

# Devoir libre de Sciences Physiques n°1 du 11-09-2024

— Solutions —

## Problème n° 1 – Quelques aspects de la mesure du temps

X MP 2011

Extraits de ce sujet.

### A. Horloge à quartz

1. On trouve une pulsation série  $\omega_s = 2 \times 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  donc une fréquence  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 32,8 \text{ kHz}$ . La pulsation parallèle est  $\omega_p = \omega_s(1 + 10^{-3})$  et le facteur de qualité très élevé  $Q = 5 \times 10^4$ .

2. Dans le cas où  $R_1 = 0$ , la réactance  $X(x) = -\frac{1}{C_0\omega_s} \frac{1}{x} \left( \frac{1-x^2}{a^2-x^2} \right)$  est représentée sur le graphique de la figure 1. On a un effet de condensateur lorsque  $X(x) < 0$ , c'est-à-dire pour  $0 < x < 1$  et pour  $x > a$ . Le circuit se comporte comme une bobine lorsque  $1 < x < a$ . Enfin, le circuit est un fil court-circuit lorsque  $x = 1$ . On peut aussi dire que le circuit est un interrupteur ouvert lorsque  $x = a$  car l'impédance imaginaire est infinie.

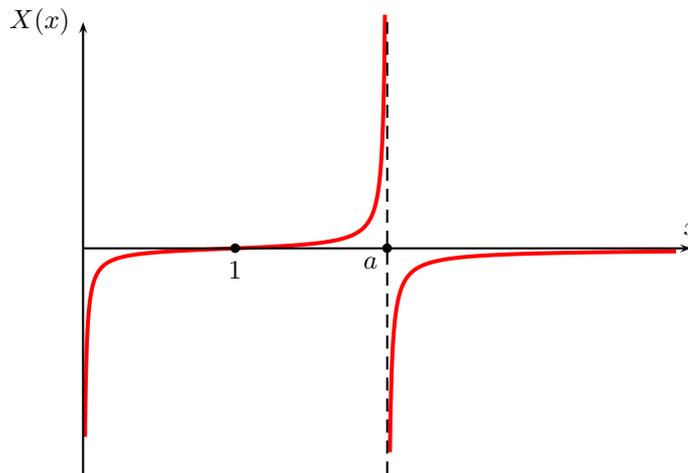


FIGURE 1 – Réactance du quartz piézoélectrique

3. Il s'agit de l'association série de  $R_1$  et de  $L_1$ . En effet l'impédance de l'ensemble est  $\underline{Z}_1 = R_1 + jL_1\omega = jL\omega$ . On en déduit effectivement un coefficient d'autoinductance  $L = L_1 + \frac{R_1}{j\omega}$ .

4. L'énoncé nous donne  $Z(\omega_s) = \frac{R_1 C_0}{1 + j\frac{C_0}{Q\omega_s}}$  et  $Z(\omega_p) \simeq \frac{R_1}{R_1^2 C_0^2 \omega_s^2}$ . On peut prévoir que la partie réelle de l'impédance est positive à cause des pertes énergétiques provoquées par la résistance  $R_1$ , cela correspond aussi à l'expression  $Z(\omega_p)$  donnée avant. On vérifie en outre que la valeur de l'impédance est de l'ordre de  $340 \text{ M}\Omega$  ce qui correspond effectivement aux  $327 \text{ M}\Omega$  annoncés par le sujet. La courbe en pointillés est donc  $\Re(\underline{Z})$  et la courbe en trait plein la partie imaginaire  $\Im(\underline{Z})$ . On constate que la partie imaginaire de l'impédance s'annule comme dans le cas d'une résonance d'intensité en circuit  $RLC$  série. Ici, la situation est pourtant différente, on peut parler d'antirésonance puisque l'impédance passe par un maximum. Le facteur de qualité correspond bien à ce que l'on définit habituellement. On peut constater sur le graphique que la largeur indiquée de  $\frac{1}{Q}$  correspond bien à un intervalle de fréquence tel qu'on pouvait s'y attendre à savoir celui pour lequel  $Z(\omega_p)/2 < \Re(\underline{Z}) < Z(\omega_p)$ .

