

## Devoir libre de Sciences Physiques n°3 du 04-11-2024

### Problème n° 1 – Fluctuations d'intensité d'un laser

ENS MPI<sup>1</sup> 2010

Le but de ce problème est étude d'un résonateur mécanique de taille microscopique sur lequel est déposé un empilement de couches fines qui forment un miroir de très bonne qualité optique. Un tel système possède des propriétés optiques et mécaniques qui en font un outil de choix pour étudier le couplage optomécanique entre les mouvements du résonateur et la lumière qui se réfléchit dessus. Dans le problème le micro-résonateur est assimilé à un oscillateur harmonique de masse  $m$ , de fréquence de résonance  $f_0$ , sur lequel se réfléchit un faisceau lumineux de longueur d'onde  $\lambda$ . Dans les applications numériques, on utilisera les valeurs suivantes :  $m = 100 \mu\text{g}$ ,  $f_0 = 1 \text{ MHz}$  et  $\lambda = 630 \text{ nm}$ . Dans la première partie, on étudie les mouvements du micro-résonateur engendrés par l'agitation du gaz qui l'entoure et une technique de réduction de ces mouvements. Les parties B et C présentent un montage interférométrique ainsi que le photodétecteur qu'il inclut, tous deux utilisés pour observer les déplacements du micro-résonateur. Dans la dernière partie, est étudiée la possibilité d'utiliser un micro-résonateur pour réduire les fluctuations d'intensité intrinsèques que présente la lumière laser. On donne les valeurs des constantes physiques utilisées dans le problème :

$$\begin{aligned} c &= 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} && \text{vitesse de la lumière} \\ k_B &= 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} && \text{constante de BOLTZMANN} \\ h &= 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} && \text{constante de PLANCK} \\ e &= 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} && \text{charge élémentaire} \end{aligned}$$

Dans la première partie, pour toute grandeur  $A(t)$  relative à l'oscillateur harmonique,  $\langle A \rangle$  désignera la valeur moyenne temporelle de  $A(t)$ , calculée sur une période d'oscillation. Dans la partie D, la moyenne statistique d'une variable aléatoire  $X$  sera notée  $\bar{X}$  et son écart-type  $\sigma(X) = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$ . Dans les parties C et D du problème, on adopte une description corpusculaire de la lumière. Un faisceau lumineux de longueur d'onde  $\lambda$  est alors assimilé à un courant de photons. Chaque photon du faisceau se déplace à la vitesse  $c$ , transporte une énergie  $E_{ph}$  et véhicule une quantité de mouvement  $\vec{p}_{ph}$  données par :

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} \quad \vec{p}_{ph} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de la direction de propagation du photon.

#### A. Refroidissement d'un résonateur mécanique

Cette partie traite des mouvements du micro-résonateur induits par l'agitation thermique du gaz qui l'entoure et d'une technique permettant de réduire l'amplitude de ces mouvements thermiques. Le micro-résonateur est assimilé à l'oscillateur harmonique de la figure 1, constitué d'un miroir de masse  $m$  se déplaçant uniquement selon l'axe horizontal  $Ox$ , et d'un ressort sans masse, de raideur  $K$ . La position du miroir est repérée par son abscisse  $x(t)$ . Lorsque le ressort est au repos, le miroir est à l'abscisse  $x = 0$ .

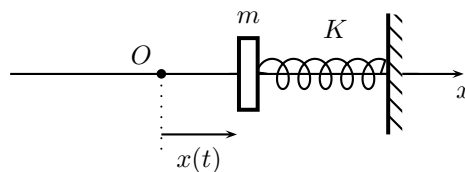


FIGURE 1 – Schéma de l'oscillateur mécanique

1. Donner la pulsation propre  $\omega_0 = 2\pi f_0$  de cet oscillateur.

Les collisions entre le miroir et les molécules du gaz qui l'entoure produisent une force de frottement visqueux  $F_v = -m\gamma v_x$  où  $v_x$  est la valeur algébrique de la vitesse du miroir.

2. Exprimer la nouvelle pulsation de résonance  $\omega$  du système et montrer que dans la limite d'un mouvement faiblement amorti ( $0 \leq \gamma \ll \omega_0$ ) cette pulsation est égale au premier ordre relativement à  $\gamma/\omega_0$ , à  $\omega_0$ .

Dans toute la suite, on se placera dans cette limite.

3. Tracer qualitativement  $x(t)$ . On supposera qu'à  $t = 0$ , le miroir est en  $x = x_0$  et qu'il est lâché sans vitesse initiale.

4. Exprimer les énergies cinétique  $E_c(t)$ , potentielle élastique  $E_p(t)$  et mécanique  $E_m(t)$  de l'oscillateur.

---

1. En 2010, l'acronyme MPI n'avait pas la même signification qu'aujourd'hui, il signifiait concours ENS Maths-Physique-Informatique pour la filière MP.

les collisions entre le miroir et les molécules du gaz à la température  $T$  se produisent à des temps aléatoires (voir la figure 2) et vont engendrer des fluctuations de la position du miroir. La force de frottement visqueux  $F_v$  s'accompagne ainsi d'une force supplémentaire aléatoire  $F_T$  appelée force de LANGEVIN. Cependant, étant donné que l'oscillateur est faiblement amorti, il est fortement résonant à la pulsation  $\omega_0$  et son mouvement est quasiment sinusoïdal. On considérera donc dans la suite que le mouvement de l'oscillateur s'écrit :

$$x(t) = x_T \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

La phase  $\varphi(t)$  est une fonction aléatoire lentement variable. Elle ne joue en réalité aucun rôle dans les calculs qui vont suivre et on la prendra nulle à tout instant :  $\varphi(t) = 0$ .

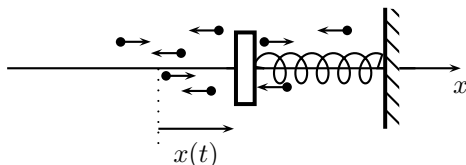


FIGURE 2 – Oscillateur soumis aux collisions avec les molécules du gaz

5. Expliquer pourquoi la force de LANGEVIN a une valeur moyenne temporelle nulle.

On admettra que le théorème d'équipartition de l'énergie appliqué à l'oscillateur impose :

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

6. Exprimer l'amplitude  $x_T$  des oscillations.

7. Donner l'ordre de grandeur de l'amplitude de ces oscillations pour un micro-résonateur mécanique de masse  $m = 100 \mu\text{g}$  et de fréquence de résonance  $f_0 = 1 \text{ MHz}$ , à température ambiante.

8. Grâce à un bilan d'énergie, montrer que la puissance moyenne de la force de LANGEVIN s'écrit :

$$P_{F_T} = \gamma k_B T$$

On suppose qu'une mesure de la position du miroir est effectuée en continu grâce à un dispositif optique. À partir de cette mesure, on contre-réagit en appliquant une force extérieure  $F_{cr}$  sur le miroir, par exemple grâce à un dispositif électrostatique, voir la figure 3. On suppose dans la suite que cette force est proportionnelle à la vitesse du miroir :  $F_{cr} = -gm\gamma v_x$  où  $g$  est un paramètre positif sans dimension, qui caractérise le gain du système de mesure et de contre-réaction. Le paramètre  $g$  peut prendre des valeurs grandes devant 1. On supposera cependant que, malgré cette force visqueuse supplémentaire, le miroir reste dans le régime de faible amortissement. La présence de cette force de contre-réaction ne modifie pas le couplage entre le miroir et le gaz qui l'entoure. On admettra que la puissance moyenne de la force de LANGEVIN est, par conséquent, identique au cas sans contre-réaction.

