Devoir libre de Sciences Physiques n°1 du 11-09-2024

Problème nº 1 – Quelques aspects de la mesure du temps *X MP 2011*

Extraits de ce sujet.

A. Horloge à quartz

Lorsqu'il est placé dans un champ électrique, un cristal de quartz convenablement taillé se déforme ; réciproquement, si un cristal de quartz est soumis à des efforts mécaniques, une différence de potentiel apparaît entre deux de ses faces. Ce couplage électromécanique, dit piézoélectrique, est à la base des horloges à quartz.

Dans le cadre d'une application horlogère, l'application d'une tension variable aux bornes du composant va provoquer une vibration mécanique qui va conduire à l'apparition de charges et donc d'un courant. À une résonance mécanique du système est ainsi associée une résonance d'intensité. Un diviseur de fréquence permet enfin d'obtenir la fréquence de base de 1 Hz.

Un circuit électrique équivalent au cristal de quartz est représenté figure 1, Le condensateur C_0 est la capacité du composant et les éléments C_1,L_1 et R_1 sont la représentation sous forme d'une impédance électrique des effets piézoélectriques associés à la vibration du quartz. Les éléments et leurs valeurs sont notés de la même manière, par exemple, la valeur de la capacité du condensateur C_0 est notée elle aussi C_0. On pose $\omega_s = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $Q = \dfrac{L_1 \omega_s}{R_1}$.

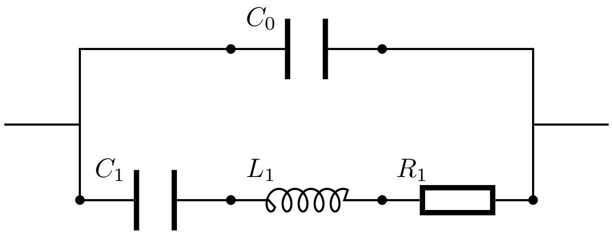

FIGURE 1 – Schéma électrique équivalent d'un oscillateur à quartz.

1. Adoptant les valeurs $C_1 = 3,00 \times 10^{-15}\,\mathrm{F}$, $L_1 = 7,86 \times 10^{3}\,\mathrm{H}$, $R_1 = 32 \times 10^{3}\,\Omega$, $C_0 = 1,50 \times 10^{-12}\,\mathrm{F}$, calculer ω_s, $\omega_p = \sqrt{1 + \dfrac{C_1}{C_0}}\omega_s$ et les fréquences associées f_s et f_p. Calculer Q.

2. Dans cette question seulement, la résistance R_1 est nulle ; l'impédance complexe du circuit se met alors sous la forme $\underline{Z} = \dfrac{1}{jC_0\omega_s x}\dfrac{1-x^2}{a^2-x^2}$, où $x = \dfrac{\omega}{\omega_s}$ et $a = \sqrt{1 + \dfrac{C_1}{C_0}}$; tracer l'allure de la réactance $X(x) = \Im[\underline{Z}(x)]$. Dans quels domaines de fréquences le quartz, dans ce modèle, se comporte-t-il comme un condensateur ? Comme une inductance ?

3. Au début des calculs conduisant à l'impédance complexe de la question **2.**, l'on opère formellement la substitution $L_1 \rightarrow L_1 + \dfrac{R_1}{j\omega}$. Quel circuit électrique décrit-on ainsi ?

4. Identifier et commenter les courbes de la figure 2, qui représentent les composantes de l'impédance complexe au voisinage de la pulsation de résonance parallèle ω_p. On admettra les relations $\underline{Z}(\omega_s) = \dfrac{R_1}{1 + j\frac{C_0}{QC_1}}$ et $\underline{Z}(\omega_p) \simeq \dfrac{C_1}{C_0}\dfrac{Q}{(C_1+C_0)\omega_s} \simeq \dfrac{R_1}{(R_1 C_0 \omega_s)^2}$.