5. Le graphique propose d'étudier  $Z(x)/Z(a)^1$  puisqu'en  $x = a = 1,001$ , ce rapport vaut 1. On constate qu'en  $x = 1$ , donc pour  $f = f_s$ , on a  $Z(\omega_s) = 10^{-4}Z(\omega_p)$ . L'impédance à cette pulsation est la plus faible. Pour une tension donnée, le courant électrique qui circulera sera donc le plus important. On travaille à une fréquence  $f_s = 32\,768 \text{ Hz}$  car cette fréquence correspond à une puissance de 2. On a  $32\,768 = 2^{15}$ . Ceci permet de faire agir ensuite sur la tension de départ, 15 circuits électroniques qui divisent la fréquence du signal par 2 et de venir sur 1 Hz qui correspond à une période de 1 s.

6. On a  $\frac{\Delta f_0}{f_0} = -4 \times 10^{-6}$ . Cela permet d'en déduire que  $\frac{\delta t}{\Delta t} = +4 \times 10^{-6}$ . La fréquence diminue, la période augmente. On peut calculer ainsi que la montre **retarde de 2 minutes** par an.

1. L'énoncé indiquait par erreur que le graphique représentait  $Z(x)/Z(1)$ .

## B. Oscillateur non linéaire entretenu : modèle électrique du balancier

7. On a  $i = -GV \sin \omega t + \beta V^3 \sin^3 \omega t$ . Avec la formule donnée pour exprimer  $\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t$ , on obtient  $i = (-GV + \frac{3}{4}\beta V^3) \sin \omega t - \frac{1}{4}\beta V^3 \sin 3\omega t$ . On peut négliger le terme de pulsation  $3\omega$  car il y a une adaptation de la source d'énergie à la pulsation propre de l'oscillateur ce qui fait que le terme en  $3\omega$  sera filtré par le circuit. On peut donc écrire  $i \simeq (-G + \frac{3}{4}\beta V^2) v$ .

8. L'admittance de la partie classique du circuit est la somme des admittances de chacun. On a  $\underline{Y}_g = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega + G_0$ . Pour la partie non classique, il faut voir que la relation  $i = f(v)$  établie à la question précédente définit correctement l'admittance de ce dipôle puisque la convention entre  $i$  et  $v$  est récepteur. L'admittance totale est donc  $\underline{Y} = G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2 + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$ . On a donc  $g_1 = G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2$  et  $x_1 = C\omega - \frac{1}{L\omega}$ . Commençons par écrire la loi des nœuds en prenant garde à l'orientation des courants qui sont tous montants dans les dipôles. On en déduit que  $i_1 + i_2 + i_3 = i$ . Or, la tension  $v$  est reliée aux diverses intensités par les relations  $v = -jL\omega i_1$ ,  $i_2 = -jC\omega v$  et  $i_3 = -G_0 v$ . En écrivant cette loi des nœuds sous forme complexe, on constate que cela revient à écrire que  $\underline{Y}v = 0$ . Cette relation sera vraie pour toute tension  $v$  non nulle si  $\underline{Y} = 0$ . Un régime d'oscillation entretenu sera possible lorsque  $C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$  et lorsque  $G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2 = 0$ . Ces deux conditions conduisent bien à  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et à  $V = V_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{G - G_0}{\beta}}$  à condition que  $G > G_0$  pour que l'apport d'énergie permette de compenser les pertes par effet JOULE.

