Devoir libre de Sciences Physiques n°1 du 13-09-2023

Problème n° 1 – Effet piézoélectrique *X MP 2021*

Nous nous proposons d'étudier l'effet piézo-électrique et deux de ses applications courantes. L'analyse d'un modèle simple permettant de rendre compte du comportement piézo-électrique d'un matériau fera l'objet d'une première partie. Une deuxième partie sera consacrée à l'étude d'un transformateur de tension électrique mettant en oeuvre l'effet piézo-électrique. Enfin, la troisième partie s'intéressera au principe d'un oscillateur électrique à quartz. Les deuxième et troisième parties sont indépendantes l'une de l'autre, chacune d'elles faisant occasionnellement référence à des résultats obtenus dans la première partie.

Un matériau piézo-électrique est un milieu isolant, électriquement neutre (dès l'échelle de la maille cristalline), qui présente la particularité de faire apparaître des charges électriques en son volume et sur sa surface lorsqu'il est déformé. Quand le milieu est soustrait à toute action extérieure (état de référence), le barycentre des atomes électropositifs et celui des atomes électronégatifs constituant une maille cristalline sont confondus. Lorsqu'il est soumis à une action mécanique, la maille se déforme et ces barycentres se dissocient, donnant naissance à un moment dipolaire qui devient une source de champ électrique. Réciproquement, soumis à un champ électrique extérieur, un tel milieu se déforme, si cette liberté lui est laissée. Un matériau piézo-électrique est donc le siège d'un couplage électromécanique réciproque. De nombreux dispositifs tirent parti de cette particularité (allume-gaz, oscillateurs, transformateurs, capteurs, transducteurs, actionneurs...). Le quartz, en particulier, est un cristal naturel qui possède cette propriété. Ce sont toutefois des céramiques synthétiques et des polymères qui sont maintenant le plus largement utilisés.

La figure 1 donne une illustration de ce phénomène. Les atomes électropositifs et électronégatifs de la maille sont représentés respectivement en gris et en blanc. Sur le schéma (a) la maille n'est pas déformée alors que sur le schéma (b) elle est étirée selon l'axe Ox et les barycentres P et N ne sont alors plus confondus. Notons qu'une contraction de la maille selon une direction perpendiculaire à l'axe Ox (en restant ici dans le plan de la figure) produirait le même effet.

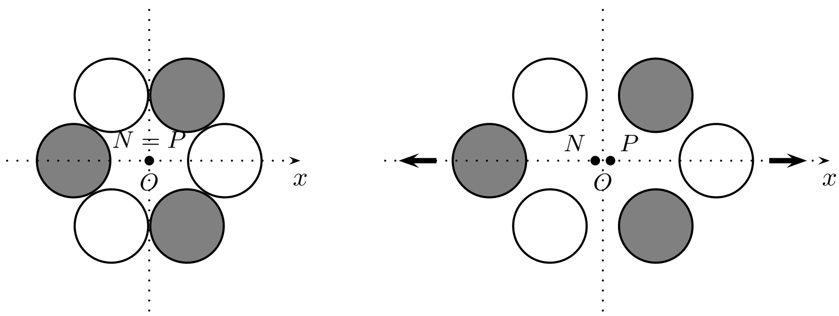

FIGURE 1 – Illustration de l'effet piézo-électrique : (a) Maille non déformée, les barycentres P et N des atomes respectivement électropositifs (gris) et électronégatifs (blancs) sont confondus ; (b) L'étirement de la maille selon l'axe Ox fait apparaître un dipôle électrostatique orienté par le vecteur $\vec{NP}$.

Dans toute cette étude, la force s'exerçant sur une maille, le champ électrique auquel elle est soumise et sa déformation seront portés par l'axe Ox (modèle unidimensionnel). Enfin, la force de pesanteur ne sera jamais prise en compte.

Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et sans excéder deux chiffres significatifs.

Notations et données générales

Les grandeurs qui apparaissent ici seront présentées dans la suite.

Masse volumique du milieu piézoélectrique : $\rho = 2 \times 10^3\,\mathrm{kg}$
Coefficient d'élasticité du milieu piézoélectrique : $A' = 10^9\,\mathrm{Pa}$
Longueur de l'élément piézoélectrique : $L = 0,2\,\mathrm{mm}$
Masse de l'élément piézoélectrique : m
Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$
j désigne le nombre complexe de module unitaire et d'argument égal à $\pi/2$.

`Le sujet a été adapté par rapport à l'original`

A. Étude du comportement d'un milieu piézoélectrique

On considère un ressort de raideur K_1 et de longueur à vide a. À l'extrémité de celui-ci, on accroche une masse ponctuelle m_1. On exerce une force $\vec{f} = f\vec{e}_x$ sur la masse m_1, voir le schéma (a) de la figure 2.

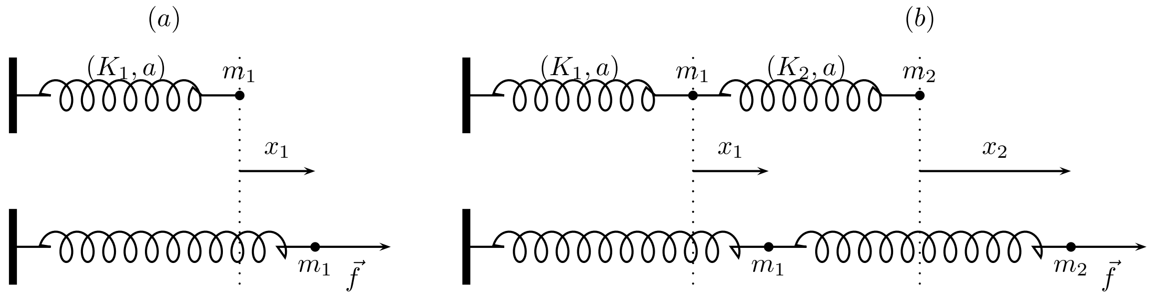

FIGURE 2 – Ressorts…

1. Donner l'expression de la force $\vec{f}$ lorsqu'il y a équilibre en fonction de x_1 et de paramètre(s) du ressort.

2. On considère maintenant le schéma (b) de la figure 2. Montrer que l'expression de la force $\vec{f}$ lorsqu'il y a équilibre est donnée par :

$$\vec{f} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\, x_2\, \vec{e}_x$$

On pensera à traduire l'équilibre de la masse m_1 et aussi l'équilibre de la masse m_2.

3. À quelle analogie vous fait penser l'expression de la force $\vec{f}$ obtenue à la question précédente ? En déduire l'expression de la force $\vec{f}$ - toujours à l'équilibre - dans le cas du schéma de la figure 3.

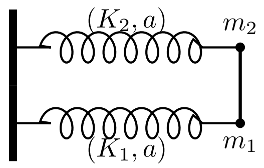

FIGURE 3 – Ressorts toujours…

Nous appellerons *élément piézo-électrique* (ou parfois *élément*) un domaine piézo-électrique que nous supposerons parallélépipédique de longueurs L_x (notée L dans la suite), L_y et L_z selon les axes respectifs Ox, Oy et Oz. Sur chacune de ses surfaces d'abscisse $x = 0$ et $x = L$ est collée une électrode métallique. Ces électrodes permettent de connecter l'élément à un générateur de tension afin de le soumettre à un champ électrique. Nous notons $S = L_y L_z$ leur aire.

