

Devoir libre de Sciences Physiques n°2 du 30-09-2024

Problème n° 1 – Vibrations musicales

Centrale PC 2010

Ce problème aborde les vibrations musicales sources de l'émission sonore de certains instruments de musique. Il concerne les claviers à percussion. Dans tout le problème, on néglige l'influence des forces de pesanteur.

Données et notations :

Vitesse du son dans l'air	$c = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Masse volumique de l'acier	$\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'YOUNG de l'acier	$E = 19,5 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Masse volumique du bronze	$\rho = 8,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'YOUNG du bronze	$E = 1,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Masse volumique du bois de palissandre	$\rho = 740 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'YOUNG du bois de palissandre	$E = 1,2 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Nous étudierons certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elles produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

A. Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

On envisage pour l'instant les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L , voir la figure 1. La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + \xi(x, t)$ et est soumise, de la part de la matière située à sa droite, à une force $\vec{F} = F(x, t)\vec{e}_x$. On note ρ la masse volumique et E le module d'YOUNG du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell$ la longueur d'une tige de section S , il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\delta\ell/\ell_0$.

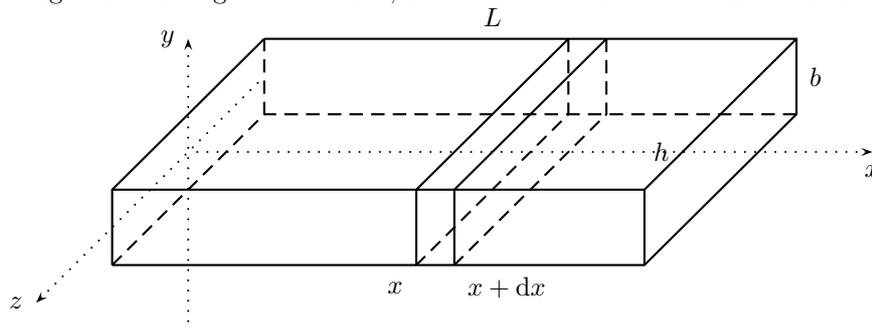


FIGURE 1 – Vibrations longitudinales d'une lame

1. Montrer que la force $F(x, t) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$.
2. Montrer que $\xi(x, t)$ obéit à une équation de D'ALEMBERT et exprimer c_ℓ la célérités des ondes longitudinales.
3. Rechercher des solutions sinusoïdales de la forme $\xi(x, t) = f(x)g(t)$ en explicitant les fonctions f et g . On introduira une pulsation temporelle ω et une pulsation spatiale k .
4. Les deux extrémités de la lame n'étant soumises à aucune force, montrer que seules certaines valeurs particulières, indexées par un entier n , sont accessibles à k . Exprimer les fréquences propres f_n de la lame.
5. Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 24,3 \text{ cm}$ émet un son de fréquence égale à 785 Hz . Montrer qu'il ne peut pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.

B. Vibrations transversales

Dans les questions qui suivent, on analyse les petits mouvements transversaux de la lame (partie gauche de la figure 2). Les points situés au repos dans le plan médian de la lame, à l'abscisse x et à l'ordonnée $y = 0$, se trouvent à l'instant t du mouvement à l'ordonnée $y(x, t)$. Dans le plan Oxy , ils sont alors représentés par une courbe formant avec l'horizontale un angle local $\alpha(x, t) \simeq \frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ et de courbure $C(x, t) \simeq \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. On rappelle que $C = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dL}$, R désignant le rayon de courbure et dL la longueur infinitésimale d'un élément de courbe. Pour établir l'équation du mouvement, on adopte une double décomposition en éléments infinitésimaux (partie droite de la figure 2). D'une part, on analyse le mouvement et les déformations d'une portion de lame occupant