9. Si l'on reprend l'équation précédente écrite en complexes en la transposant dans le domaine temporel, on obtient l'équation différentielle  $C \frac{d^2 v}{dt^2} + (G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0$ . Cette équation possède des solutions divergentes avec le temps  $t$  jusqu'à la saturation du dispositif qui apporte de l'énergie si le terme  $G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2 < 0$ . Si on part d'une tension nulle pour  $v$  et qu'il se produit une petite fluctuation de tension, alors le terme  $\frac{3}{4}\beta V^2 \simeq 0$  et le signe du facteur de la dérivée première est donné par celui de  $G_0 - G$ . Or, comme nous l'avons vu on a nécessairement  $G > G_0$  et donc  $G_0 - G < 0$ . La petite fluctuation de tension est donc amplifiée jusqu'à ce qu'elle se stabilise à une amplitude  $V = V_0$ .

10. Avec une définition du facteur de qualité  $Q$  positif<sup>3</sup>, l'équation différentielle précédente peut se réécrire  $\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 v = 0$ . On pose  $v(t) = V(t) \sin \omega_0 t$ . On obtient  $\frac{dv}{dt} = \omega_0 V(t) \cos \omega_0 t + \frac{dV}{dt} \sin \omega_0 t$  tout d'abord, puis la dérivée seconde  $\frac{d^2 v}{dt^2} = -\omega_0^2 V \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \frac{dV}{dt} \cos \omega_0 t + \frac{d^2 V}{dt^2} \sin \omega_0 t$ . En combinant dans l'expression précédente avec  $\omega_0^2 v = \omega_0^2 V \sin \omega_0 t$ , on arrive à l'expression différentielle  $2\omega_0 \frac{dV}{dt} \cos \omega_0 t + \frac{d^2 V}{dt^2} \sin \omega_0 t + \frac{3\beta}{4C}(V^2 - V_0^2) [\omega_0 V \cos \omega_0 t + \frac{dV}{dt} \sin \omega_0 t] = 0$ . Les variations de l'amplitude  $V(t)$  sont qualifiées de lentes. Cela va nous permettre de négliger le terme  $\frac{dV}{dt} \sin \omega_0 t$  devant  $\omega_0 V(t) \cos \omega_0 t$  et, de la même façon, on pourra simplifier  $\frac{d^2 V}{dt^2} \sin \omega_0 t$  devant  $2\omega_0 \frac{dV}{dt} \cos \omega_0 t$ . L'équation différentielle devient alors  $2\omega_0 \frac{dV}{dt} \cos \omega_0 t = \frac{3\beta}{4C}(V_0^2 - V^2)V \omega_0 \cos \omega_0 t$  que l'on simplifie pour obtenir effectivement la forme :  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{3\beta}{8C}(V_0^2 - V^2)$ . On peut retrouver cette équation différentielle par une étude énergétique. L'énergie est stockée dans le condensateur et dans la bobine. On a  $E = \frac{1}{2}Cv^2(t) + \frac{1}{2}Li_1^2(t)$  avec  $v = -L \frac{di_1}{dt}$ . On sait que dans le cas d'un oscillateur fonctionnant à sa pulsation propre, la contribution à l'énergie moyenne de la bobine est exactement équivalente à celle du condensateur. Si on note  $W(t) = \langle E \rangle_t$  la moyenne temporelle de l'énergie (moyenne calculée sur une période  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  petite devant la durée d'évolution de l'amplitude  $V(t)$ ), on a  $W(t) = 2 \times \frac{1}{4}CV^2(t)$  car  $\langle v^2 \rangle_t = \frac{V^2(t)}{2}$ . En dérivant, on obtient  $\frac{dW(t)}{dt} = CV(t) \frac{dV}{dt}$ . Cette expression correspond à la puissance reçue par le système bobine-condensateur et donc à la puissance fournie par le reste du circuit. On a donc  $\frac{dW(t)}{dt} = - \langle (-i_3 + i)v \rangle_t$  pour tenir compte des deux situations de convention du schéma du circuit que l'on rencontre à savoir la convention générateur sur  $G_0$  et la convention récepteur sur le dipôle actif. On a donc  $\frac{dW(t)}{dt} = (G - G_0 - \frac{3\beta}{4}V^2) \frac{V^2}{2}$ . Dans ces conditions, l'égalité entre la puissance reçue et la puissance fournie conduit à  $CV \frac{dV}{dt} = \frac{3\beta}{8}(V_0^2 - V^2)V^2$ . Cette équation est bien la même que celle que nous avons établie avant.