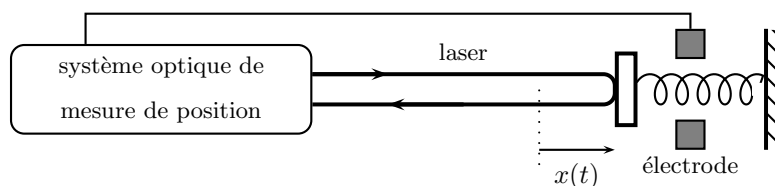


FIGURE 3 – Dispositif de contre-réaction sur le miroir

9. En régime permanent, calculer la nouvelle amplitude  $x_{cr}$  des oscillations ;

10. En déduire l'expression de l'énergie mécanique en présence de contre-réaction, puis que cette énergie correspond à celle d'un oscillateur à une température  $T'$  telle que :

$$T' = \frac{T}{1 + g}$$

La force extérieure  $F_{cr}$  permet donc de réduire les oscillations thermiques du miroir en augmentant artificiellement les frottements visqueux.

11. Il est également possible d'augmenter les frottements visqueux simplement en augmentant la pression du gaz dans lequel baigne le miroir. Expliquer qualitativement pourquoi un tel procédé ne permet pas de réduire l'amplitude des oscillations thermiques.

## B. Mesure de petits déplacements

L'observation des effets du couplage entre le micro-résonateur et la lumière requiert un dispositif de mesure de position capable de détecter des mouvements plus petits que la longueur d'onde du laser. Une possibilité est d'inclure le micro-résonateur dans un montage interférométrique de type MICHELSON. Dans cette partie est étudié le principe d'une mesure interférométrique des déplacements d'un oscillateur mécanique sur lequel est déposé un miroir. On considère le montage optique de la figure 4.

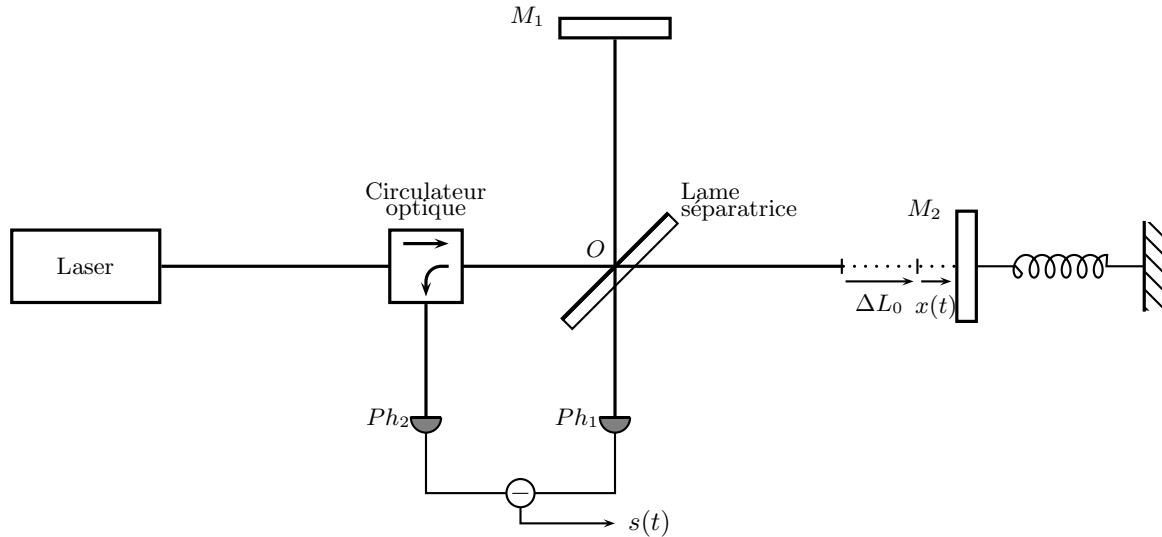


FIGURE 4 – Montage interférométrique de mesure de petits déplacements

L'onde incidente est une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 630 \text{ nm}$  et d'intensité  $I_0$ . Le centre de la lame séparatrice est noté  $O$ . Elle fait un angle de  $\pi/4$  avec la direction de propagation de l'onde incidente. Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sont notés respectivement  $r$  et  $t$  et sont tels que  $r = t = 1/\sqrt{2}$ . On prendra les conventions de la figure 5 pour les coefficients de réflexions des deux faces de la lame séparatrice et on négligera son épaisseur. Les deux miroirs font un angle de  $\pi/2$  entre eux, et la différence de longueur des bras  $OM_2 - OM_1$  sera notée  $\Delta L$ . La position du miroir  $M_2$  est repérée par son abscisse  $x(t)$ , la position  $x = 0$  correspondant à la position du miroir lorsque l'oscillateur est au repos. Dans ce cas, la différence de longueur des deux bras de l'interféromètre est  $\Delta L_0$ . Ainsi,  $\Delta L(t) = \Delta L_0 + x(t)$ . Le circulateur optique est un dispositif optique passif possédant trois voies et qui présente la propriété suivante : une onde plane entrant par la voie 1 ressort inchangée par la voie 2, une onde plane entrant par la voie 2 ressort inchangée par la voie 3 (voir la figure 5). Dans le cas présent, le circulateur optique permet de séparer le faisceau incident du faisceau réfléchi par l'interféromètre.

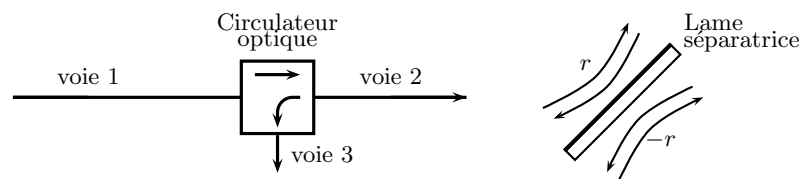


FIGURE 5 – Circulateur, lame séparatrice (convention pour les coefficients de réflexion)

**12.** Exprimer les intensités  $I_1$  et  $I_2$  reçues par les photorécepteurs  $Ph_1$  et  $Ph_2$ , en fonction de  $I_0$ ,  $\lambda$ ,  $x(t)$  et  $\Delta L_0$ .

Les photorécepteurs font partie d'un montage électronique soustracteur qui délivre en sortie une tension  $s$  proportionnelle à la différence d'intensité reçue par les photorécepteurs :  $s = \eta(I_2 - I_1)$  où  $\eta$  est un paramètre positif qui désigne le gain électronique global du montage.

**13.** On cherche à mesurer des déplacements  $x(t)$  de l'oscillateur, d'amplitude petite devant la longueur d'onde  $\lambda$ . Montrer que dans ces conditions  $s(t)$  peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = s_0 + \alpha x(t)$$

où l'on donnera les expressions de  $s_0$  et  $\alpha$ , le facteur  $\alpha$  est appelé sensibilité de la mesure.

**14.** Comment doit-on choisir  $\Delta L_0$  pour obtenir une sensibilité maximale et positive ? Que vaut alors  $s_0$  ? la valeur de la sensibilité dans ces conditions sera notée  $\alpha_{max}$ .

Au cours de l'expérience, les variations de température dans le laboratoire entraînent des dilatations thermiques des matériaux qui constituent l'interféromètre et provoquent une variation lente  $D(t)$  de la différence de longueur des bras de l'interféromètre qui peut atteindre plusieurs longueurs d'onde en quelques minutes. La différence de longueur des bras vaut alors  $\Delta L(t) = \Delta L_0 + D(t) + x(t)$ , où  $D(t)$  ne peut pas être considéré petit devant la longueur d'onde  $\lambda$ . Au début de l'expérience, on fixe  $\Delta L_0$  pour avoir une sensibilité  $\alpha$  égale à  $\alpha_{max}$ .