5. La figure 3 représente $\log\left(\left|\dfrac{Z(x)}{Z(a)}\right|\right)$. Pourquoi, pratiquement, opère-t-on à la fréquence f_s ? Justifier le choix de la valeur numérique $f_s = 32\,768\,\mathrm{Hz}$ pour la fréquence de travail des cristaux de quartz dans les montres.

6. Au voisinage de la température $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, la fréquence de résonance du quartz utilisé, notée f_0, varie en fonction de la température selon la loi $\dfrac{\Delta f_0}{f_0} = -4 \times 10^{-8}(T - T_0)^2$. Calculer la dérive d'une montre à quartz sur un an pour un écart $T - T_0$ de température constant, égal à $10\,°\mathrm{C}$. La montre avancera-t-elle ou retardera-t-elle ?

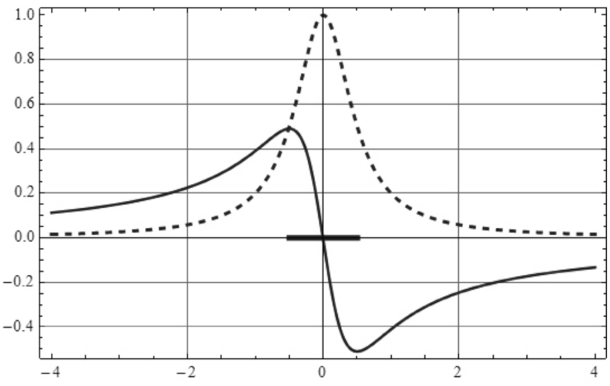

FIGURE 2 – Parties réelle et imaginaire de l'impédance électrique du quartz au voisinage de la résonance parallèle. Les ordonnées sont normalisées au maximum de la courbe en pointillés, soit à $327\,\mathrm{M}\Omega$; en abscisse, $u = Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_s} - \dfrac{\omega_p}{\omega_s}\right) = Q(x-a)$. La longueur réelle du trait épais sur l'axe des abscisses est $\dfrac{1}{Q}$.

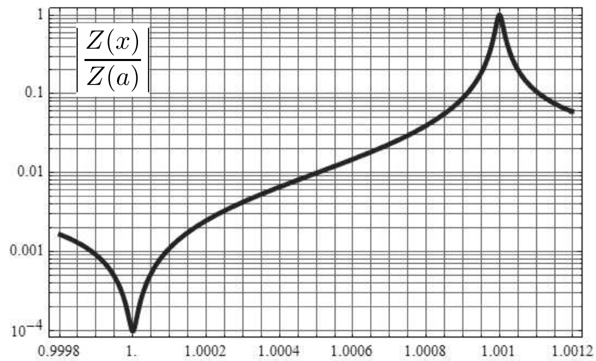

FIGURE 3 – Module de l'impédance équivalente du cristal de quartz utilisé.

B. Oscillateur non linéaire entretenu

Le fonctionnement permanent d'un oscillateur exige la mise en œuvre d'une source d'énergie qui, à chaque oscillation, compense les pertes. La figure 4 illustre un principe de l'entretien électrique d'un résonateur : ce résonateur est associé à une conductance non linéaire dont la relation courant-tension est modélisée par la loi $i = -Gv + \beta v^3$, où G et β sont des constantes positives ; on remarque que, lorsque la tension est suffisamment faible, la conductance est négative. Le but de cette partie est de montrer l'établissement d'un régime stable dans un tel système.

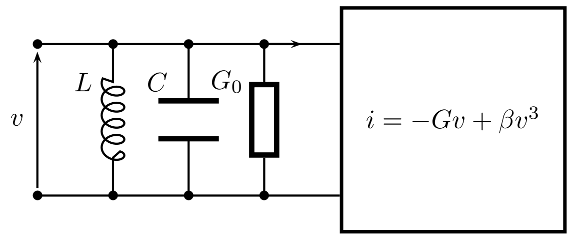

FIGURE 4 – Entretien d'un oscillateur par conductance négative et non linéarité.