11. On a  $\frac{dV}{dt} > 0$  car au départ  $V_1 < V_0$ . L'amplitude de la tension  $v(t)$  est croissante au cours du temps. Ceci se poursuit jusqu'à ce que  $V = V_0$ , à ce moment l'apport d'énergie compense juste les pertes et l'amplitude se stabilise. Si l'amplitude devenait supérieure à  $V_0$  alors le coefficient de la dérivée première changerait de signe et l'amplitude de la tension diminuerait. On a une stabilisation à une amplitude  $V(t) = V_0$ .

2. L'énoncé a confondu  $b$  et  $\beta$ .

3. Il aurait fallu définir  $Q = \frac{1}{|g_1|} \sqrt{\frac{C}{L}}$

## Problème n° 2 – Origine des déchets nucléaires

Centrale PSI 2008

### A. La radioactivité

1. L'équation différentielle est  $\frac{dc_r(t)}{dt} + \lambda c_r(t) = 0$ . Avec la condition initiale proposée, la forme de la solution est :  $c_r(t) = c_r(0) \exp(-\lambda t)$ .

2. Par définition de la période  $T$ , temps au bout duquel la concentration initiale a été divisée par deux, on peut écrire que  $c_r(T) = \frac{c_r(0)}{2} = c_r(0) \exp(-\lambda T)$ . En passant à la forme logarithmique, on a :  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ .

3. On note  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , les constantes radioactives respectives de  $^{238}\text{U}$  et  $^{235}\text{U}$ . Si  $c_0$  est la concentration commune des deux isotopes lors de la formation de la Terre, on peut écrire qu'à la date  $t_a$  correspondant à l'âge de la Terre :  $c_{r8}(t_a) = c_0 \exp(-\lambda_1 t_a)$  et  $c_{r5}(t_a) = c_0 \exp(-\lambda_2 t_a)$ . En formant le rapport  $\gamma$  des deux abondances, on obtient  $\gamma = \frac{c_{r8}}{c_{r5}} = \exp(\lambda_2 - \lambda_1)t_a$ . En utilisant l'expression de la période démontrée précédemment, on obtient :

$t_a = \frac{\ln \gamma}{\ln 2} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ . L'application numérique nous donne :  $t_a \simeq 6 \times 10^9$  ans ce qui est un bon ordre de grandeur.

4. En comptant une masse molaire de  $1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  pour un nucléon, la masse molaire atomique de  $^{235}\text{U}$  sera  $M = 235 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . L'énergie correspondant à  $1 \text{ g}$  est  $E_{1\text{g}} = \frac{N_a}{235} \times 200 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}$ . On trouve :

$$E_{1\text{g}} = 8,5 \times 10^7 \text{ kJ}.$$

5. En notant  $\Delta_r H^\circ$  l'enthalpie de combustion de l'octane, il faut  $\frac{E_{1\text{g}}}{|\Delta_r H^\circ|} = 1,7 \times 10^4$  mol d'octane dont la masse molaire moléculaire est  $M' = 8 \times 12 + 18 = 114 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On trouve donc une masse :  $m_{\text{oct}} = 2 \times 10^3 \text{ kg}$  ! C'est considérable. Les processus nucléaires libèrent beaucoup d'énergie car ils mettent en jeu l'interaction forte entre les nucléons du noyau de l'atome. Au contraire, les processus chimiques qui concernent les électrons du cortège électronique de l'atome mettent en jeu des énergies beaucoup plus faibles.