Modélisation du comportement électromécanique d'un élément piézoélectrique

La figure 4 représente le modèle adopté pour décrire le comportement piézo-électrique d'une maille. Les barycentres des atomes électropositifs et électronégatifs sont représentés respectivement par les points P et N affectés des charges effectives $q_P = +q$ ($q > 0$) et $q_N = -q$. Dans la situation de repos (état de référence), deux couples de deux ressorts (linéaires), de raideurs notées K_1 et K_2 maintiennent ces barycentres confondus. Chacun des ressorts est alors de longueur (à vide, donc) a. Sous l'action d'une force $\vec{f} = f\vec{e}_x$ et d'un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_x$ extérieurs, cette maille adopte une nouvelle configuration d'équilibre caractérisée géométriquement par l'abscisse x_B du point B ainsi que par les abscisses x_P et x_N des barycentres P et N (abscisses comptées depuis leurs positions d'équilibre respectives).

Nous supposons que $K_2 > K_1$ et qu'une maille élémentaire possède la même dimension $2a$ selon les trois directions Ox, Oy et Oz. Afin que la figure 4 reste lisible, les deux associations (K_1, P, K_2) et (K_2, N, K_1) en parallèle sont représentées décalées et non superposées, comme elles devraient l'être.

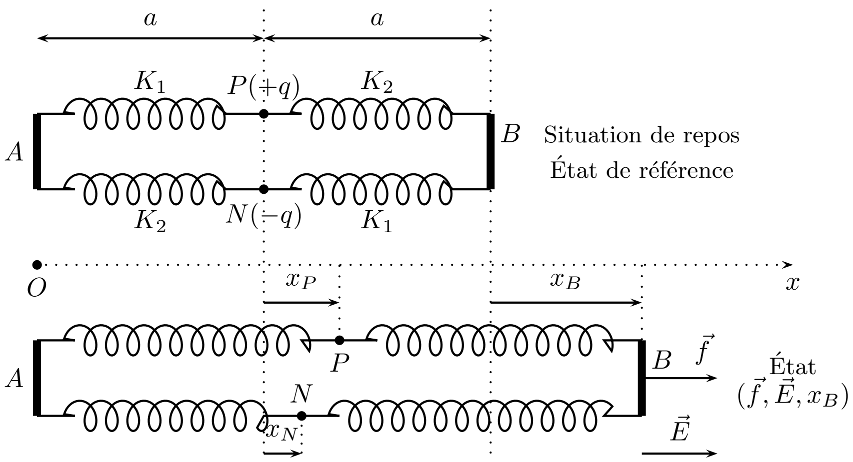

FIGURE 4 – Modèle adopté d'une maille du réseau cristallin d'un élément piézo-électrique. Schéma supérieur : maille au repos (état de référence). Schéma inférieur : maille à l'équilibre soumise à la force $\vec{f} = f\vec{e}_x$ et au champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_x$.

4. Indiquer quelle signification physique il convient d'attribuer aux ressorts représentés sur la figure 4. Préciser alors la condition, portant sur la variable x_B, que cette modélisation présuppose.

5. Montrer que l'expression de la force f correspondant à la situation d'équilibre est donnée par :

$$f = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} qE + \frac{2K_1K_2}{K_1 + K_2} x_B$$

6. Nous définissons le moment dipolaire électrique d'une maille par le vecteur $\vec{p} = p\vec{e}_x$ où $p = q(x_P - x_N)$. Exprimer p en fonction des variables x_B et E ainsi que des paramètres du modèle.

7. Nous considérons un élément piézo-électrique formé d'un assemblage de $N_1 \times N_2 \times N_3$, selon les axes respectifs Ox, Oy et Oz, mailles telles que celle représentée sur la figure 4. Elles sont supposées être soumises au même champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Par ailleurs, cet assemblage est soumis, à son extrémité droite (d'abscisse $N_1 \times 2a$), à la force $\vec{F} = F\vec{e}_x$. L'élongation totale de cet assemblage, dans ces conditions, est notée Δ. Exprimer F en fonction de E, Δ et des paramètres du modèle (toujours en situation d'équilibre).

8. Nous notons $\sigma = F/S$ la contrainte (force par unité de surface) à laquelle est soumis l'élément piézo-électrique et $\Delta_r = \Delta/L$ son allongement relatif (algébrique). Exprimer σ en fonction de Δ_r et E, ainsi que des paramètres K_1, K_2, a et q.

Passage à la limite continue

Nous nous plaçons maintenant à une échelle mésoscopique. L'abscisse d'un point M du cristal piézo-électrique est notée x. Sous l'effet de la déformation de ce cristal, chaque point se déplace de sa position de repos M à une position M'. Nous définissons alors le champ de déplacement $\vec{u}(M)$ par la relation :

$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{MM'} = u\vec{e}_x$$

Nous définissons d'autre part le vecteur polarisation $\vec{P} = P\vec{e}_x$ comme la densité volumique de moments dipolaires (le moment dipolaire $\vec{p}$ a été introduit dans la question **6.**).

Les résultats établis précédemment conduisent à adopter les relations locales suivantes, liant la composante P et la contrainte σ au champ de déplacement u et à la composante E du champ électrique :

$$\begin{cases} P = \alpha E + \beta \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma = A \dfrac{\partial u}{\partial x} - BE \end{cases}$$

où $\alpha > 0$, $A > 0$, β et B sont des constantes. On précise que, pour la fonction $u(x,t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ est la dérivée partielle de u par rapport à x calculé en dérivant à t fixé.

Par ailleurs, nous envisageons des situations pour lesquelles les grandeurs mises en relation dépendent, a priori, de l'abscisse x et du temps t. La contrainte $\sigma = \sigma(x,t)$ représente alors la force par unité de surface qu'exerce la partie droite (abscisses $> x$) sur la partie gauche (abscisses $\leq x$) de l'élément piézo-électrique, à l'abscisse x et au temps t.

9. Indiquer comment construire une longueur caractéristique $L_u^\star$ de variation de la fonction u et en proposer une expression. Préciser comment doivent être hiérarchisées l'échelle de longueur cristalline $2a$, celle de la longueur $L_u^\star$ et celle de l'accroissement $\mathrm{d}x$.

10. Donner l'expression, en fonction des paramètres K_1, K_2, a et q, de chacun des coefficients α, β, A et B issus du modèle que nous avons développé. Vérifier que $\beta = B$.

Étude électrostatique

Les électrodes de l'élément piézoélectrique sont connectées aux bornes d'un générateur de tension (supposé idéal) délivrant une différence de potentiel ψ. Ce générateur, par l'intermédiaire du courant i qu'il débite, fournit les charges (algébriques) $-Q$ à l'électrode de gauche et $+Q$ à celle de droite. Ce système est représenté sur la figure 5. L'électrode de gauche est supposée maintenue fixe et définir la référence du potentiel électrique. Celle de droite suit le déplacement de la surface d'abscisse $x = L$ de l'élément piézoélectrique à laquelle elle est liée. Son déplacement est donc décrit par la variable $u(L,t)$ ($|u(L,t)| \ll L$). Elle est soumise, de la part de l'extérieur, à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$. Nous notons $\vec{E} = E\vec{e}_x$ ($E = E(x,t)$) le champ électrique dans le milieu.