7. Montrer qu'avec l'entrée en tension sinusoïdale $v = V \sin \omega t$, $i \simeq \left(-G + \dfrac{3}{4}\beta V^2\right) v$; on rappelle l'identité $\sin 3u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u$. Pourquoi est-il en général réaliste de négliger le terme à la pulsation 3ω ?

8. En effectuant l'analyse du système en régime sinusoïdal de pulsation ω, donner l'expression de son admittance complexe $\underline{Y} = g_1 + jx_1$ en fonction de L, C, G_0, G, β et V. En déduire que, en régime d'oscillation entretenue, la pulsation et l'amplitude du régime sont fixées : $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $V = V_0 = \sqrt{\dfrac{4}{3}\dfrac{G - G_0}{\beta}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}\dfrac{g}{\beta}}$, ce qui définit $g = G - G_0$.

9. Expliquer pourquoi, en régime de petits signaux, l'oscillateur démarre.

10. Pour l'analyse du régime transitoire, on pose $v(t) = V(t)\sin\omega_0 t$, où l'amplitude $V(t)$ que l'on supposera toujours positive, varie très lentement par rapport à $\sin\omega_0 t$. Admettant les relations caractérisant le facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{|g_1|}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = \dfrac{4C\omega_0}{3\beta(V_0^2 - V^2)}$ et $Q = 2\pi\dfrac{W(t)}{W(t+\frac{2\pi}{\omega_0}) - W(t)}$, où $W(t)$ est l'énergie accumulée à l'instant t, établir l'équation différentielle (que l'on ne cherchera pas à résoudre) :

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{8}\frac{\beta}{C}(V_0^2 - V^2)$$

Retrouver ce résultat à partir de l'expression de la valeur moyenne temporelle de l'énergie accumulée dans le système LC et de la relation, que l'on établira, $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -(G_0 - G + \dfrac{3}{4}\beta V^2)v^2$.

11. On note V_1 la valeur initiale de $V(t)$. Quel est le signe de $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$? Montrer, sans intégrer l'équation différentielle établie à la question **10.** que $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = V_0$.

Problème n° 2 – Origine des déchets nucléaires

Centrale PSI 2008

A. La radioactivité

La radioactivité est un phénomène physique naturel au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent en dégageant de l'énergie, pour se transformer en noyaux atomiques stables. L'évolution de la concentration $c_r(t)$ d'une substance radioactive suit une loi cinétique d'ordre 1 :

$$\frac{\mathrm{d}c_r(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda c_r(t)$$

1. Exprimer $c_r(t)$ en fonction de $c_r(0)$, λ et t.

2. L'usage est de caractériser l'activité d'un atome par sa période T, temps au bout duquel la concentration initiale a été divisée par deux. Relier λ et T.

3. L'uranium présent dans l'écorce terrestre s'y trouve essentiellement sous forme de deux isotopes $^{238}\mathrm{U}$ d'abondance $99,3\%$ et de période $4,5\times10^9$ ans et $^{235}\mathrm{U}$ d'abondance $0,7\%$ et de période $0,7\times10^9$ ans. En supposant qu'au moment de la création de la Terre les quantités des deux isotopes étaient égales, donner une évaluation de l'âge de la Terre.

4. $^{235}\mathrm{U}$ possède la propriété d'être fissile : il peut capter un neutron lent n pour fissionner en plusieurs atomes plus légers et plusieurs neutrons rapides n^* selon par exemple :

$$^{235}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{93}\mathrm{Kr} + {}^{140}\mathrm{Ba} + 3n^*$$

En moyenne sur toutes les réactions possibles, chaque atome $^{235}\mathrm{U}$ qui fissionne libère $200\,\mathrm{MeV}$ et $2,5$ neutrons. Évaluer l'énergie récupérable dans un gramme de $^{235}\mathrm{U}$.