### B. Modélisation du réacteur

6. Lorsque  $m = 0$ , on peut observer sur le schéma que  $c^* = k_1 c$  et que  $c = \frac{k_2}{1 + j\omega\tau_2} c^*$ . Le calcul conduit à l'équation  $c = \frac{k_1 k_2}{1 + j\omega\tau_2} c$  que l'on peut encore écrire  $\tau_2(j\omega)c + (1 - k)c = 0$ . Ceci nous permet, en rappelant qu'une multiplication par  $(j\omega)$  correspond à une dérivation, de donner l'équation différentielle :  $\tau_2 \frac{dc}{dt} + (1 - k)c = 0$ .

7. La solution évidente de cette équation est :  $c(t) = c_0 \exp\left(\frac{(k-1)t}{\tau_2}\right)$ . La valeur critique de  $k$  est :  $k_c = 1$ . En effet, si  $k > 1$   $c$  va diverger, la solution n'est pas stable. Par contre, si  $k < 1$  alors  $c$  tend vers 0. La solution est stable mais la réaction ne peut pas être entretenue car le nombre de neutrons va rapidement diminuer empêchant ainsi la poursuite des réactions de fission nucléaire.

8. Pour  $m \neq 0$ , on modifie une équation par rapport à la situation précédente :  $c^* = k_1 c$  mais  $c = \frac{k_2}{1 + j\omega\tau_2} c^* - m$ . Après calculs, on trouve :  $H(j\omega) = -\frac{1 + j\omega\tau_2}{(1 - k) + j\omega\tau_2}$ .

9. On peut encore écrire que  $[(1 - k) + j\omega\tau_2]c = -(1 + j\omega\tau_2)m$ . On peut alors passer à l'équation différentielle générale :  $\tau_2 \frac{dc}{dt} + (1 - k)c = -m$ . Le problème proposé indique que  $m(t) = m_0$  fixé. On a donc :

$\tau_2 \frac{dc}{dt} + (1 - k)c = -m_0$ . La forme de la solution est, en tenant compte de la condition initiale :  $c(t) = (c_0 - \frac{m_0}{k-1}) \exp\left(\frac{(k-1)t}{\tau_2}\right) + \frac{m_0}{k-1}$ .

10. D'après la forme de la solution trouvée avant, on voit que si  $k > 1$  alors l'exponentielle tend vers  $+\infty$  mais deux cas peuvent se produire alors. Soit  $m_0 > (k - 1)c_0$  et  $c(t) \rightarrow -\infty$ , soit  $m_0 < (k - 1)c_0$  et  $c(t) \rightarrow +\infty$ . Ces deux cas correspondent bien à ce que l'énoncé avait proposé. La valeur critique de  $m$  est par conséquent :

$$m_c = (k - 1)c_0.$$

11. Dans le cas  $a$ , l'effet des barres de contrôle est trop important. Il y a trop d'absorption de neutrons. La réaction va s'arrêter.  $c < 0$  n'a pas de sens physique. On pourra remarquer que lorsque  $c$  devient faible, l'intervention des barres de contrôle ne pourra plus être maintenue constante à la valeur  $m_0$ , ce ne serait pas raisonnable.

12. Le réacteur nucléaire va s'emballer, les barres de contrôle ne suffisent plus.  $c$  ne tendra pas vers l'infini mais augmentera suffisamment pour que le fluide caloporteur récupérant l'énergie dégagée par la fission n'ait plus le temps de faire son œuvre. La température va monter brutalement et le réacteur risque d'exploser...

13. La constante de temps du réacteur se lit sur l'équation différentielle établie avant. On a :  $\tau_r = \frac{\tau_2}{1 - k}$ . On trouve  $\tau_r = 0,1 \text{ s}$ , c'est très court. Il est difficile de gérer correctement le réacteur nucléaire d'autant plus que la

constante de temps  $\tau_3$  du fonctionnement des barres de contrôle est de 1 s.

14. Les équations permettant d'établir l'expression de la fonction de transfert sont :  $c = k_2 c^* - m$  et  $c^* = k_1[(1 - \beta) + \frac{\beta}{1 + j\omega\tau_4}]c$ . Après avoir conduits les calculs, on arrive à :  $T(j\omega) = \frac{-(1 + j\omega\tau_4)}{(1 - k) + j\omega\tau_4[1 - k(1 - \beta)]}$ .