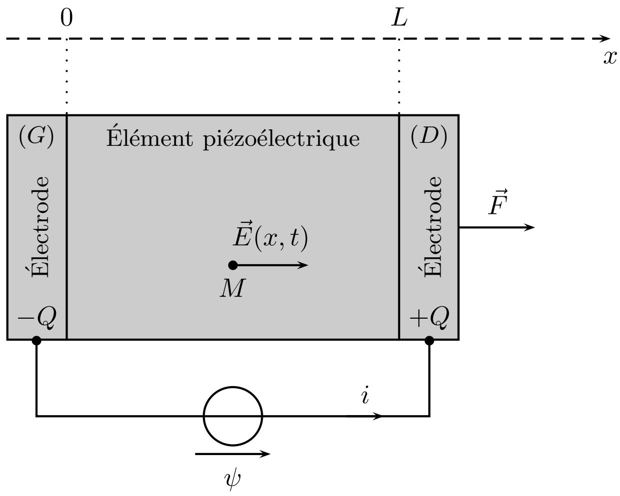

FIGURE 5 – Élément piézoélectrique comportant deux électrodes métalliques connectées à un générateur. Elles soumettent cet élément à la différence de potentiel ψ. Notons que c'est le signe de la composante algébrique $E(x,t)$ qui donnera, localement en espace et en temps, le sens véritable du champ électrique $\vec{E}$.

Nous admettons que le vecteur polarisation $\vec{P}$ (défini précédemment) est à l'origine de l'apparition :

- dans le milieu pîézoélectrique, d'une densité volumique de charge d'expression $\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P}$;
- sur la frontière du milieu piézoélectrique, d'une densité surfacique de charge d'expression $\sigma_P = \vec{P}\cdot\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface au point considéré, orienté de l'intérieur vers l'extérieur du milieu.

Nous rappelons que le milieu est isolant et qu'il reste électriquement neutre. Seules les électrodes peuvent échanger des charges avec le générateur. Par ailleurs, nous admettons que le champ électrique reste nul dans les électrodes métalliques et que les charges $\pm Q$ qu'elles portent se répartissent sur le surfaces se faisant face (c'est-à-dire celles en contact avec le milieu piézoélectrique). Enfin, nous nous plaçons dans ladre des régimes quasi permanents.

11. Établir, à partir de l'équation de MAXWELL-GAUSS, l'équation liant la composante E du champ électrique à la dérivée partielle $\partial u/\partial x$ et à une fonction du temps $f_Q = f_Q(t)$, à ce stade encore arbitraire. Nous poserons $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha$.

12. Relier la fonction $f_Q = f_Q(t)$ à la charge $Q = Q(t)$ portée par l'électrode de droite. Établir alors que la composante $E = E(x,t)$ vérifie l'équation :

$$\varepsilon E = -\beta\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Q}{S}$$

13. Déduire de l'équation précédente, l'expression du potentiel électrostatique $V = V(x)$ en fonction du déplacement $u = u(x,t)$, de la charge $Q = Q(t)$, de l'abscisse x ainsi que des paramètres du modèle. Exprimer ensuite la différence de potentiel $\psi = \psi(t)$ en fonction de $Q(t)$ et $u(L,t)$. On fera apparaître, dans cette expression, la capacité électrique $C_e = \varepsilon S/L$.

14. Établir que la constante σ peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma(x,t) = A'\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B'}{S}Q(t) \qquad (u = u(x,t))$$

Préciser l'expression de chacune des constantes A' et B'.

Étude mécanique

Le comportement mécanique de l'élément piézoélectrique en régime dynamique est caractérisé par le champ de déplacement $u = u(x,t)$ qu'il s'agit de déterminer.

15. En appliquant le principe fondamental de la Dynamique à une tranche élémentaire $S \times [x, x + \mathrm{d}x]$ du milieu, établir que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction u prend la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On précisera l'expression du coefficient c (choisi positif).

Nous rechercherons des solutions de l'équation précédente sous la forme d'ondes harmoniques, écrites en représentation complexe :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\tilde{u}} \exp j(\omega t - kx) \qquad \text{où} \qquad \underline{\tilde{u}} = \mathrm{Cte} \in \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad (\omega, k) \in \mathbb{C}^2$$

16. Justifier que, structurellement, l'équation de propagation impose qu'à une pulsation ω soient associées deux vecteur d'ondes k_+ et k_-. Donner leur expression.

17. Dans le cas où $\omega \in \mathbb{R}$ (supposée alors positive, voire nulle), justifier que les solutions prennent la forme :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\tilde{u}} \exp j\omega t \sin kx$$

L'amplitude complexe $\underline{\tilde{u}}$ n'est, a priori, plus celle apparaissant dans l'équation au départ.

Étude du régime libre sans charge mécanique

Nous supposons ici que $Q = \mathrm{Cte} = 0$ et qu'en $x = L$ la surface du milieu n'est soumise à aucune contrainte extérieure (extrémité droite libre). Il s'agit de caractériser les modes propres de vibration mécanique du milieu en définissant la famille de couples de pulsation ω et de nombre d'onde k alors sélectionnée.

18. Justifier que la pulsation ω est, dans ce cas, réelle (que nous choisirons positive).

19. Établir que les solutions de l'équation de propagation prennent alors la forme :

$$u_q(x,t) = A_q \cos \omega_q t \, f_q(x) \qquad \text{où} \qquad f_q(x) = \in k_q x \qquad q \in \mathbb{N}^\star$$

Donner l'expression du vecteur d'onde k_q ainsi que celle de la pulsation ω_q correspondant au mode q. On choisira la dépendance de ces grandeurs avec l'entier q telle que la valeur $q = 1$ corresponde au premier mode (c'est-à-dire à celui de plus basse fréquence).

20. Représenter graphiquement la dépendance des fonction f_1 et f_2 avec la variable x/L.

Étude du régime libre avec charge mécanique inertielle

Nous nous plaçons encore dans le cas où $Q = 0$ mais la surface d'abscisse $x = L$ entraîne maintenant, dans son déplacement, un objet solide de masse M_o. Cet objet représente l'électrode de droite, liée éventuellement à un élément devant être mis en mouvement. Il n'est soumis à aucune autre force que celle qu'exerce sur lui le milieu piézoélectrique à la surface duquel il est fixé.

21. Justifier que, dans ce cas encore, $\omega \in \mathbb{R}$ (que nous choisirons positive).

22. Nous supposons que la longueur L_o de l'objet, selon l'axe Ox, vérifie $kL_o \ll 1$. Traduire la condition limite en $x = L$. Préciser en quoi l'hypothèse adoptée ici conditionne son écriture.

23. Établir que le vecteur d'onde k est alors solution de l'équation :

$$\mathrm{cotan}\,\theta = \mu\theta \qquad \text{où} \qquad \theta = kL$$

Donner l'expression de la constante positive μ en fonction de M_o, ρ, S et L. En proposer une interprétation physique.