5. Quelle masse d'octane C_8H_{18}, dont l'enthalpie de combustion vaut $-5\times10^3\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$, faut-il brûler pour obtenir la même énergie ? Conclure.

B. Modélisation du réacteur

L'énergie due à la fission est récupérée au sein d'un réacteur nucléaire. Le combustible nucléaire est essentiellement de l'uranium enrichi en $^{235}\mathrm{U}$ (environ 4% contre $0,7\%$ pour le minerai naturel). Il est accompagné d'un modérateur (souvent de l'eau) chargé de ralentir et d'absorber le surplus de neutrons dû à la fission. Enfin, il faut prendre en compte le temps de diffusion τ_2 d'un neutron avant qu'il ne soit recapturé par un nouvel atome de $^{235}\mathrm{U}$. Un réacteur peut alors être modélisé comme indiqué sur la figure 5 où c et c^* représentent les concentrations en n et n^*. m traduit l'action modératrice des barres de contrôles (signe $-$), qui peuvent être introduites mécaniquement dans le réacteur pour absorber des neutrons, avec une constante de temps $\tau_3 = 1\,\mathrm{s}$. Dans la suite, on pose $k = k_1k_2$.

6. $m = 0$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $c(t)$.

7. Montrer que si le coefficient k est inférieur à une valeur k_c à déterminer, le système est stable. La réaction de fission peut-elle être entretenue dans ces conditions ?

8. $m \neq 0$. Calculer la fonction de transfert $H(j\omega) = \dfrac{\underline{c}}{\underline{m}}$.

9. $m = m_0$, $c(0) = c_0$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $c(t)$ s'écrit :

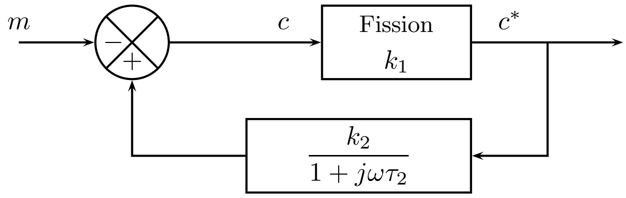

FIGURE 5 – Première modélisation du réacteur

$$(1-k)c + \tau_2 \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -m_0$$

La résoudre complètement pour $t > 0$.

10. $k > 1$. Montrer qu'il existe une valeur critique m_c de m_0 telle que : $m_0 > m_c \Rightarrow c(t) \to -\infty$ cas a et $m_0 < m_c \Rightarrow c(t) \to +\infty$ cas b.

11. Interpréter en une phrase le cas a.

12. Interpréter en une phrase le cas b.

13. $k = 1,001$, $\tau_2 = 10^{-4}$ s. Calculer la constante de temps du réacteur. Conclure.

Certains produits de fission des ^{235}U sont radioactifs et se désintègrent avec une période $\tau_4 \gg \tau_2$: une fraction β des neutrons rapides est retardée. Le fonctionnement du réacteur est mieux modélisé par le schéma de la figure 6.

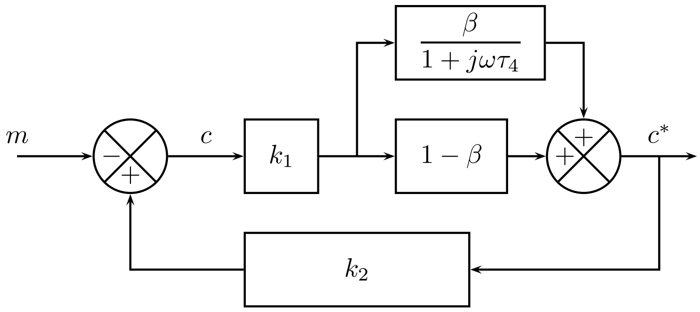

FIGURE 6 – Seconde modélisation du réacteur

14. Donner la nouvelle fonction de transfert $T(j\omega) = \dfrac{\underline{c}}{\underline{m}}$ du réacteur.

15. $k = 1,001$. Pour ^{235}U, $\tau_4 = 12$ s et $\beta = 0,65\%$. Définir et calculer la nouvelle constante de temps du réacteur. Comparer au résultat de la question **13.**.