15. Quelle conséquence sur la sensibilité de la mesure provoque une variation  $D(t)$  de l'ordre de  $\lambda/8$  ?

On suppose que  $D(t)$  varie linéairement avec le temps selon :

$$D(t) = \lambda \frac{t}{t_d}$$

avec  $t_d$  une constante de temps  $t_d$  de l'ordre d'une dizaine de secondes.

16. Mettre la sortie  $s(t)$  sous la forme :

$$s(t) = s'_0(t) + \alpha'(t)x(t)$$

En déduire le temps maximal  $t_{exp}$  que peut durer l'expérience sans que la sensibilité ne varie de manière significative.

17. La valeur  $t_{exp}$  est-elle adéquate pour mesurer les oscillations du miroir ?

Dans la suite, on dira que l'interféromètre fonctionne en régime linéaire lorsque  $\Delta L_0$  est fixé pour avoir  $\alpha = \alpha_{max}$  et  $|\Delta L(t) - \Delta L_0| \ll \lambda/8$ . Dans ce régime, on fera l'approximation que la sensibilité est constante et donc qu'en première approximation  $s(t) = \alpha_{max} \times (\Delta L(t) - L_0)$ . Pour contrer l'effet de dilatation et garder l'interféromètre le plus longtemps possible dans le régime linéaire, le miroir  $M_1$  est placé sur une platine de micropositionnement qui permet de le déplacer d'une quantité  $\ell_C(t)$ . Ce déplacement est commandé par la tension  $u_C(t)$  qui est appliquée sur la platine selon :

$$\ell_C(t) = \beta u_C(t)$$

où  $\beta$  est un paramètre positif. La différence de longueur des bras vaut alors  $\Delta L(t) = \Delta L_0 + D(t) - \ell_C(t) + x(t)$ . On réalise un asservissement de l'interféromètre en appliquant la tension  $u_C(t) = s(t)$  sur la platine, voir la figure 6.

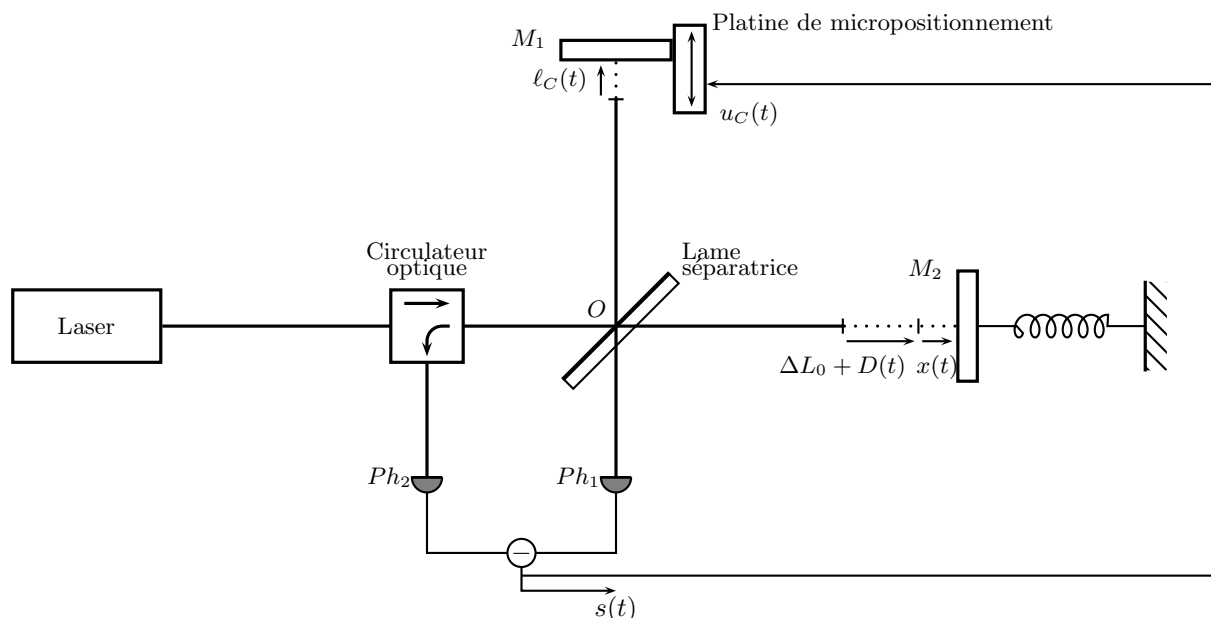


FIGURE 6 – Montage interférométrique asservi

18. Dans le régime linéaire de l'interféromètre, exprimer  $s(t)$  en fonction de  $\alpha_{max}$ ,  $\beta$ ,  $D(t)$  et  $x(t)$ .

19. En présence de l'asservissement et en supposant une évolution linéaire de  $D(t)$  selon l'équation de la question 15., donner une expression approchée du nouveau temps  $t_{max}$  que peut durer l'expérience avant que l'interféromètre ne sorte du régime linéaire. Donner un ordre de grandeur de  $t_{max}$  pour un produit  $\beta \times \alpha_{max}$  de l'ordre de 1 000.

20. Montrer qu'en contrepartie la sensibilité de la mesure est réduite d'un facteur que l'on précisera.

Comme les dilatations thermiques et le mouvement de l'oscillateur sont des phénomènes dont les temps caractéristiques sont très différents ( $t_d \simeq 10$  s pour les dilatations thermiques et  $1/f_0 \simeq 1$   $\mu$ s pour le mouvement de l'oscillateur de fréquence  $f_0 = 1$  MHz), il est possible de les dissocier grâce à un filtre et de réaliser un asservissement de la position du miroir  $M_1$  qui ne dégrade pas la sensibilité de la mesure. On ajoute donc un filtre électronique dont la fonction de transfert en pulsation est :

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega/\omega_c}$$

**21.** De quel type de filtre s'agit-il? Comment choisir la pulsation  $\omega_c$  pour qu'un tel filtre discrimine l'effet de la dilatation et celui d'oscillation?

**22.** Le filtre est inséré dans le montage de mesure entre la sortie du système de photodétection et la platine de micropositionnement. Donner l'expression complexe de  $s(\omega)$  en fonction de  $\alpha_{max}$ ,  $\beta$ ,  $H(\omega)$ ,  $D(\omega)$  et  $x(\omega)$ . En déduire qu'avec ce montage, la durée maximale de la mesure reste de l'ordre de  $t_{max}$ , tandis que la sensibilité pour la mesure des oscillations du miroir est de l'ordre de  $\alpha_{max}$ .

Un tel dispositif peut maintenir une sensibilité optimale pendant des temps longs et permet de mesurer de très petits déplacements du micro-résonateur en moyennant un grand nombre de fois les signaux acquis.

### C. Le photodétecteur

On étudie dans cette partie le montage électronique de photodétection utilisé dans le dispositif de mesure de la partie précédente. Une photodiode est dipôle électrique qui permet de convertir la puissance lumineuse qui arrive sur sa partie photo-sensible en courant électrique. Dans son utilisation la plus courante, on applique à ses bornes une tension  $u_D$  positive d'une dizaine de volts ou plus et lorsqu'elle est éclairée, un courant inverse  $i_D$  positif la traverse (voir la convention de la figure 7). Dans cette configuration, la photodiode est équivalente en première approximation au montage de la figure 7 à droite : un générateur de courant  $i_D$  positif proportionnel à la puissance lumineuse  $P$  reçue :  $i_D = \kappa P$ , où le facteur  $\kappa$  positif est appelé photo-sensibilité. On rappelle que l'on adopte dans cette partie une description corpusculaire de la lumière.