24. Nous envisageons le cas où $M_o = 3m$. La figure 6 représente graphiquement la fonction $\theta \to \mathrm{cotan}\,\theta$ sur l'intervalle $[0, 3\pi]$. Donner, à l'aide de cette figure, l'expression approchée du vecteur d'onde k_q et celle de la fréquence correspondante $f_q = \omega_q/(2\pi)$, en fonction de q (c'est-à-dire,de ce seul paramètre), pour $q \geq 2$. Calculer

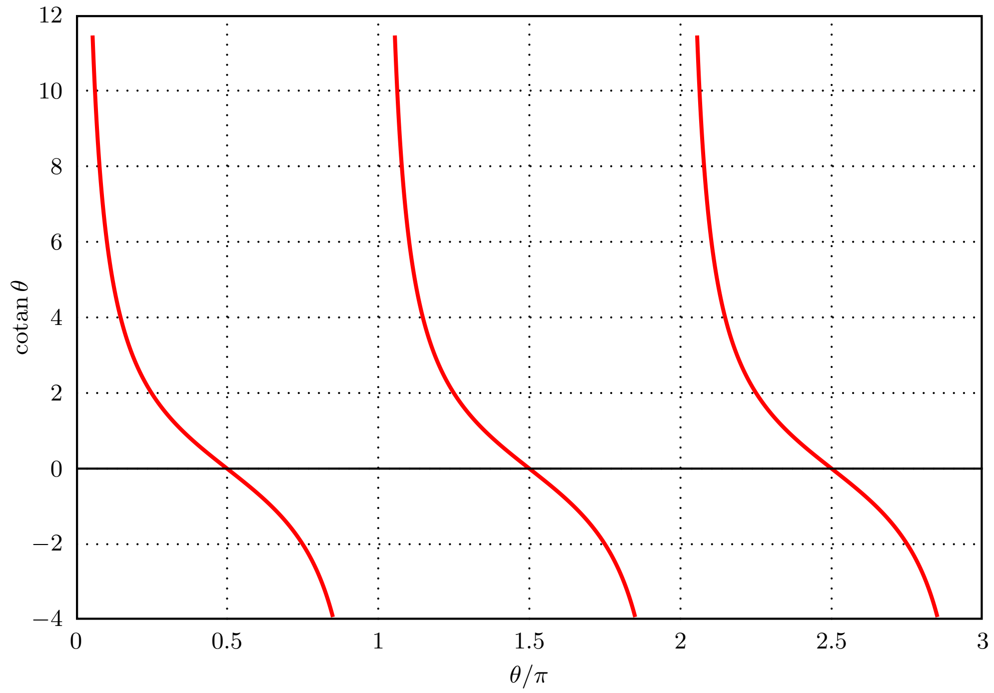

FIGURE 6 – Représentation graphique de la fonction $\theta \to \cot\theta$ pour $\theta \in [0, 3\pi]$

la valeur de f_2. On présentera la démarche suivie. Nous rappelons que le mode $q = 1$ est celui de plus basse fréquence.

25. Analyser successivement les situations telles que $\mu \ll 1$ et $\mu \gg 1$. Donner une interprétation du cas particulier correspondant au mode $q = 1$.

Adaptation de la modélisation à un cadre pratique

Nous souhaitons établir un modèle mécanique simplifié de l'élément piézoélectrique reproduisant, dans un cadre restreint et de façon approchée, son comportement. Nous nous plaçons dans le cas où $Q = 0$ et $M_o = 0$ (extrémité droite libre) et nous adoptons le champ de déplacement relatif au premier mode correspondant qui s'écrit alors :

$$u(x,t) = u_1 \cos\omega_1 t \sin k_1 x \qquad \text{où} \qquad k_1 = \frac{\pi}{2L} \qquad u_1 = \text{Cte} \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, nous ne nous intéressons plus qu'au mouvement de la surface d'abscisse $x = L$ de l'élément piézoélectrique, limité à un domaine fréquentiel s'étendant guère au-delà du premier mode. Nous souhaitons établir à quelles conditions le système mécanique continu d'origine (noté $\mathcal{S}$) est équivalent à un système discret $\mathcal{S}^\star$ constitué d'une masse (effective) $m^\star$ et d'un ressort de raideur (effective) $K^\star$. La position de la masse $m^\star$ est repérée par la variable $\Delta = \Delta(t) = u(L,t)$. Nous appuierons la condition d'équivalence des systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^\star$ sur un critère énergétique. Cette situation d'équivalence est illustrée à la figure 7.

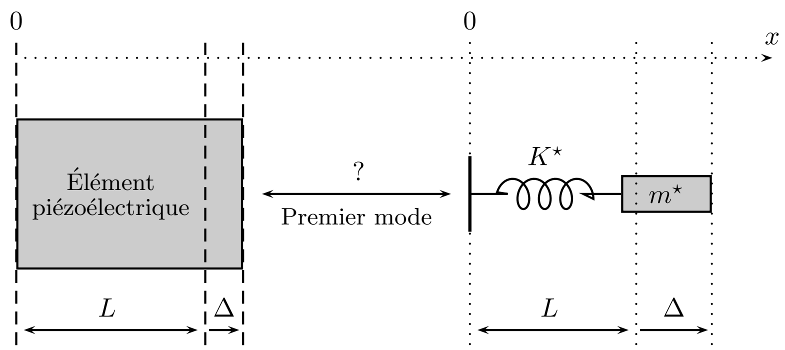

FIGURE 7 – Recherche de l'équivalence masse-ressort, d'un point de vue énergétique, de l'élément piézoélectrique, pour le premier mode.

26. Imposons que l'énergie cinétique $E_c^\star$ du système $S^\star$ reste, à tout instant, égale à celle (notée E_c) du système

$\mathcal{S}$, pour $\Delta(t) = u(L,t)$. Établir la relation liant la masse effective $m^\star$ à la masse m de l'élément piézoélectrique assurant cette égalité. Analyser le résultat.

27. En adaptant le critère énergétique adopté pour identifier $m^\star$, déterminer l'expression de la raideur effective $K^\star$ en fonction des grandeurs A', S et L. On présentera chaque étape de calcul. Comparer cette expression à celle de la raideur K^0 que l'élément présente en statique (ou dans la limite quasi-statique).

28. Vérifier que les expressions trouvées conduisent bien à la pulsation ω_1 du premier mode.

Nous adoptons maintenant ce modèle en considérant que l'élément piézoélectrique est équivalent au système masse-ressort $(m^\star, K^\star)$ représenté à la figure 7. Dans ce cadre, les équations décrivant le comportement électromécanique de l'élément piézoélectrique prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \psi = \dfrac{Q}{C_e} + \dfrac{B}{\varepsilon}\Delta & \text{où} \qquad C_e = \dfrac{\varepsilon S}{L} \\ F_L = K^\star \Delta + \dfrac{B}{\varepsilon} Q & \end{cases}$$

Nous avons, par ailleurs considéré que $\beta = B$. Nous notons $\gamma = (S/L)B = (C_e/\varepsilon)B$, $K_e = \gamma B/\varepsilon$ et $K^{\star\star} = K^\star - K_e$ (en pratique, $K^{\star\star} > 0$). Le déplacement $\Delta = u(L,t)$ de la surface d'abscisse $x = L$ est défini sur les figures 7 et 8. La grandeur F_L représente la force exercée par l'extérieur au milieu piézoélectrique sur la surface d'abscisse $x = L$ de ce dernier. Cette surface est liée à un objet (électrode éventuellement solidaire d'un autre élément) de masse M_o qui suit sont mouvement. Nous notons $M = m^\star + M_o$ la masse totale. Enfin, cet objet est soumis à une force $\vec{F_o} = F_o\vec{e}_x$, extérieure au système électromécanique $(M, K^\star, Q)$. La figure 8 représente l'élément piézoélectrique dans cet environnement.