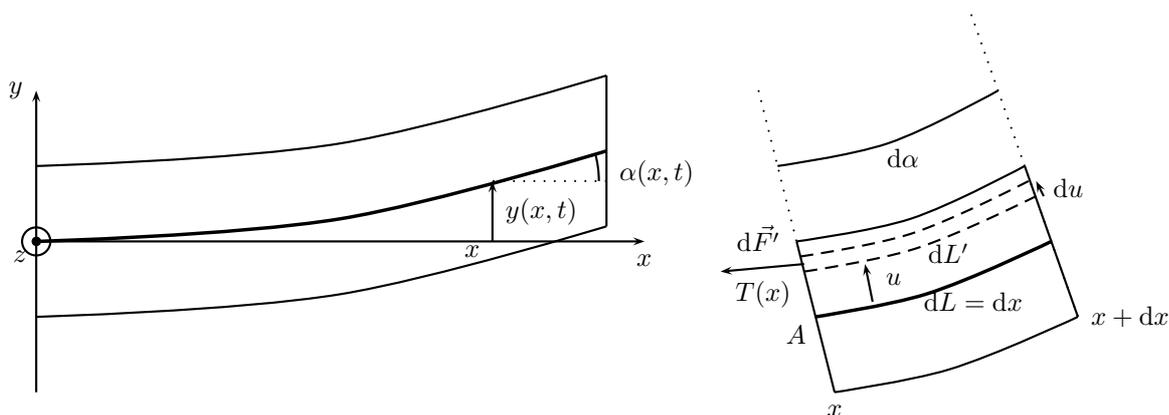


FIGURE 2 – Mouvements transversaux d’une lame

les abscisses $[x; x + dx]$ et dont les faces forment entre elles l’angle $d\alpha$. D’autre part, cet élément peut être considéré comme un assemblage de couches d’ordonnées $y(x, t) + u$ et d’épaisseur du , avec $u \in [-b/2; +b/2]$.

6. En flexion, certaines couches se trouvent étirées et d’autres comprimées. On admet que la couche repérée par $u = 0$ conserve au cours du mouvement une longueur dx inchangée alors que les autres voient leur longueur passer de dx au repos à $dL' \neq dx$. Exprimer $\frac{dL' - dx}{dx}$ en fonction de u et C .

7. Quelle est l’aire dS de la section transversale de la couche d’épaisseur du ? En déduire la force $d\vec{F}$ que cette couche étirée subit puis celle $d\vec{F}'$ qu’elle exerce réciproquement sur la matière située à sa gauche.

8. Vérifier la nullité de la résultante de ces forces sur la section entière de la lame.

9. Calculer le moment $\vec{M}(x)$ par rapport à l’axe (A, \vec{e}_x) des forces exercées par le tronçon de longueur dx sur la matière située à sa gauche. A désigne le point d’abscisse x tel que $u = 0$.

10. Au travers d’une section de la lame s’exercent aussi des efforts transversaux : la partie de lame occupant les abscisses supérieures à x exerce sur celle se trouvant à sa gauche des efforts de résultante $\vec{T} \simeq T(x, t)\vec{e}_y$. En admettant la relation $\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \simeq -T(x, t)$, en déduire l’équation des mouvements transversaux sous la forme :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_p^2 b^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

11. On envisage maintenant des solutions telles que $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$. Préciser l’équation différentielle dont $f(x)$ est solution.

12. La fonction f s’exprime à l’aide de quatre constantes A, B, C et D sous la forme $f(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx$. Donner, en la justifiant, la relation entre ω et k .

13. Dans cette question les deux extrémités de la barre, d’abscisses $x = 0$ et $x = L$, sont liées à des supports fixes par des charnières assurant des liaisons pivots parfaites d’axes parallèles à \vec{e}_y . En déduire en fonction d’un entier n , les valeurs permises k_n pour k puis les fréquences propres f_n .

14. Pour vibrer correctement, les lames des instruments de percussion reposent sans fixation rigide sur un support. Leurs extrémités ne sont soumises à aucune contrainte assujettissant leur position. Exprimer ces conditions en faisant intervenir deux des quatre grandeurs T, M, y et α introduites plus haut. En déduire quatre équations portant sur A, B, C et D . Leur résolution non demandée, conduit aux fréquences propres :

$$f_n = \frac{\pi b}{16\sqrt{3}L^2} c_\ell u_n^2$$

avec $u_1 = 3,01, u_2 = 5,00, u_n \simeq 2n + 1$.

15. Expérimentalement, on a mesuré $f_2/f_1 = 2,71, f_3/f_1 = 5,15, f_4/f_1 = 8,43$ pour une lame de glockenspiel. Commenter ces valeurs. Calculer numériquement f_1 pour une lame d’épaisseur $b = 9,15$ mm et de longueur $L = 24,3$ cm correspondant à la note la plus grave de l’instrument.

