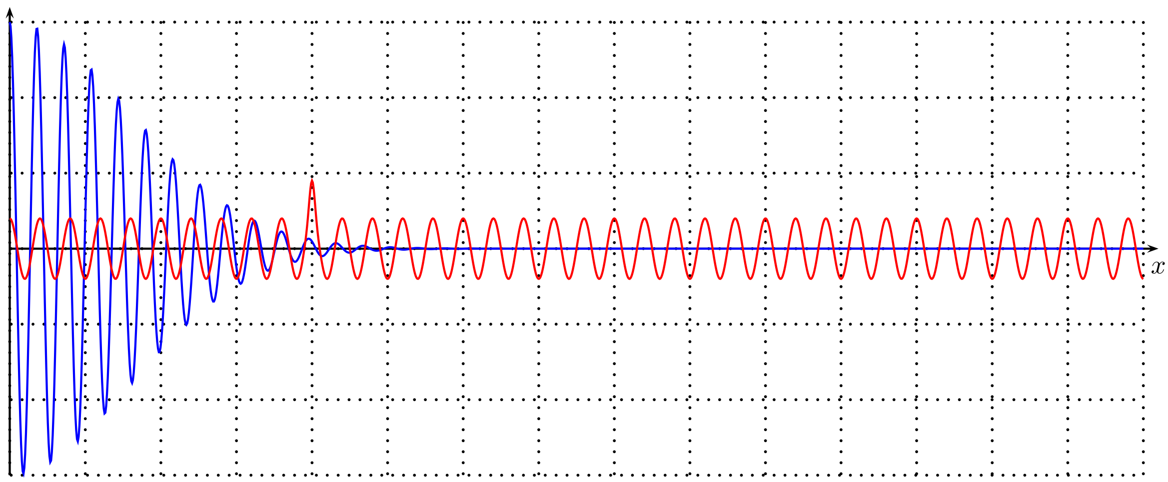

FIGURE 3 – Paquet d'onde à la date $t = 0$

Le schéma de la date $t = 0$ montre que le paquet d'onde possède sa crête en $x = 0$. Le schéma de la figure 4 est fait après une certaine durée. On voit que pendant que la composante sinusoïdale parcourt 10 graduations, le sommet du paquet d'onde ne parcourt que 5 graduations. La vitesse de groupe tire aussi son nom du fait qu'elle correspond à la vitesse de propagation du *groupe* (ou paquet) d'ondes.

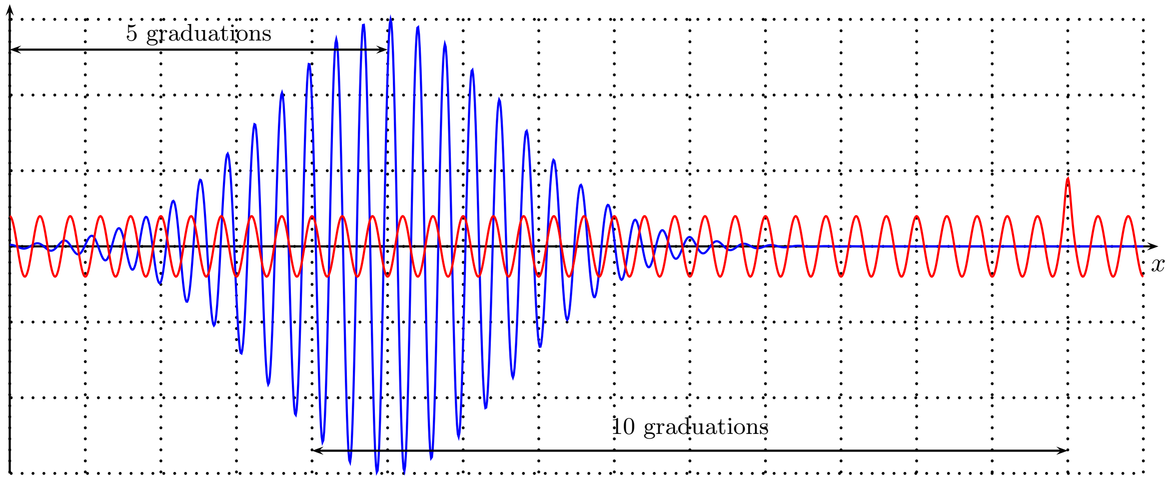

FIGURE 4 – Paquet d'onde à une date $t > 0$

3 Compléments

3.1 Vitesse de groupe

Sur les schémas des figure 3 et 4, on peut voir un paquet d'ondes que l'on notera ici $s(z,t)$. Celui-ci peut se décrire comme un ensemble de composantes monochromatiques dans un intervalle de pulsation $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \,;\, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$. La notion de paquet d'ondes n'a de sens que si les fréquences de ses différentes composantes sont relativement proches, c'est-à-dire $\Delta\omega \ll \omega_0$. On pourra donc écrire que :

$$s(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j(\omega t - kz) \mathrm{d}\omega$$

où $A(\omega)$ l'amplitude des différentes composantes monochromatiques ne prend des valeurs non négligeables que sur l'intervalle de pulsation $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \,;\, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$.