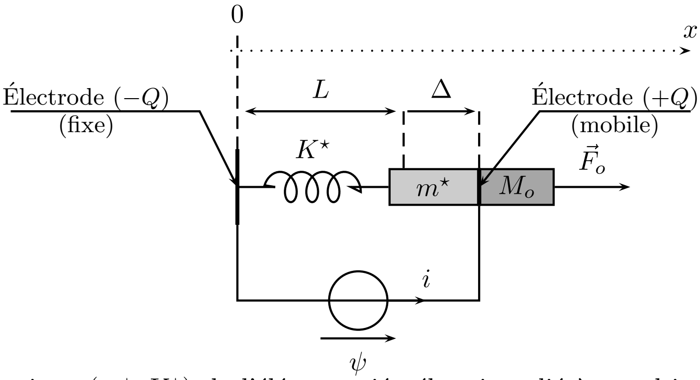

Figure 8 – Modèle mécanique $(m^\star, K^\star)$ de l'élément piézoélectrique lié à un objet rigide de masse M_o. Ce dernier est soumis à une force $\vec{F_o} = F_o\vec{e}_x$, extérieure au système électromécanique $(M = m^\star + M_o, K^\star, Q)$. Les électrodes sont soumises à une différence de potentiel ψ.

Nous souhaitons caractériser le comportement harmonique de ce système. nous écrirons chacune des variables du temps t en représentation complexe, sous la forme :

$$\underline{s} = \underline{\tilde{s}} \exp j\omega t$$

29. Écrire le principe fondamental de la Dynamique appliqué à la masse M. En déduire la relation liant l'amplitude complexe $\underline{\tilde{F}_o}$ de la force extérieure aux amplitudes complexes $j\omega\underline{\tilde{\Delta}}$ et $\underline{\tilde{\psi}}$ de la vitesse et du potentiel. On ne fera intervenir, dans cette relation, que le paramètre γ et la grandeur $Z_{\text{méca}}$ définie par la relation :

$$Z_{\text{méca}}(j\omega) = j\omega M + \frac{K^{\star\star}}{j\omega}$$

Cette grandeur définit l'impédance mécanique du système masse-ressort $(M, K^{\star\star})$.

30. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{\tilde{i}}$ du courant en fonction des amplitudes complexe $j\omega\underline{\tilde{\psi}}$ et $j\omega\underline{\tilde{\Delta}}$. On ne fera intervenir, dans cette relation, que le paramètre γ et la capacité électrique C_e.

31. Les résultats établis dans les deux questions précédentes permettent d'établir que ce système électromécanique peut être symboliquement représenté selon le schéma de la figure 9. L'opérateur (T) symbolise le couplage électromécanique apparaissant dans un élément piézoélectrique. Il joue en rôle analogue à celui d'un transformateur électrique.

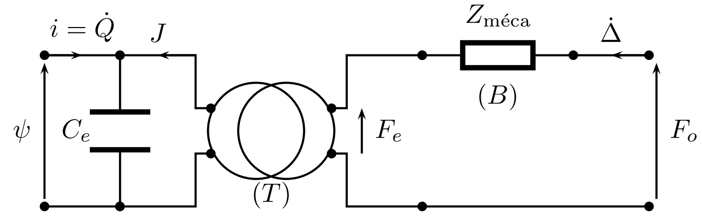

FIGURE 9 – Schématisation, en empruntant la symbolisation de l'électrocinétique, du système électromécanique représentant un élément piézoélectrique soumis à la différence de potentiel ψ et à la force extérieure $F_o\vec{e}_x$.

Donner l'expression de chacune des grandeurs J et F_e. En déduire l'expression du rapport de transformation défini par le rapport F_e/ψ. Représenter le contenu du dipôle (B) en restant dans la logique de cette représentation, c'est-à-dire en utilisant les symboles de l'électrocinétique. Indiquer pourquoi le transformateur (T) est dit parfait.

32. Nous nous plaçons dans le cas où $F_o = 0$. À partir du modèle du transformateur représenté sur la figure 9, préciser la composition de l'impédance électrique Z_Q perçue par le générateur délivrant la différence de potentiel ψ.

Dans la réalité, l'impédance mécanique comprend un terme supplémentaire, indépendant de la pulsation. Ce terme traduit la dissipation de l'énergie mécanique au sein du milieu au cours de sa déformation. Transposé dans le domaine électrique, il correspond à une résistance.

B. Application de l'effet piézoélectrique à la transformation de tension

Nous adoptons le modèle discret $(m^\star, K^\star)$ d'un élément piézoélectrique, chargé inertiellement par une masse M_o, représenté à la figure 8. Ses électrodes sont soumises à la différence de potentiel ψ et la masse M_o à la force extérieure $\vec{F}_o = F_o\vec{e}_x$. Ce système électromécanique correspond au schéma symbolique présenté à la figure 9.

Nous plaçons tête-bêche[1] un premier élément[2] $(m^\star, K^\star, \psi)_1$ associé à une masse M_o, et un second élément $(m^\star, K^\star, \psi)_2$ (de caractéristiques a priori différentes). La force $\vec{F}_o = F_o\vec{e}_x$ devient la force $\vec{F}_{2/o}$, appliquée par l'élément (2) sur l'objet. La figure 10 représente la mise en correspondance des schémas symboliques de ces deux systèmes, avant leur association.

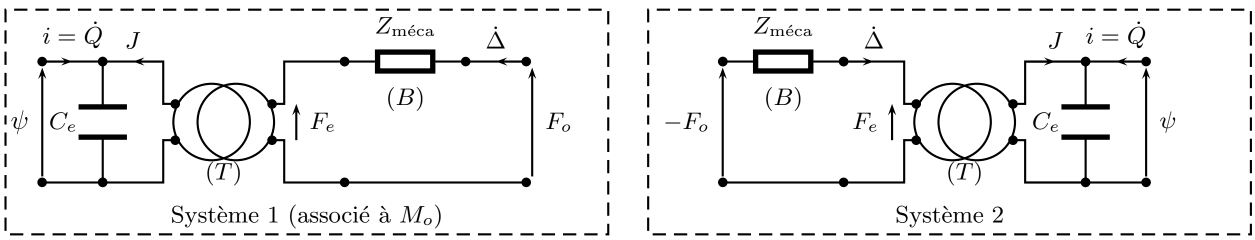

FIGURE 10 – Schémas symboliques de deux éléments piézoélectriques placés en correspondance, avant leur association. Les variables et paramètres propres à chaque système 1 et 32 doivent être lus comme portant l'indice 1 ou 2 correspondant, exceptée la variable F_o qui leur est commune. La masse M_o est prise en compte dans l'impédance mécanique $Z_{\text{méca},\,1}$ du système (1).

Effectuons maintenant le retournement haut⇆bas du système (2) ainf de transformer $-F_o$ en F_o (orientée vers le haut). Parallèlement, la vitesse $\dot{\Delta}_2$ est changée, sur la branche supérieure de son circuit primaire, en $-\dot{\Delta}_2 = \dot{\Delta}_1$ (vitesse commune des surfaces mises en contact). Les deux schémas peuvent alors être raccordés, les impédances mécaniques s'additionnant. La figure 11 illustre cette opération.