16. Les lames d’un marimba basse sont constituées de bois de palissandre d’épaisseur $b = 2,31$ cm. Quelle valeur faut-il donner à L pour atteindre $f_1 = 65$ Hz?

17. Pour accorder un marimba, on entaille la partie inférieure de la lame de manière à lui donner la forme d’une voûte, voir la figure 3. Qualitativement, cela a-t-il pour effet d’augmenter ou de diminuer la valeur de L nécessaire pour obtenir une fréquence donnée? Le facteur de l’instrument ajuste aussi cette voûte de manière à obtenir $f_2/f_1 \simeq 4$, ce qui produit un son plus harmonieux. Pourquoi ce second point est-il inutile sur un glockenspiel?

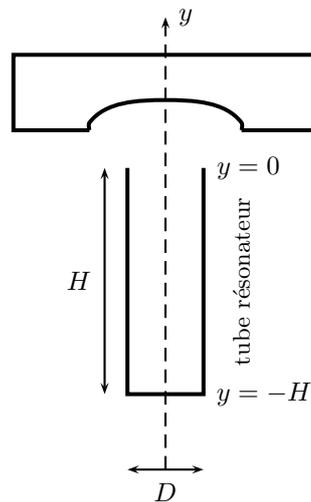


FIGURE 3 – lame de marimba (avec voûte) munie d'un tube résonateur

C. Accord des résonateurs

Pour améliorer le rayonnement du son par le marimba, on place sous chaque lame un tube résonateur, voir la figure 3. Ce cylindre creux de diamètre D , d'axe Oy , présente une extrémité ouverte au voisinage de la lame (en $y = 0$) alors que l'autre, en $y = -H$, est rigidement fermée. On note en représentation complexe $p(y = 0, t) = p_0 \exp j\omega t$ la pression de l'onde acoustique produite en $y = 0$ par la vibration de la lame.

18. On recherche la pression acoustique dans le tuyau sous la forme $p(y, t) = A \exp j(\omega t - ky) + B \exp j(\omega t + ky)$. Donner sans démonstration la relation de dispersion des ondes acoustiques dans l'air, sachant qu'elles suivent le modèle de D'ALEMBERT. En considérant, toujours dans le cadre de l'approximation acoustique, un volume élémentaire $d\tau$ d'air, montrer que la vitesse de l'air est donnée par l'équation différentielle :

$$\rho_a \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y}$$

19. En déduire l'expression de la vitesse acoustique $v(y, t)$ en fonction des données de l'énoncé.

20. Exprimer les constantes A et B en fonction des données du problème.

21. Quelle est la plus petite valeur de H correspondant à une résonance du tuyau pour une fréquence f donnée ? Faire l'application numérique pour $f = f_1 = 65$ Hz. Y a-t-il résonance de l'harmonique de rang 2 accordée sur $f_2 \simeq 4f_1$?

22. Sur les marimbas de concert, la valeur de H peut être modifiée en déplaçant un bouchon rigide à l'intérieur du tube résonateur. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

D. Vibration d'une cymbale

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier étudiées dans les questions précédentes, elles ne produisent pas un son de hauteur bien définie. Bien qu'une cymbale possède une forme incurvée, nous les assimilons à de fines plaques planes circulaires de rayon R et d'épaisseur b contenues au repos dans le plan Oxz . dans ce cadre, les vibrations transversales consécutives à l'excitation de la surface par un choc obéissent à une équation voisine de celle vue avant :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_t^2 b^2}{12(1 - \sigma^2)} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} \right) = 0$$

avec $\sigma = 0,34$.

23. On envisage la propagation d'une onde plane progressive du type $y(x, z, t) = y_0 \exp j[\omega t - \vec{k} \cdot (x\vec{e}_x + z\vec{e}_z)]$. Établir la relation entre ω et $k = |\vec{k}|$. En déduire l'expression de la fréquence f en fonction de la longueur d'onde λ .

24. Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de la longueur d'onde λ . La propagation est-elle dispersive ?

25. La figure 4 représente l'état vibratoire d'une cymbale de bronze à divers instant suivant une excitation ponctuelle. L'observation confirme-t-elle la réponse de la question précédente ? Expliquer.