15. Grâce à la fonction de transfert précédente, on peut écrire l'équation différentielle  $\tau_4[1 - k(1 - \beta)]\frac{dc}{dt} + (1 - k)c = -(\tau_4\frac{dm}{dt} + m)$ . La nouvelle constante de temps est  $\tau'_r = \tau_4\frac{1 - k(1 - \beta)}{1 - k}$ . On trouve  $\tau'_r = 66$  s. C'est 660 fois plus long qu'avant et surtout  $\tau'_r = 66\tau_3$ . Pour fonctionner de façon continue, on place toujours le réacteur très légèrement en situation de divergence  $k - 1 \ll 1$  puisque  $k - 1 = 10^{-3}$  et on contrôle le fonctionnement avec les barres de contrôle appropriées.

16. Lorsque la teneur en  $^{235}\text{U}$  devient trop faible, la probabilité de collision efficace entre un neutron et le noyau d'uranium 235 devient très faible.  $k$  va vraisemblablement passer en dessous de 1 et le réacteur va s'arrêter car le nombre de neutrons utilisés devient plus petit d'étape en étape.

### C. Le retraitement

17. Le nombre d'oxydation classique de l'oxygène est  $-II$ . On en déduit que les nombres d'oxydation de N dans  $\text{NO}_3^-$  et  $\text{NO}_2$  sont respectivement +V et +IV. La première réaction est forcément une réaction d'oxydo-réduction puisque l'azote change de nombre d'oxydation.

18. On trouve que les nombres d'oxydation sont +IV pour l'uranium dans  $\text{UO}_2$ , +VI toujours pour l'uranium dans  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$  et enfin +IV pour le plutonium dans  $\text{PuO}_2$  qui possède le même nombre d'oxydation dans  $\text{Pu}(\text{NO}_3)_4$ .

19. D'après la relation définissant le coefficient de partage, on a  $[\text{Pu}_{\text{org}}]_1 = D_p [\text{Pu}_{\text{aq}}]_1$ . Pour aboutir, il faut aussi écrire la conservation du nombre de moles total de plutonium mis au départ. On a donc  $n_0 = [\text{Pu}_{\text{aq}}]_0 V_{\text{aq}} = [\text{Pu}_{\text{org}}]_1 V_{\text{org}} + [\text{Pu}_{\text{aq}}]_1 V_{\text{aq}}$ . Grâce à ces deux équations, on trouve enfin que :  $[\text{Pu}_{\text{aq}}]_1 = \frac{[\text{Pu}_{\text{aq}}]_0}{1 + D_p \frac{V_{\text{org}}}{V_{\text{aq}}}}$ . Comme le plutonium se trouve à un degré d'oxydation paire ( $+IV$ ), on utilise la valeur  $D_p = 10^2$ . On voit donc que  $[\text{Pu}_{\text{aq}}]_1 \simeq [\text{Pu}_{\text{aq}}]_0 / 1000$ . On a :  $[\text{Pu}_{\text{aq}}]_1 = 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

20. En répétant l'opération, c'est à nouveau une division par mille qu'on réalise :  $[\text{Pu}_{\text{aq}}]_1 = 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

21. Les déchets ultimes, produits de fission et actinides mineurs possèdent un nombre d'oxydation impair. Le coefficient de partage est maintenant nettement inférieur à 1 puisque  $D_p = 10^{-2}$ . Ils ne vont pas passer dans la phase organique comme l'a fait le plutonium. Ils se trouvent donc dans la phase aqueuse.

22. Cette dernière opération fait passer le plutonium au degré d'oxydation  $+III$ . Le coefficient de partage sera de  $10^{-2}$ . On fait donc repasser le plutonium en solution aqueuse sans doute pour faciliter son traitement ultérieur.