Enfin, transformons les grandeurs mécaniques en grandeurs électrique correspondantes en les ramenant au circuit primaire du transformateur T_1. Nous aboutissons finalement au schéma représenté sur la figure 12. Sur cette figure sont introduites les nouvelles notations et conventions utilisées dans cette partie. Nous notons m (m = Cte $\in \mathbb{R}$) le rapport de transformation du transformateur idéal (T), c'est-à-dire que $U_2 = mU_1$ et $J_2 = J_1/m$. Dans toute la suite, nous noterons $X_1 = X_1(t)$ une variable réelle dépendant du temps t et $\underline{X}_1 = \underline{X_1}(\omega)$ l'amplitude de la grandeur complexe qui lui est associée, en régime harmonique de pulsation ω.

1. Nous supposons que les surfaces extrêmes de cet assemblage restent immobiles.
2. Naturellement, les deux électrodes mobiles sont isolées électriquement l'une de l'autre.

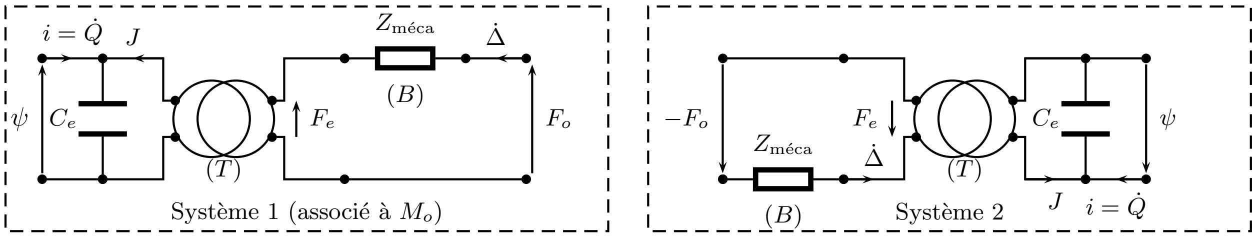

FIGURE 11 – Schémas symboliques de deux éléments piézoélectriques prêts à être associés. Les variables et paramètres propres à chaque système 1 et 2 doivent être lus comme portant l'indice 1 ou 2 correspondant, exceptée la variable F_o qui leur est commune. La masse M_o est prise en compte dans l'impédance mécanique $Z_{\text{méca}\,1}$ du système (1).

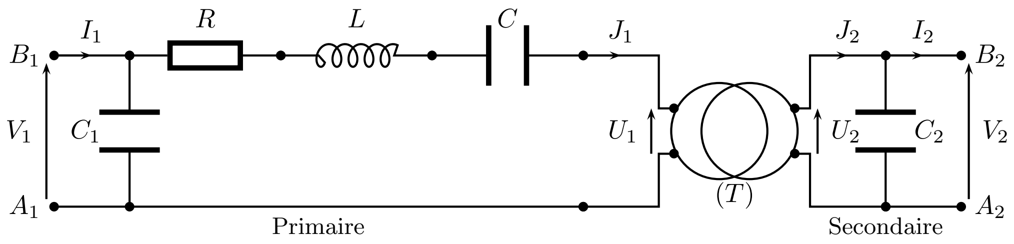

FIGURE 12 – Modèle électrique de deux éléments piézoélectriques en interaction formant un transformateur réalisant la conversion $(V_1, I_1) \to (V_2, I_2)$. Nous rappelons que les éléments R, L et C traduisent, dans le domaine électrique, le comportement mécanique des deux éléments piézoélectriques couplés par l'intermédiaire de la masse M_o.

Détermination des éléments du schéma équivalent

IL 'sagit de déterminer, à partir d'une étude fréquentielle du transformateur, les valeurs des paramètres de son modèle équivalent représenté sur la figure 12. Nous nous limiterons à la détermination des éléments C_1, R, L et C situés au primaire du transformateur. Pour cela, nous réalisons un essai en court-circuit. Dans ces conditions, $V_2 = U_2 = 0$ et donc $U_1 = 0$. L'admittance d'entrée du transformateur s'exprime alors :

$$Y_1 = \frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_1} = jC_1\omega + \frac{1}{R + j(L\omega - 1/(C\omega))}$$

Par ailleurs, nous définissons les deux pulsations caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \omega_s = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} & \text{(pulsation se rapportant au comportement mécanique du transformateur)} \\ \omega_p = \dfrac{1}{\sqrt{LC_{eq}}} & \text{où} \quad C_{eq} = \dfrac{CC_1}{C + C_1} \qquad C_1 \gg C \end{cases}$$

La pulsation ω_s correspond sensiblement au maximum de $|Y_1|$ et ω_p à son minimum. La figure 13 représente, sir le tracé de gauche, la dépendance du module de l'admittance Y_1 en fonction de la fréquence, en représentation $\log_{10} - \log_{10}$. Le tracé de droite représente le lieu de Y_1 dans le plan complexe, paramétré par la pulsation.

33. Estimer, à partir des tracés de la figure 13, la valeur de chacun des paramètres R, C_1, C et L (il est plus aisé de suivre cet ordre). On présentera chaque calcul.

Analyse du comportement du transformateur en charge

Le transformateur alimente maintenant une charge située au secondaire, modélisée par une résistance R_L. Cette résistance est connectée entre les points A_2 et B_2 du modèle équivalent représenté sur la figure 12. Nous notons Z_2 l'impédance du dipôle constitué de R_L en parallèle avec C_2 et qui forme la charge totale. Le transformateur est alimenté, au primaire, par un générateur délivrant la tension V_1 de pulsation ω. En ramenant l'impédance Z_2 du secondaire au primaire, nous obtenons le schéma équivalent représenté à la figure 14. L'élémnet (D) est un dipôle d'impédance Z_2' représentant la charge totale transférée au primaire.

34. En s'appuyant sur les relations de transformation des tension et courant $U_2 = mU_1$ et $J_2 = J_1/m$, exprimer Z_2' en fonction de Z_2. Caractériser les éléments R_L' et C_2' constituant le dipôle (D) si l'on conserve la même structure de l'impédance, c'est-à-dire si ces deux éléments sont disposés en parallèle.

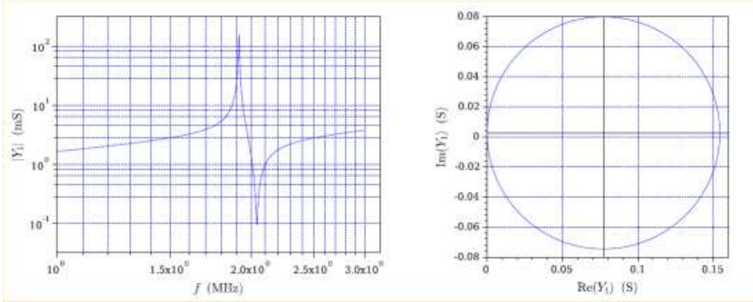

FIGURE 13 – Tracé de gauche : Dépendance du module de l'admittance complexe Y_1 en fonction de la fréquence, en représentation $\log_{10} - \log_{10}$. Tracé de droite ; Lieu de Y_1 dans le plan complexe, paramétré par la pulsation, pour le même interval fréquentiel que sur le tracé de gauche. Ce lieu est parcouru dans le sens horaire, pour une évolution croissante de la pulsation.