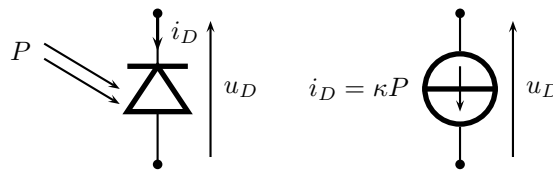


FIGURE 7 – Modèle de la photodiode

**23.** On note  $\phi$  le nombre de photons frappant la photodiode par unité de temps. Exprimer  $\phi$  lorsque la photodiode est éclairée par une onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda$  et de puissance  $P$  entièrement captée par la photodiode.

**24.** Dans le cas d'une photodiode idéale, chaque photon reçu par le composant donne naissance à un électron de conduction dans le circuit. Exprimer la photo-sensibilité  $\kappa$  d'une photodiode idéale lorsqu'elle est éclairée par une onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda$ .

**25.** Donner la valeur numérique de  $\kappa$  pour une onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda = 630$  nm.

On réalise le montage de la figure 8 avec un amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire alimenté entre les tensions  $V_{cc}$  et  $-V_{cc}$  avec  $V_{cc} = 15$  V. Les photodiodes sont identiques et possèdent une photo-sensibilité  $\kappa$ .

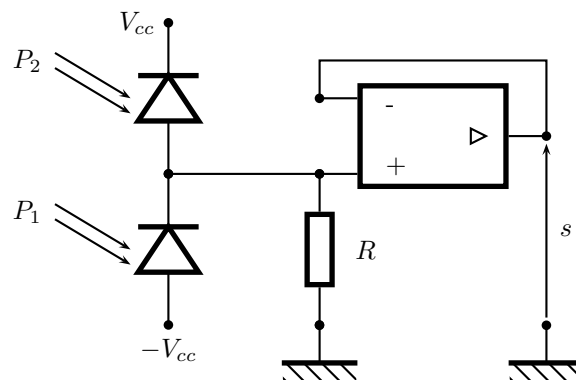


FIGURE 8 – Montage du photodétecteur

26. Exprimer la tension  $s$  en fonction des puissances lumineuses  $P_1$  et  $P_2$  reçues par les deux photodiodes.

27. Donner une valeur de  $R$  qui permette de mesurer, avec la plus grande sensibilité possible, la différence  $P_2 - P_1$  avec des puissances  $P_2$  et  $P_1$  allant jusqu'à 10 mW, en conservant des tensions  $u_{D1}$  et  $u_{D2}$  aux bornes des photodiodes d'au moins 10 V.

Une photodiode réelle possède en pratique une capacité parasite  $C$  (voir la figure 9). Celle-ci a pour effet de modifier la réponse du montage de la figure 8 lorsque le puissance lumineuses dépendent du temps.

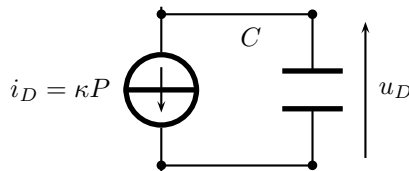


FIGURE 9 – Schéma équivalent d'une photodiode en régime dynamique

28. Pour le montage de la figure 8 avec des photodiodes réelles, calculer la tension  $s(t)$  en régime permanent, lorsque les puissances  $P_1$  et  $P_2$  sont de la forme  $P_1 = P_0(1 - \xi \cos \omega t)$  et  $P_2 = P_0(1 + \xi \cos \omega t)$  où le coefficient de modulation  $\xi$  est compris entre 0 et 1.

29. Définir alors une fréquence de coupure du montage.

30. Un tel montage est-il approprié pour mesurer une modulation de  $P_1$  et de  $P_2$  de pulsation  $\omega = \omega_0 = 2\pi \times 1$  MHz autour d'une puissance moyenne  $P_0 = 5$  mW, avec des photodiodes dont la capacité parasite est de l'ordre de 1 nF ?

Pour éliminer les effets de la capacité parasite, on réalise le montage de la figure 10 avec des amplificateurs opérationnels idéaux fonctionnant en régime linéaire. Les photodiodes possèdent une capacité parasite  $C$ .

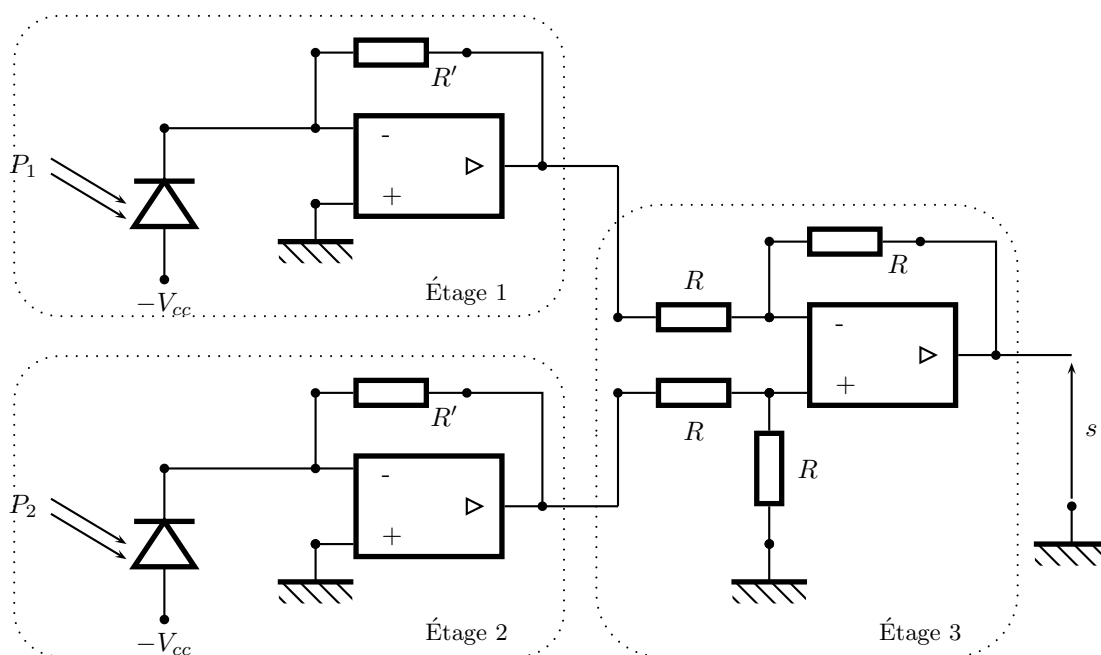


FIGURE 10 – Montage complet du photodétecteur

31. Expliquer en quoi les étages 1 et 2 éliminent les effets de la capacité parasite des photodiodes.

32. Exprimer la tension de sortie  $s$  en fonction de  $P_1$  et  $P_2$  et des valeurs des différents paramètres du montage.

## D. Fluctuations d'intensité d'un laser

Dans cette partie, on étudie les fluctuations du nombre de photons émis par un laser pendant un laps de temps déterminé et on montre qu'un dispositif mécanique pourrait être utilisé pour réduire ces fluctuations. Dans toute cette partie, on adopte une description corpusculaire de la lumière.

### Le laser

**33.** Que signifie l'acronyme LASER ?

**34.** À quand remonte la première réalisation expérimentale d'un laser ?

**35.** Quelles sont les caractéristiques qui distinguent la lumière laser de la lumière issue d'une ampoule ?

**36.** Pourquoi un laser de 10 mW est-il considéré comme dangereux pour l'œil alors qu'aucune précaution n'est préconisée pour l'utilisation d'une ampoule à incandescence de 100 W ? La réponse devra être justifiée en invoquant quelques ordres de grandeur.