16. Lorsque la teneur en ^{235}U devient trop faible, en fin de vie du combustible, k diminue et le réacteur ne peut plus fonctionner. Justifier ces affirmations.

C. Le retraitement

La composition du combustible, pour 1 000 kg de métal lourd initial, est donnée dans le tableau ci-dessous :

	atome	combustible neuf (kg)	combustible usagé (kg)
Actinides majeurs	^{235}U	37	7
	^{238}U	963	929
	Autres U	-	8
	^{239}Pu	-	10
Actinides mineurs	Np, Am, Cm	-	1
Produits de fission	Cs, Sr, Tc. . .	-	35

Le combustible usagé peut alors être retraité, pour séparer les divers éléments. Le retraitement consiste à concasser le combustible usagé, qui se présente sous forme d'oxydes, et à le dissoudre dans une solution aqueuse d'acide nitrique. Le plutonium et l'uranium se dissolvent suivant les réactions :

$$UO_{2s} + 4HNO_3 \rightleftarrows UO_2(NO_3)_2 + 2NO_2 + 2H_2O$$

et

$$PuO_{2s} + 4HNO_3 \rightleftarrows Pu(NO_3)_4 + 2H_2O$$

17. Préciser les nombres d'oxydations de N dans NO_3^- et NO_2. Une de ces réactions est une réaction d'oxydo-réduction. Laquelle ?

18. En déduire les nombres d'oxydation de U et Pu dans les produits de ces réactions.

Les produits de dissolution des autres actinides Np, Am et Cm, ont pour nombre d'oxydation respectifs $+V$, $+III$ et $+III$. Dans cette solution aqueuse A_0, la concentration totale en Pu vaut $[Pu_{aq}]_0 = 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Elle est mélangée à une solution organique O_0 de phosphate de tributyle TBP. Après agitation et décantation, chaque élément X se partage entre les deux phases A_1 et O_1, non miscibles, ainsi obtenues. Le coefficient de partage est défini par :

$$D_p = \frac{[X_{org}]}{[X_{aq}]}$$

où $[X_{ph}]$ représente la concentration totale en élément X dans la phase ph. Pour les actinides, $D_p = 10^2$ si le nombre d'oxydation est pair, $D_p = 10^{-2}$ sinon. D_p est également très faible pour les produits de fission.

19. On mélange 1 L de la solution aqueuse A_0 avec 10 L de TPB. Après agitation et décantation, on sépare A_1 et O_1. Calculer $[Pu_{aq}]_1$ dans la solution A_1.

20. L'opération est répétée une seconde fois : on mélange 1 L de la solution aqueuse A_1 avec 10 L de TPB. Après agitation et décantation, on sépare A_2 et O_2. Calculer $[Pu_{aq}]_2$ dans la solution A_2.

21. Dans quelle phase se trouvent maintenant les déchets ultimes, produits de fission et actinides mineurs ? Ceux-ci sont alors vitrifiés et placés dans des colis en acier (Déchets C).

22. O_1 et O_2 sont rassemblées pour former O_3. O_3 est mélangée à une solution aqueuse A_3 de nitrate uraneux $U(NO_3)_4$ en excès. Celui-ci agit avec le plutonium selon la réaction :

$$2Pu^{4+} + U^{4+} + 2H_2O \rightleftarrows 2Pu^{3+} + UO_2^{2+} + 4H^+$$

Soient A_4 et O_4 les phases obtenues après agitation et décantation. Quel est l'intérêt de cette dernière opération ?