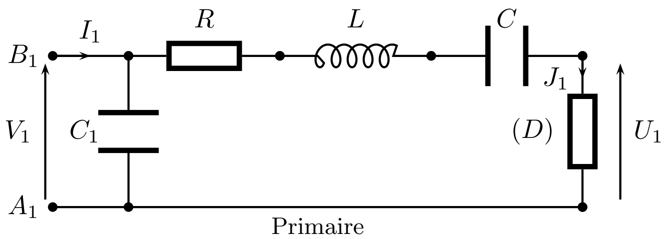

FIGURE 14 – Modèle électrique du transformateur dont la charge totale a été ramenée au primaire, sous la forme du dipôle (D).

En vue d'analyser plus aisément le comportement du transformateur en charge, nous transformons la structure parallèle du dipôle (D) en structure série. Ainsi, l'association en parallèle des éléments R'_L et C'_2 est équivalente à l'association en série de la résistance R_s et la capacité C_s définies par les relations :

$$\begin{cases} R_s = \dfrac{R_L/m^2}{1+(R_LC_2\omega)^2} \\ C_S = m^2C_2\dfrac{1+(R_LC_2\omega)^2}{(R_LC_2\omega)^2} \end{cases}$$

Il s'agit de placer le transformateur en charge sur le point de fonctionnement choisi. Ce choix repose souvent sur une condition de transfert maximum de puissance à la charge ou de gain maximal en tension. Pour cela, à fréquence fixée, on peut ajuster la valeur de la résistance R_L. On peut également, pour une valeur fixée de cette résistance, agir sur la fréquence.

35. En ne prenant pas en compte la dépendance de la résistance R_s avec la pulsation, exprimer la pulsation de résonance en courant, notée ω_r, la puissance P_2 transmise à la charge R_L, en fonction de R, R_s et $|V_1|$.

36. Définir à quelle condition cette puissance est maximale, pour une amplitude de la tension d'entrée V_1 fixée.

37. Nous nous plaçons dans le cas où $m \geq 1$ et nous considérons que $C_2 \gg C$. Discuter qualitativement la condition précédente vis-à-vis de la résistance R_L.

Alimentation d'une lampe fluorescente à cathode froide par un transformateur piézoélectrique

L'alimentation d'une lampe fluorescente à cathode froide (LCF), utilisée notamment pour le rétro-éclairage des écrans plats à cristaux liquides, constitue une application courante du transformateur piézoélectrique. Une LCF se présente comme une ampoule cylindrique d'un diamètre de quelques millimètres et d'une longueur de plusieurs centimètres. Elle est alimentée par un transformateur piézoélectrique piloté par un dispositif électronique fournissant la tension V_1, de fréquence f, à son primaire. Ce dispositif électronique, à partir du suivi de la valeur efficace du courant I_2 traversant la lampe, amène le système transformateur-LCF sur le point de fonctionnement choisi.

Une LCF présente une caractéristique courant-tension non-linéaire. Le tracé de gauche de la figure 15 représente la dépendance de la tension efficace V_2^{eff} entre ses bornes en fonction du courant efficace I_2^{eff} qui la traverse. Le tracé de droite représente la dépendance de la résistance R_L de la lampe en fonction de I_2^{eff}. Cette résistance a été définie par le rapport $V_2^{\text{eff}}/I_2^{\text{eff}}$. La valeur de la tension efficace V_2^{eff} doit atteindre un certain seuil, appelé tension d'amorçage, pour initier l'allumage. Après l'amorçage, la tension V_2^{eff} décroît avec le courant I_2^{eff}.

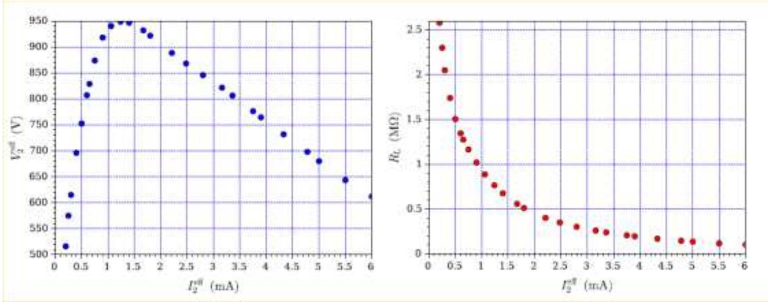

FIGURE 15 – À gauche : caractéristique courant-tension d'une LCF. À droite : dépendance de sa résistance, définie par le rapport $V_2^{\text{eff}}/I_2^{\text{eff}}$, avec le courant efficace la traversant.

Le transformateur piézoélectrique est caractérisé par la dépendance de la valeur efficace V_2^{eff} de sa tension de sortie avec la fréquence f, paramétrée par la résistance R_L qui le charge. La figure 16 représente cette dépendance pour $V_1^{\text{eff}} = 15\,\text{V}$ et les valeurs : $R_L = 140\,;\,200\,;\,300\,;\,500$ et $750\,\text{k}\Omega$.

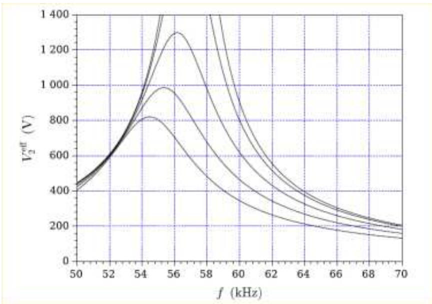

FIGURE 16 – Tension efficace V_2^{eff} de sortie du transformateur en fonction de la fréquence f pour $V_1^{\text{eff}} = 15\,\text{V}$ et différentes valeurs de la chargfe : $R_L = 140\,;\,200\,;\,300\,;\,500$ et $750\,\text{k}\Omega$. En suivant cet ordre, les maxima des courbes vont croissant.

Le système transformateur-LCF présente les caractéristiques générales suivantes :

- Valeur efficace de la tension au primaire : $15\,\text{V}$
- Tension efficace d'amorçage : $950\,\text{V}$
- Tension efficace nominale : $680\,\text{V}$
- Courant efficace nominal : $5\,\text{mA}$

Le dispositif électronique de pilotage peut faire varier la fréquence f dans la plage $[f_{min}; f_{max}]$ où $f_{min} = 50\,\text{kHz}$ et $f_{max} = 70\,\text{kHz}$. Dans la situation initiale, la lampe est éteinte et $f = f_{max}$.

38. Reproduire (approximativement) la figure 16 et y placer (toujours approximativement) le point P_0 correspondant à la situation initiale. Réaliser cette figure suffisamment grande, elle sera réutilisée dans la suite.

39. Le dispositif électronique réduit alors progressivement la fréquence pour atteindre le point P_1 correspondant à l'amorçage. Placer ce point (approximativement)sur la figure précédente en justifiant sa position. Préciser comment doit être ajustée la fréquence depuis la situation P_1. Indiquer la valeur f_2 de la fréquence correspondante.

40. Il s'agit enfin d'atteindre le point de fonctionnement P_2 correspondant au régime nominal. Placer ce point (approximativement) sur la figure précédente en justifiant sa position. Préciser comment doit être ajustée la fréquence depuis la situation P_1. Indiquer la valeur f_2 de la fréquence correspondante.

C'est en 1956 que CHARLES A. ROSEN conçoit le premier transformateur piézoélectrique. Il le réalisa à partir d'un barreau de titanate de baryum. Ce type de transformateur est aujourd'hui de plus en plus utilisé dans les dispositifs nomades nécessitant une forte miniaturisation et des tensions élevées.