Un laser est constitué d'une cavité optique formée de deux miroirs distants d'une longueur  $L$ , se faisant face et entre lesquels est inséré un milieu amplificateur de lumière (voir la figure 11). Le miroir arrière est parfaitement réfléchissant alors que le miroir avant est légèrement transparent, de transmission en intensité  $T$  très petite devant 1 et de coefficient de réflexion en intensité  $R = 1 - T$ . À l'intérieur de la cavité s'établit un courant de photons se propageant uniquement selon l'axe optique et dans les deux directions. À chaque aller-retour entre les miroirs un photon donné dans la cavité a une probabilité  $T$  de sortir par le miroir avant. Le flux de photons sortant est compensé par la création de nouveaux photons par le milieu amplificateur et on peut considérer qu'en régime permanent, la puissance lumineuse intracavité  $P_{in}$  frappant le miroir est constante. Dans l'énoncé, la lumière émise par le laser fait référence à la lumière transmise par le miroir avant.

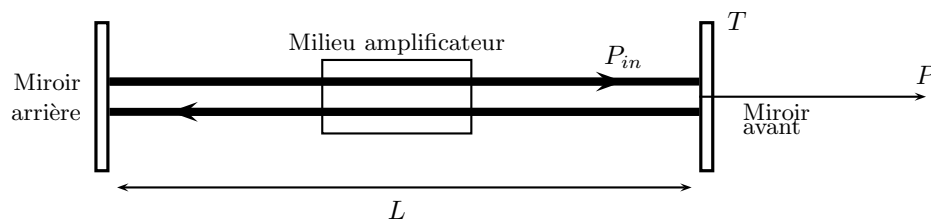


FIGURE 11 – Schéma d'une cavité laser

**37.** En se rappelant qu'un photon dans la cavité laser a une probabilité  $T$  de sortir, à chaque aller-retour, donner une expression approchée du temps de vie d'un photon dans la cavité laser, c'est-à-dire du temps moyen entre sa création et le moment où il sort de la cavité par le miroir avant.

**38.** Pour un laser Hélium-Néon de longueur  $L = 20$  cm, émettant une puissance  $P = 10$  mW à la longueur d'onde  $\lambda = 630$  nm et ayant une transmission  $T$  de 5%, donner la valeur de la puissance intracavité  $P_{in}$  et le temps de vie d'un photon dans la cavité.

### Statistique des photons émis par un laser

La lumière laser présente des fluctuations d'intensité intrinsèques liées aux temps aléatoires de sortie des photons par le miroir avant. Dans cette partie, on étudie la statistique du nombre de photons émis par la cavité pendant un intervalle de temps  $\tau$  donné. On considère toujours le laser de la figure 11, avec un miroir avant de transmission  $T$ . La puissance instantanée émise par le laser possède des fluctuations autour de sa valeur moyenne  $\bar{P}$ . La puissance intracavité  $P_{in}$  est supposée quant à elle sans fluctuation.

**39.** Exprimer le nombre  $N$  de photons intracavité frappant le miroir avant pendant l'intervalle de temps  $\tau$  en fonction de  $\bar{P}$ ,  $T$ ,  $\tau$ ,  $\lambda$ ,  $h$  et  $c$ .

**40.** Pour tout entier  $k \leq N$ , exprimer la probabilité  $p_k$  d'avoir exactement  $k$  photons émis par le laser pendant l'intervalle de temps  $\tau$  en fonction de  $k$ ,  $N$  et  $T$ . On rappelle que le nombre  $C_N^k$  de combinaisons de  $k$  éléments choisis parmi  $N$  est  $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ .

**41.** Montrer que, pour un entier  $k$  fixé, dans la limite où  $N$  tend vers l'infini et  $T$  tend vers 0 tout en conservant le produit  $NT = \mu$  constant, la probabilité  $p_k$  tend vers la distribution de POISSON :

$$p_k = \frac{\mu^k}{k!} \exp -\mu$$

On pourra utiliser la formule de STIRLING :

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \gg 1)$$

42. Exprimer la moyenne statistique  $\bar{k} = \sum_{n=0}^{\infty} k p_k$  du nombre de photons émis pendant le temps  $\tau$  en fonction de  $\mu = NT$  et interpréter le résultat obtenu.

43. Exprimer l'écart-type  $\sigma(k) = \sqrt{k^2 - \bar{k}^2}$  en fonction de  $\mu$ . En déduire l'incertitude relative  $\sigma(k)/\bar{k}$  lors d'une mesure de la puissance d'un faisceau laser effectuée pendant un temps  $\tau$ .

44. Un photodétecteur mesure pendant 1 seconde la puissance d'un laser de puissance moyenne 10 mW et de longueur d'onde  $\lambda = 630$  nm. Quel est l'ordre de grandeur de l'incertitude relative sur la mesure due à la statistique poissonnienne des photons émis ? Quel serait cet ordre de grandeur si le temps de mesure était d'une nanoseconde ?

**Réduction des fluctuations d'intensité**

Dans cette partie, on étudie la possibilité d'utiliser un dispositif mécanique afin de réduire les fluctuations d'intensité d'un faisceau laser. Un faisceau lumineux de puissance moyenne  $\bar{P}$  et de longueur d'onde  $\lambda$  provenant d'un laser est envoyé sur un miroir fixé sur un ressort de raideur  $K$ . Lorsque le ressort est au repos, le miroir se trouve à l'abscisse  $x = 0$ . On suppose que les mouvements du miroir sont uniquement provoqués par la lumière qui se réfléchit sur lui. On négligera donc les fluctuations thermiques de position du miroir. On va s'intéresser dans cette partie à des phénomènes dont les temps caractéristiques sont grands devant la période d'oscillation du miroir, si bien que l'on peut négliger l'inertie du système : le miroir et le ressort sont supposés sans masse. cela implique que, pour satisfaire le principe fondamental de la dynamique, la somme des forces s'exerçant sur le miroir est nulle à tout instant. Enfin, on négligera l'effet DOPPLER.

45. En considérant la quantité de mouvement moyenne cédée par les photons au miroir pendant un temps  $dt$ , donner l'expression du recul moyen  $\bar{x}$  du miroir sous l'effet de la pression de radiation du faisceau en fonction de  $\bar{P}$ , de la vitesse de la lumière  $c$  et de la raideur  $K$  du ressort.

Comme cela a été indiqué avant, la lumière laser présente des fluctuations de puissance. Celles-ci vont induire par pression de radiation des fluctuations de la position du miroir. Afin d'étudier cet effet, le faisceau est découpé en paquets de longueur  $c\tau$  numérotés par un indice  $n$  (voir la figure 12). Le paquet  $n$  possède  $k_n$  photons et  $\bar{k} = \bar{P}\tau\lambda/hc$  est la moyenne de la distribution des  $k_n$ . On suppose qu'au sein d'un paquet, les photons sont répartis uniformément le long de l'axe du faisceau.