26. On a signalé sur la figure 4 des déformations de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 6$ mm et $\lambda_2 = 12$ mm. En exploitant les images, déterminer $v_\varphi(\lambda_1)$ et $v_\varphi(\lambda_2)$. Comparer quantitativement ces deux valeurs et confronter le résultat à la prédiction théorique. Sachant que la cymbale est en bronze, déterminer son épaisseur b .

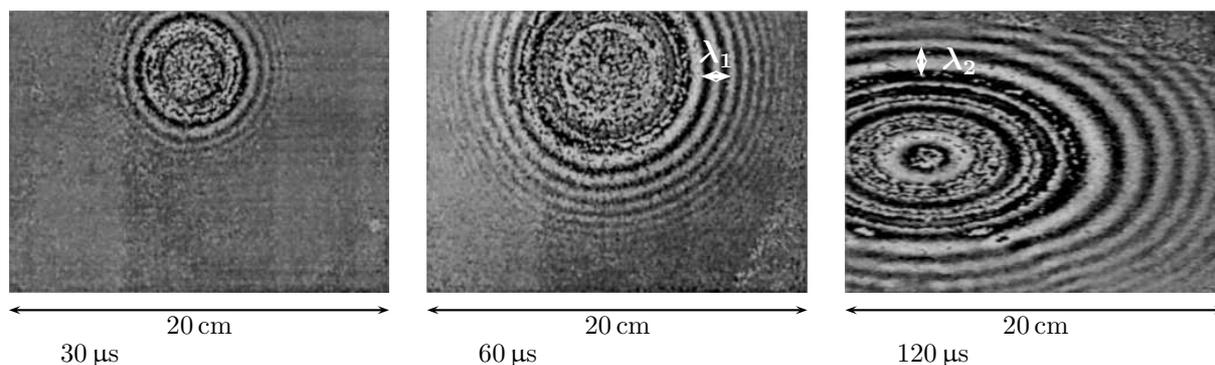


FIGURE 4 – Vibrations d’une cymbale

Problème n° 2 – Observation de la fusion inertielle laser *Centrale PSI 2009*

Les réserves des principaux combustibles fossiles sont limitées. L’impact environnemental de l’utilisation de ces combustibles ne peut plus être ignoré. La fusion nucléaire inertielle est une alternative pour l’avenir. Son principe est d’envoyer une grande quantité d’énergie grâce à un laser comme le laser MégaJoule en construction près de Bordeaux, sur un matériau fusible (deutérium + tritium) contenu dans un microballon pour le comprimer à haute température, de sorte à permettre sa fusion, selon la réaction :



Le rayonnement X très important créé par l’explosion de la microcible exerce des pressions de plusieurs centaines de milliers de bars, et les neutrons de fusion induisent à plusieurs mètres des flux d’énergie neutronique de plusieurs mégajoules par mètre carré. L’explosion des microballons de fusion par confinement inertielle est effectuée dans une chambre à vide au centre de laquelle on focalise des faisceaux laser très intenses, sur le microballon. On étudie ici le problème de l’observation des phénomènes qui se produisent à l’intérieur du plasma. cette observation ne peut donc se faire qu’à distance, parce que les instruments de mesure trop proches seraient détruits du fait des conditions d’irradiation extrêmes. Ainsi, un des diagnostics utilisés consiste à imager un plan du plasma résultant de l’ablation de la coquille sur un capteur CCD (charge-coupled-device), au moyen d’un système de lentilles collectant et canalisant la lumière ré-émise par le plasma irradié par un faisceau laser. On ne tiendra pas compte des effets de diffraction sauf indication contraire. Le schéma du dispositif expérimental dans un plan contenant l’axe optique est donné sur la figure 5.