Au voisinage de la pulsation centrale $\omega \simeq \omega_0$, on peut exprimer le vecteur d'onde k par un développement limité au premier ordre selon :

$$k = k(\omega_0) + \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

L'intégrale définissant $s(z,t)$ peut donc s'écrire :

$$s(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j\left(\omega t - k(\omega_0)z - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)z\right) \mathrm{d}\omega$$

Pour interpréter correctement sur le plan physique cette expression, on fait apparaître le terme $(\omega - \omega_0)$ sur la variable t. Il faut écrire que $\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$. L'expression précédente devient alors :

$$s(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j\left(\omega_0 t - k(\omega_0)z + (\omega - \omega_0)t - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)z\right) \mathrm{d}\omega$$

On peut alors sortir de l'intégrale le terme : $\exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z)$. Le paquet d'ondes peut alors prendre la forme :

$$s(z,t) = \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z) \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j\left[(\omega - \omega_0)\left(t - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} z\right)\right] \mathrm{d}\omega$$

Le terme $\exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z)$ correspond à un terme rapide alors que :

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j \left[(\omega - \omega_0) \left(t - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} z \right) \right] \mathrm{d}\omega$$

est un terme lent. Le terme rapide correspond à une onde plane progressive de pulsation ω_0 qui se propage à la vitesse $v_\varphi(\omega_0) = \dfrac{\omega_0}{k(\omega_0)}$ qui est la vitesse de phase.

L'autre terme doit être compris comme étant celui de l'amplitude de la fonction rapide. En effet, on peut noter $\underline{B}$ cette amplitude et écrire $s(z,t) = \underline{B} \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0) z)$ avec $\underline{B}$ fonction de $t - \left.\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} z$:

$$\underline{B}\left(t - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} z \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j \left[(\omega - \omega_0) \left(t - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} z \right) \right] \mathrm{d}\omega$$

Dans cette expression, on constate que B est une fonction de $t - \dfrac{z}{v}$ où v est une vitesse exprimée par $v = \left.\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0}$. B est donc du type onde se propageant à la vitesse v. On remarque que cette onde particulière est composée de pulsations de la forme $\omega - \omega_0$. Or $\omega = \omega_0 \pm \dfrac{\Delta\omega}{2}$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$. B est donc une fonction variant nettement plus lentement que la fonction $\exp j(\omega_0 t - k(\omega_0) z)$. Compte tenu de ce constat, on peut dire que B est la fonction *enveloppe du paquet d'ondes*. v représente la vitesse de l'enveloppe du paquet d'ondes ou encore vitesse du groupe d'ondes. Il est donc naturel de définir la vitesse de groupe comme étant :

$$v_{\text{groupe}} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0}$$

Cette expression se généralise pour définir la vitesse de groupe par :

$$v_{\text{groupe}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

Cette définition générale de la vitesse de groupe ne pourra prendre du sens physique que si l'on a un paquet d'onde resserré autour d'une pulsation particulière. Il est difficile de parler de groupe pour un ensemble trop disparate sur le plan de son spectre car, pour évaluer la vitesse de groupe, on serait bien en peine d'identifier une pulsation ω_0 comme cela a été évoqué dans l'exemple courant qui précède. Pour reprendre l'image du Tour de France, dans une étape de plaine ou le peloton arrive en un bloc, il est assez facile d'évaluer la vitesse du bloc en prenant le coureur médian à l'arrivée pour évaluer la vitesse de groupe ou bien la moyenne des vitesses. Par contre, dans une étape de montagne, la donnée de la vitesse du coureur médian ne nous informe pas beaucoup tant les écarts entre les coureurs sont importants. On ne peut plus parler de peloton ou de paquet d'ondes.

On remarque aussi que si l'on s'intéresse à l'énergie, on aura $\langle s^2 \rangle = |\underline{B} \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0) z)|^2 = |\underline{B}|^2$. Le détecteur sera sensible à l'enveloppe $|\underline{B}|$ ou encore l'amplitude du paquet d'ondes. L'énergie ou l'information se propage à la vitesse de groupe.

3.2 Conclusion

Un milieu est dit dispersif lorsque $\dfrac{k}{\omega} = h(\omega)$ est une fonction de la pulsation comme cela a été vu par exemple dans la situation de KLEIN-GORDON avec la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$. la vitesse de phase est donc une fonction de ω : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = v_\varphi(\omega)$. Les différentes ondes monochromatiques qui composent le paquet d'ondes ne se propagent pas à la même vitesse, par conséquent le paquet d'ondes se déforme. L'enveloppe du paquet d'onde se propage à la vitesse de groupe.

Dans une situation de D'ALEMBERT, la vitesse de phase ne dépend pas de la pulsation, le paquet d'onde ne se déforme pas lors de la propagation. On a alors $v_\varphi = v_{\text{groupe}} = c$.

Dans la situation de D'ALEMBERT, il est évident, puisque toutes les ondes du paquet d'ondes se propagent à la même vitesse, que l'énergie se propagera à cette vitesse. Dans certaines situations que nous rencontrerons, en électromagnétisme en particulier, nous verrons que la vitesse de groupe correspondra à la vitesse de propagation de l'énergie. Il faut noter que ce résultat assez courant dans les problèmes que nous étudierons n'est pas général. En particulier, dans les cas où le milieu de propagation va absorber une partie de l'énergie, il n'est plus possible de faire l'association entre la vitesse du paquet d'ondes ou vitesse de l'enveloppe de l'onde et la vitesse de propagation de l'énergie.