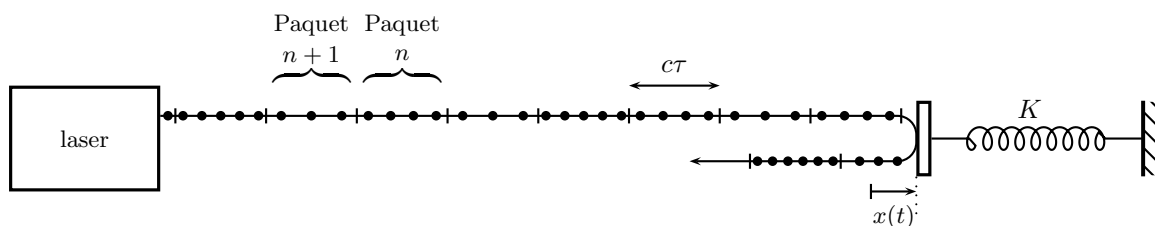


FIGURE 12 – Réduction des fluctuations d'intensité laser par réflexion sur un miroir mobile

46. Exprimer la densité linéique  $d_n$  de photons dans le paquet  $n$  en fonction de  $k_n$ , avant réflexion sur le miroir.

Le premier photon du paquet  $n$  frappe le miroir à l'instant  $t_n$ . À cet instant, le miroir se trouve à l'abscisse  $x_n = x(t_n)$ .

47. Exprimer l'intervalle de temps  $t_{n+1} - t_n$  pendant lequel le paquet  $n$  interagit avec le miroir en fonction de  $c, \tau, x_n, x_{n+1}$ .

48. Après réflexion sur le miroir, calculer la longueur du paquet  $n$  et en déduire que la densité linéique  $d'_n$  de photons dans ce paquet s'écrit :

$$d'_n = \frac{k_n}{c\tau + 2(x_{n+1} - x_n)}$$

49. Expliquer qualitativement pourquoi si le paquet  $n$  possède une densité  $d_n$  avant réflexion plus forte que la moyenne (respectivement plus faible), alors la densité  $d'_n$  après réflexion sera diminuée (respectivement augmentée) par rapport à  $d_n$  et donc que les déplacements du miroir lissent les fluctuations de puissance du faisceau réfléchi par ce miroir.

Le but des question suivantes est d'évaluer quantitativement cet effet en montrant que  $\sigma(d'_n) < \sigma(d_n)$ . On s'intéresse au paquet  $n$  de photons qui possède un nombre aléatoire  $k_n$  de photons et on supposera que le paquet précédent possédait exactement  $\bar{k}$  photons et a laissé le miroir à la position  $x_n = \bar{x}$ .

50. Calculer la quantité de mouvement cédée par les photons du paquet  $n$  au miroir entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  et en déduire la force de pression de radiation notée  $F_n$  exercée par le paquet  $n$  sur le miroir entre les



instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . On exprimera le résultat en fonction de  $\bar{x}$ ,  $x_{n+1}$ ,  $k_n$ ,  $h$ ,  $c$ ,  $\tau$  et  $\lambda$ . On supposera que c'est cette force  $F_n$  qui s'exerce sur le miroir à l'instant  $t_{n+1}$ .

51. En utilisant les hypothèses sur l'inertie du système et l'expression de  $F_n$ , montrer que  $x_{n+1}$  vérifie l'équation du second degré :

$$x_{n+1}^2 - x_{n+1}(\bar{x} - c\tau) - 2\frac{hc}{\lambda K}k_n = 0$$

52. En utilisant  $\bar{k} = \bar{P}\tau\lambda/hc$  et l'expression de  $\bar{x}$ , réécrire l'équation précédente en fonction uniquement de  $x_{n+1}$ ,  $\bar{x}$ ,  $c\tau$ ,  $k_n$  et  $\bar{k}$ .

53. En supposant que les mouvements du miroir sont petits devant la longueur d'un paquet de photons (pour tout  $n$ ,  $x_n \ll c\tau$  et donc également  $\bar{x} \ll c\tau$ ), montrer que :

$$x_{n+1} = \bar{x} \frac{k_n}{\bar{k}}$$

54. Montrer que :

$$d'_n = d_n \frac{1}{1 + A \frac{d_n - \bar{d}}{\bar{d}}}$$

où  $\bar{d} = \bar{k}/(c\tau)$  est la densité linéique moyenne de photons dans le faisceau avant réflexion et  $A$  une constante que l'on exprimera en fonction de  $\bar{x}$ ,  $c$  et  $\tau$ .

Étant donné qu'il n'y a pas de perte de photons lors de la réflexion, la puissance moyenne du faisceau après réflexion sur le miroir est égale à la puissance moyenne avant réflexion.

55. Expliquer alors pourquoi la valeur moyenne de  $d'_n$  vaut également  $\bar{d}$ .

56. En remarquant que  $A$  et  $(d_n - \bar{d})/\bar{d}$  sont chacun des infiniment petits d'ordre respectivement  $\bar{x}/(c\tau)$  et  $1/\sqrt{\bar{k}}$ , montrer que :

$$\sigma(d'_n) = \sigma(d_n)(1 - A)$$

Lors d'une réflexion sur le miroir, on s'attend donc à un effet très faible de réduction des fluctuations d'intensité du faisceau. Les équipes de recherche qui tentent actuellement d'observer cet effet, utilisent une cavité optique de type FABRY-PEROT afin de multiplier les réflexions du faisceau sur le miroir et ainsi amplifier l'effet de réduction. Les expériences actuelles sont cependant encore limitées par les mouvements thermiques du micro-résonateur.

## Problème n° 2 – Ascension atmosphérique en montgolfière Mines MP

2008

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme  $g$ , est dirigé suivant l'axe vertical ascendant  $Oz$ , et de sens opposé. Tous les mouvements étudiés s'effectuent suivant cet axe vertical. Les gaz ont les propriétés des gaz parfaits. La constante des gaz parfaits est notée  $R$ . La masse molaire moyenne de l'air est notée  $M_e$ , sa pression  $P$ , sa température  $T$  et sa masse volumique  $\mu$ . On désigne par  $P_0$ ,  $T_0$  et  $\mu_0$  les valeurs de  $P$ ,  $T$  et  $\mu$  au niveau du sol où  $z = 0$ .

Données :

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Accélération de la gravité à la surface de la Terre :  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Masse atomique de l'oxygène :  $M_O = 16 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse atomique de l'azote :  $M_N = 14 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

### A. Atmosphère en équilibre

#### Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme  $T_0$ . On prendra  $T_0 = 288 \text{ K}$ .

1. Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de  $P$ ,  $R$ ,  $T_0$  et  $M_e$ .

2. Écrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  en fonction de  $P_0$ , de la hauteur barométrique  $H = RT_0/(M_e g)$  et de l'altitude  $z$ .

3. En prenant pour l'air une composition molaire de 20% en  $O_2$  et de 80% de  $N_2$ , calculer la valeur numérique de  $H$ . À quelle altitude  $z_{50\%}^{iso}$  la pression est-elle égale à  $P_0/2$  ?

### Équilibre polytropique

Le modèle d’atmosphère isotherme précédent n’est pas réaliste ; aussi, s’intéresse-t-on à l’équilibre polytropique : l’expérience montre que, jusqu’à une altitude d’environ 10 km, la température de l’air vérifie une loi linéaire du type  $T = T_0(1 - \alpha z)$  où  $\alpha = 1/z_0$  est une constante positive. Cette approximation linéaire est en fait le développement au premier ordre en  $z/z_0$  d’une expression plus précise. La valeur expérimentale  $z_0 \simeq 33$  km justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l’atmosphère.

4. Montrer que l’on peut écrire  $P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta$  et  $\mu = \mu_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$  où l’on donnera l’expression de  $\beta$  en fonction de  $H$  et de  $z_0$ .

5. À quelle altitude  $z_{50\%}^{iso}$  la pression est-elle égale à  $P_0/2$  ? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 3. Ce résultat était-il prévisible ?

6. Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les figures 13(a), (b) et (c). La pression est donnée en bar, la température en K, la densité en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$  en km. Un ajustement aux moindres carrés de ces données permet d’obtenir les relations  $T = 288,14 - 6,94z$  et  $P = 1,01(T/288,08)^{5,26}$ . Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?

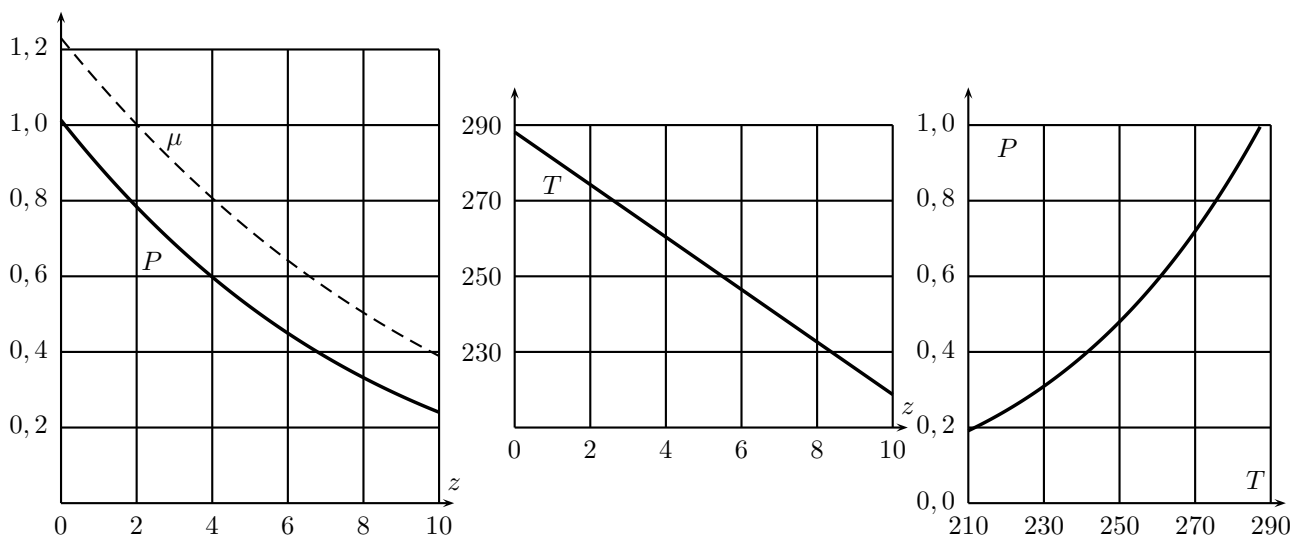


FIGURE 13 – Bulletin météorologique

Dans toute la suite du problème, on utilisera les valeurs numériques suivantes :  $T_0 = 288$  K,  $P_0 = 1013$  hPa,  $\beta = 5$  et  $z_0 = 40$  km, soit  $\alpha = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ .

### B. Ascension de la montgolfière

Une montgolfière standard reste à des altitudes raisonnables pour des questions évidentes de raréfaction en dioxygène. Le modèle polytropique des basses altitudes est donc bien adapté pour décrire son environnement atmosphérique, nous l’utiliserons désormais. La pression, la masse volumique et la température de l’atmosphère à l’altitude  $z$  seront notées respectivement  $P_e, \mu_e$  et  $T_e$ . La montgolfière est constituée d’une enveloppe ouverte de volume intérieur  $V_0 = 2000 \text{ m}^3$  et d’une nacelle. La masse totale de l’enveloppe, de la nacelle et des passagers est notée  $m$ . On prendra  $m = 500$  kg ; le volume propre de ces différents éléments est négligeable. Le volume intérieur à l’enveloppe est constant, mais la masse  $m_i$  de l’air chaud emprisonné à l’intérieur de cette enveloppe est variable. La masse de l’ensemble est donc  $m + m_i$ . On suppose qu’à l’intérieur de l’enveloppe, la température  $T_i$  et la pression  $P_i$  sont uniformes. L’ouverture inférieure de l’enveloppe permet de réaliser en permanence l’équilibre de pression entre l’air froid extérieur et l’air chaud intérieur. On suppose enfin que les gaz de combustion n’affectent pas la masse molaire  $M_e$ .

#### Équilibre de la montgolfière

7. Exprimer la masse  $m_i$  d’air chaud contenu dans l’enveloppe en fonction de  $P_e, V_0, M_e$  et  $RT_i$ , puis en fonction de  $\mu_e, V_0, T_e$  et  $T_i$ .

8. À l’équilibre mécanique, la poussée d’ARCHIMÈDE exercée par l’air compense le poids de la montgolfière et de l’air chaud qu’elle contient. Trouver la relation qui permet alors d’exprimer  $m$  en fonction de  $m_i, T_e$  et  $T_i$ .

9. On note  $z_m$  l’altitude où la poussée d’ARCHIMÈDE exercée par l’air compense le poids  $mg$ . Exprimer  $z_m$  en fonction de  $\alpha, \beta, m, \mu_0$  et  $V_0$ . Calculer la valeur numérique de  $z_m$ .

10. On note  $T_d$ , la valeur minimale de la température  $T_i$  permettant le décollage de la montgolfière. Établir la relation, très simple, liant  $m/(\mu_0 V_0)$  à  $1 - T_0/T_d$ . Calculer la valeur numérique de  $T_d$ .

11. Établir la condition d’équilibre de la montgolfière :

$$P_e \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) = \kappa_1 \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d} \right)$$

où  $\kappa_1$  est une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème. En déduire la relation notée  $[E_1]$ , donnant à l'équilibre  $\delta T_i/T_i$  en fonction de  $\delta T_e/T_e$ ,  $\delta P_e/P_e$  et de  $T_i/T_e$ .

**12.** En utilisant les grandeurs réduites  $Z = \alpha z$ ,  $Z_m = \alpha z_m$  et  $\theta_i = T_i/T_0$ , montrer que la condition d'équilibre de la question 8 s'écrit :

$$(1 - Z)^{\beta-1} = \frac{m}{\mu_0 V_0} + \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_i}$$

en utilisant à présent l'expression de  $z_m$  obtenue à la question 9, déduire l'expression de la fonction  $Z \rightarrow \theta_i(Z)$  en fonction des paramètres  $\beta$  et  $Z_m$ . On admet que le signe de  $\theta'_i(0) = \left. \frac{d\theta_i}{dZ} \right|_{Z=0}$  est le même que celui de  $\frac{\beta m}{\mu_0 V_0} - 1$ . Tracer rapidement l'allure de la courbe représentative de  $\theta_i(Z)$  selon les valeurs de  $\beta m/(\mu_0 V_0)$ . En considérant la phase de descente, expliquer pourquoi une montgolfière satisfaisant la condition  $\beta m < \mu_0 V_0$  fait courir le risque d'un écrasement au sol.

**13.** Calculer la valeur numérique  $V_{max}$  du volume de l'enveloppe permettant de satisfaire la condition  $\theta'_i(0) > 0$ . Pour une valeur  $T_{max} = 373 \text{ K}$  de la température maximale acceptable pour une montgolfière, calculer la valeur minimale  $V_{min}$  du volume de l'enveloppe qui permet le décollage. Calculer les valeurs de  $z_m$  associées à  $V_{min}$  et  $V_{max}$ .