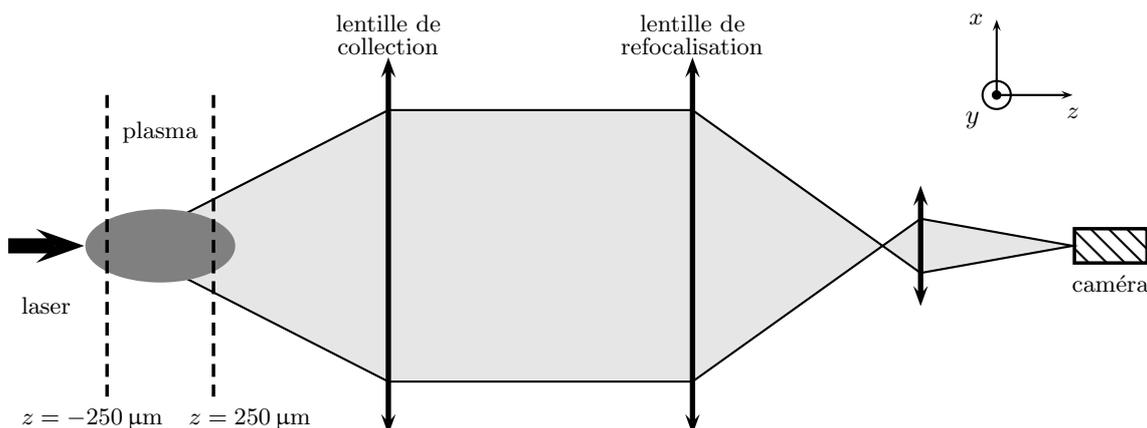


FIGURE 5 – Modèle du diagnostic optique

Le plasma étudié s’étend selon l’axe optique z sur une longueur de l’ordre du millimètre. Un faisceau laser parallèle de même direction que l’axe optique, de diamètre $\phi_0 = 30,00 \text{ mm}$, entre dans la chambre à vide, puis est focalisé sur le plasma à l’aide d’une lentille dite de focalisation de distance focale $f_0 = 500,000 \text{ mm}$ (précision micrométrique sur les distances focales). Le nombre d’ouverture du faisceau est par définition le rapport de la distance focale au diamètre de la lentille focalisante $N_0 = f_0/\phi_0 \simeq 16,67$. Le centre du plasma, qui est en première approximation un ellipsoïde de révolution, est schématisé sur la figure 5 par une ellipse, dont on a très précisément placé le centre sur l’axe optique au micron près, à une distance f_0 de la lentille de focalisation, à l’aide

d'actionneurs pas à pas de grande précision. La lentille L_1 de collection, de distance focale $f_1 = 250,000$ mm et de diamètre $\phi_{1max} = 30,00$ mm est placée au micron près à f_1 du centre du plasma. La lumière sort ensuite de l'enceinte à vide (faisceau quasi-parallèle) et se propage sur une distance $D_1 = 2050,000$ mm vers une zone de faible encombrement à l'extérieur de l'enceinte, où on a pu placer le système de capture de l'image. On refocalise le faisceau quasi-parallèle au moyen d'une lentille L_2 placée à la distance D_1 de L_1 , et de distance focale $f_2 = 1000,000$ mm. L_2 donne ainsi une image du plasma au voisinage du système de capture d'image. À $D_2 \simeq 1019$ mm de cette dernière lentille, on place un objectif de microscope, modélisé par une mince L_3 de distance focale $f_3 = 16,900$ mm. Enfin, on place un capteur CCD à la distance D_3 de L_3 .

Dans l'énoncé original, il était donné $D_2 \simeq 1022$ mm. Cette longueur erronée pouvait gêner sérieusement la compréhension du problème...

Collection de l'information

1. Faire un schéma analogue à celui de la figure 5 repérant L_0 , f_0 , le plasma, f_1 , L_1 , D_1 , L_2 , D_2 , L_3 , D_3 et le capteur CCD.
2. Si on fait fonctionner le dispositif sans plasma, quel est le diamètre du faisceau entre L_1 et L_2 . Justifier.
3. Quels sont les nombres d'ouvertures N_1 de la lentille de collection de lumière avec et sans plasma? Les comparer au nombre d'ouverture du faisceau incident N_0 . Le plasma est un milieu qui aux fortes intensités lumineuses n'est plus transparent, la lumière ne s'y propage pas en ligne droite. Quel peut être l'intérêt de la différence éventuelle entre N_0 et N_1 ?

Objectif de microscope

4. On règle l'ensemble L_3 – CCD de sorte à avoir $D_3 = 11f_3$. on observe ainsi nettement un objet situé dans un plan en avant de L_3 . Quelle est la distance entre ce plan d'observation et L_3 ? Quel est le grandissement transverse γ_3 correspondant?