Oscillateur électrique utilisant un élément piézoélectrique

Le couplage électromécanique particulier s'établissant dans un matériau piézoélectrique peut être mis à profit dans la conception d'oscillateurs devant présenter une grande stabilité en fréquence. Ces oscillateurs fournissent la base de temps des horloges de précision. Un élément piézoélectrique, général un quartz, est alors intégré dans un filtre formant la chaîne de retour d'un système bouclé particulier. La figure 17 représente la structure du système linéaire électrique à partir duquel sera réalisé un tel oscillateur. Elle comporte :

- Un amplificateur de tension (élément actif) de résistance d'entrée R_e, de résistance de sortie R et de gain en tension à vide G_0 ($G_0 = \text{Cte} \in \mathbb{R}$) (c'est donc le gain à courant de sortie I nul) ;
- Un pont d'impédance (Z_1, Z_2, Z_3) ayant vocation à former un filtre.

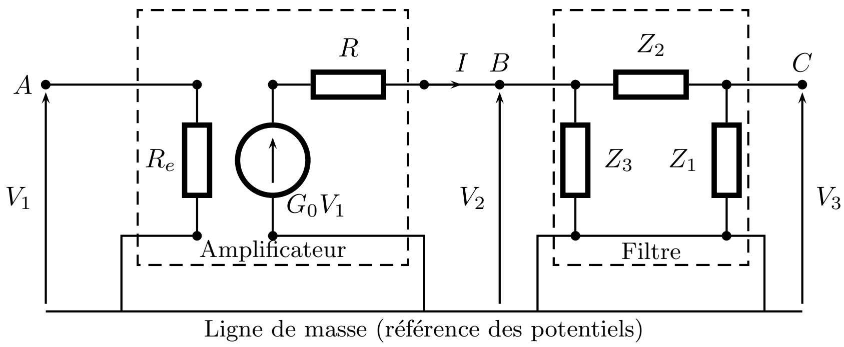

FIGURE 17 – Système linéaire électrique composé d'un amplificateur (G_0, R_e, R) suivi d'un filtre (Z_1, Z_2, Z_3).

Nous notons p ($p \in \mathbb{C}$) la variable[3] de LAPLACE. Les grandeurs $V_1 = V_1(p)$, $V_2 = V_2(p)$, $V_3 = V_3(p)$ et $I = I(p)$ représentent les grandeurs symboliques associées aux tensions $v_1 = v_1(t)$, $v_2 = v_2(t)$, $v_3 = v_3(t)$ et au courant $i = i(t)$. Les impédances $Z_i = Z_i(p)$ sont des grandeurs complexes. Il s'agit d'étudier le principe d'un oscillateur à quartz et de définir quel rôle particulier ce dernier joue.

41. Établir la relation liant les grandeurs d'entrée V_1 et de sortie V_3. Nous l'écrirons sous la forme :

$$\frac{G_0}{R} V_1 = Y V_3$$

L'admittance Y est à exprimer en fonction des impédance Z_i et de la résistance R. On pourra d'abord égaler les expression du courant I, vu d'une part comme sortant de l'amplificateur, vu d'autre part comme entrant dans le filtre.

Le point C du circuit est connecté au point A, bouclant ainsi le système sur lui-même. Nous supposons par ailleurs que la valeur de la résistance d'entrée R_e est suffisamment élevée pour que l'on puisse considérer que la relation précédente liant V_1 et V_3 reste utilisable (hypothèse $H(R_e)$). Il s'agit de définir la nature (c'est-à-dire le comportement) des solutions $v_i = v_i(t)$, dans ces conditions.

42. Indiquer à quelle condition, portant sur les composants du système, l'hypothèse $H(R_e)$ est justifiable.

43. Former, à partir de la reliant liant V_1 et V_3, l'équation dont la variable p est alors solution. Rappeler le lien existant entre la variable complexe p et la nature des solutions d'un système linéaire en régime libre.

Nous recherchons à quelle condition il existe des solutions particulières pour lesquelles $p = j\omega$ ($\omega \in \mathbb{R}$). Par ailleurs, les impédances du pont sont maintenant supposées être purement imaginaires (situation idéalisée par l'absence d'effet dissipatif). Nous les notons alors $Z_i(j\omega) = jS_i(\omega)$ ($S_i \in \mathbb{R}$).

44. Établir que cette condition se traduit par deux relations pouvant se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} F(S_1, S_2, S_3) = 0 \\ G(S_1, S_2, G_0) = 0 \end{cases}$$

On explicitera chacune des fonctions F et G. Indiquer pourquoi la résistance R n'intervient pas dans cette condition.

45. Nous notons $K_2 = S_2/S_1$ et $K_3 = S_3/S_1$. Établir que le système d'équations précédent conduit aux deux égalités :

$$\begin{cases} K_2 = G_0 - 1 \\ K_3 = -G_0 \end{cases}$$

3. En régime harmonique, $p = j\omega$.

46. Nous nous plaçons dans le cas où $G_0 < 0$ (gain fixé) et nous choisissons l'impédance Z_1 telle que $Z_1 = 1/(jC_1\omega)$ (capacité C_1 fixée). Identifier et caractériser le dipôle d'impédance Z_3.

Le dipôle d'impédance Z_2 est un quartz. Il est caractérisé par la dépendance $S_2 = S_2(\omega)$ représentée sur la figure 18. La grandeur ω_p est la pulsation de résonance parallèle (ou résonance bouchon) du quartz. Elle correspond ici à la fréquence $f_p = 1\,\text{MHz}$.

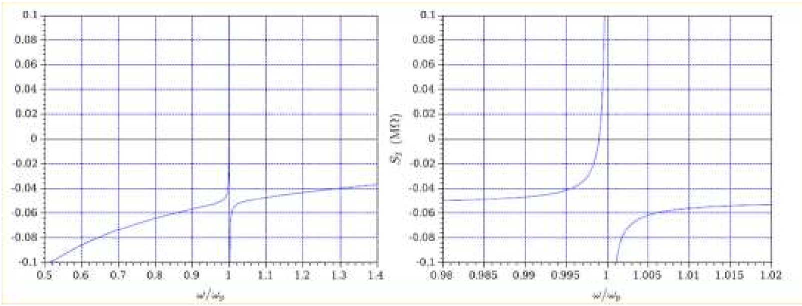

FIGURE 18 – Dépendance $S_2 = S_2(\omega)$ pour le quartz d'impédance $Z_2 = jS_2$. Le tracé de droite est un agrandissement horizontal de la eon centrale du tracé de gauche. Afin que ces tracés restent exploitables, les cadres graphiques ont été restreints verticalement. L'échelle des ordonnées est commune au deux tracés.

47. Indiquer comment déterminer, à partir de la figure 18, la pulsation du système bouclé. Estimer numériquement l'écart relatif $\Delta\omega/\omega_p$ dans lequel cette pulsation se situe.

48. Justifier qu'il était possible d'utiliser une bobine (non résistive, afin de rester dans le cadre de cette étude), à la place d'un quartz. Préciser alors quel est l'intérêt d'un quartz.

Lorsqu'un tel oscillateur est utilisé comme base de temps étalon, il devient nécessaire de le stabiliser thermiquement afin de liiter la dérive des caractéristiques mécaniques du quartz. Ces systèmes contrôlés en température sont connus sous le nom de Oven Controlled Crystal Oscillator ou OCXO.