Grandissement transverse global

5. Calculer le grandissement transverse γ_{12} du dispositif entre le plan focal objet de L_1 et le plan focal image de L_2 ?
6. En déduire le grandissement transverse global entre le plan focal objet L_1 et le plan du capteur CCD.
7. Application numérique. On mesure qu'un déplacement $\Delta x_0 = 10 \mu\text{m}$ de l'objet induit un déplacement de 10 pixels sur l'image donnée par le CCD. En déduire la taille des pixels (carrés) du capteur CCD.

Grandissement longitudinal

8. On place un objet A_1 sur l'axe au voisinage du foyer objet de L_1 . Soient F_i et F'_i les foyers principaux objets et images des lentilles. On note $\Delta z_0 = \overline{F_1 A_1}$ et $\Delta z_i = \overline{F'_2 A_2}$, A_2 étant l'image de A_1 par L_1 et L_2 . Établir la relation donnant Δz_i en fonction de Δz_0 .
9. Application numérique : sachant que l'objet observé A_1 appartient au plasma, en déduire une relation approchée du grandissement longitudinal $\gamma_{||} = \Delta z_i / \Delta z_0$, uniquement en fonction de f_1 et f_2 .
10. On appelle *avant* du plasma la zone en amont de $F'_0 = F_1$ caractérisée par $\Delta z_0 < 0$ et *arrière* la zone $\Delta z_0 > 0$. La zone $\Delta z_i > 0$ correspond-elle à l'avant ou à l'arrière de l'image du plasma?

On fait en sorte que la lentille L_2 soit réglable en position le long de l'axe optique, au moyen d'une vis micrométrique. La distance séparant L_1 de L_3 reste constante, égale à $D_1 + D_2$.

11. Si l'on avance la lentille L_2 d'une distance d (algébrique) (on l'éloigne donc du plasma si $d > 0$), que se passe-t-il pour l'image du plasma au voisinage de F'_2 ?
12. Comme L_3 ne bouge pas, un tel mouvement de L_2 , permet-il d'observer sur le CCD un plan situé en avant ou en arrière du plasma?
13. Donner la plage de variation nécessaire pour la vis micrométrique positionnant L_2 de sorte à pouvoir observer le plasma sur 1 mm de part et d'autre de $F'_0 = F_1$.

Profondeur de champ

14. Expliquer qualitativement, en se limitant à un système simple à une seule lentille, pourquoi le fait de choisir une lentille de grand diamètre permet de restreindre l'observation à une tranche de plasma de faible épaisseur.
15. Quel peut être l'avantage de refroidir le capteur CCD, à l'azote liquide par exemple? On donne sur la figure 6 des images obtenues avec un tel dispositif.

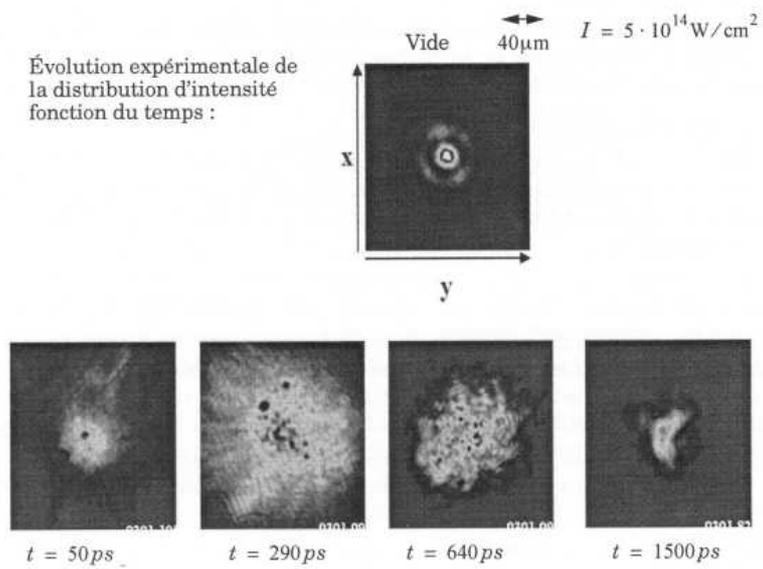


FIGURE 6 – Images du rayonnement transmis par le plasma