### Ascension par apport thermique

Pour faire monter la montgolfière, l'aéronaute dispose d'un brûleur, qui permet d'apporter à l'air intérieur une *quantité de chaleur*  $\delta Q$ . La transformation subie par cet air est isobare et suffisamment rapide pour que la montgolfière n'ait pas le temps de changer d'altitude pendant cet apport d'énergie. Dans ces conditions, le système peut être considéré comme fermé. Les capacités calorifiques molaires à pression et volume constants de l'air sont notées  $C_p$  et  $C_v$  avec  $\gamma = C_p/C_v$ . Elles ne dépendent pas de la température. La montgolfière est en équilibre à l'altitude  $z$ , où l'air extérieur est à la pression  $P_e$  et à la température  $T_e$ .

**14.** Déterminer la variation de la température  $\delta T_i^{(1)}$  associée à l'apport thermique, on l'exprimera en fonction de  $n_i = P_e V_0/(RT_i)$ ,  $C_p$  et  $\delta Q$ . En déduire  $\delta T_i^{(1)}/T_i$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\delta Q$ ,  $C_p$  et  $T_i$ .

**15.** Exprimer la variation de la masse d'air  $\delta m_i^{(1)}$  en fonction de  $M_e$ ,  $\delta Q$ ,  $C_p$  et  $T_i$ .

L'ascension de la montgolfière s'effectue lentement, sans autre échange thermique. L'air qui ne quitte pas l'enveloppe lors de la variation d'altitude  $\delta z$  subit une détente adiabatique réversible.

**16.** La pression extérieure est toujours régie par la loi polytropique établie à la question 4. Déterminer la variation de température  $\delta T_i^{(2)}$  de l'air intérieur à l'enveloppe pendant cette ascension, on l'exprimera en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $T_i$ ,  $z$  et  $\delta z$ . On vérifiera que  $\delta T_i^{(2)}$  est négatif.

**17.** La température extérieure est toujours régie par la loi linéaire de la partie précédente. Exprimer  $\delta T_i/T_i$  en fonction de  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $T_e$  et  $\delta T_e$ .

La variation de la température interne à l'enveloppe associée à l'apport thermique et à l'élévation de  $\delta z$  est  $\delta T_i = \delta T_i^{(1)} + \delta T_i^{(2)}$ .

**18.** Déterminer la relation très simple entre  $\delta P_e/P_e$  et  $\delta T_e/T_e$  puis, en utilisant la relation  $[E_1]$ , établir la relation :

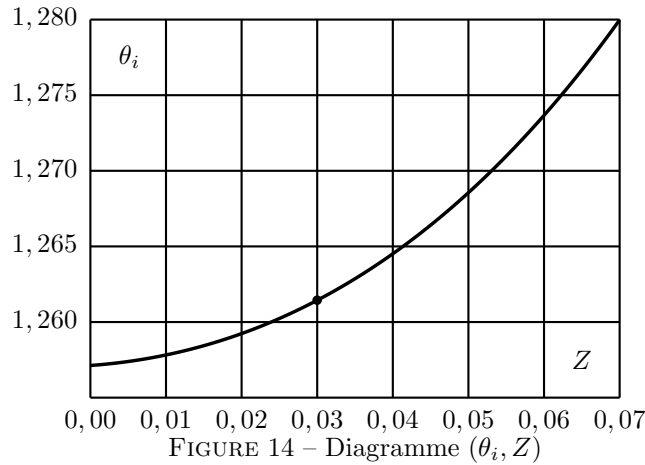
$$\left[ \frac{\beta}{\gamma} - (\beta - 1) \frac{T_i}{T_e} \right] \frac{\delta T_e}{T_e} = \kappa_2 \frac{\delta Q}{P_e V_0}$$

où  $\kappa_2$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\gamma$ .

**19.** La figure 14 représente le diagramme  $(\theta_i, Z)$  pour  $\beta = 5$ ,  $m = 500 \text{ kg}$  et  $V_0 = 2000 \text{ m}^3$ . La situation initiale, avant apport thermique, est représentée par le point noir. Placer sur ce diagramme, les points représentatifs des transformations conduisant aux variations  $\delta T_i^{(1)}$  et  $\delta T_i^{(2)}$ , de la température de l'air dans l'enveloppe lors de la montée.

### Descente par apport d'air froid

Pour faire descendre la montgolfière, l'aéronaute dispose d'une trappe qui permet de laisser l'air chaud s'échapper. Une petite quantité d'air froid, de volume  $\delta V$  et de température initiale  $T_e$ , est admise dans l'enveloppe et remplace le volume correspondant d'air chaud. La montgolfière n'a pas le temps de changer d'altitude pendant



l'établissement de l'équilibre thermique. Toutes ces transformations se font à la pression atmosphérique extérieure  $P_e$ . Le mélange d'air chaud ( $n$  moles à la température initiale  $T_i$ ) et d'air froid ( $\delta n$  moles) s'effectue sans variation d'énergie interne.

**20.** Montrer qu'à l'équilibre, la variation de température  $\delta T_i^{(3)}$  de l'air intérieur à l'enveloppe vérifie, après l'entrée d'air froid, la relation :

$$\frac{\delta T_i^{(3)}}{T_i} = f\left(\frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\delta V}{V_0}$$

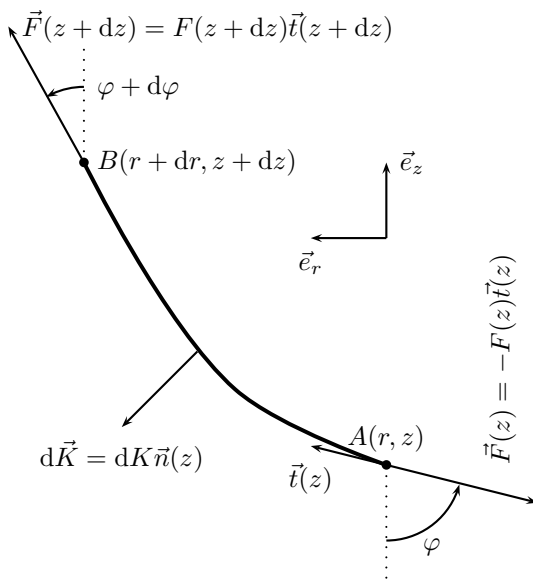
où  $f$  est une fonction simple dont on précisera l'expression.

**21.** La descente de la montgolfière s'effectue lentement, sans échange thermique supplémentaire. L'expression de  $\delta T_i^{(2)}/T_i$  établie à la question 17 est toujours valable. La variation de température interne pendant la descente est maintenant  $\delta T_i = \delta T_i^{(3)} + \delta T_i^{(2)}$ . En procédant comme à la question 18, relier  $\delta T_i/T_i$  à  $\delta T_e/T_e$ , pour en déduire  $\delta T_e/T_e$  en fonction de  $\delta V/V_0$ ,  $T_i$ ,  $T_e$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

**22.** En utilisant le même point de départ, placer sur le diagramme de la figure 14, les points représentatifs des transformations conduisant aux variations  $\delta T_i^{(3)}$  et  $\delta T_i^{(2)}$  de la température de l'air dans l'enveloppe lors de la descente.

### C. Forme de l'enveloppe de la montgolfière

La nacelle de la montgolfière est maintenue par  $N$  fils qui enserrant l'enveloppe et forment des méridiens régulièrement espacés de l'angle  $2\pi/N$ . L'enveloppe possède la symétrie de révolution autour de l'axe vertical.



On nomme  $z$  la cote des points situés au-dessus de l'ouverture inférieure de l'enveloppe et  $r$  le rayon de cette enveloppe à la cote  $z$ . Les axes portant  $z$  et  $e$  ont pour vecteurs unitaires  $\vec{e}_z$  et  $\vec{e}_r$ . On considère aussi les vecteurs unitaires  $\vec{t}(z)$  et  $\vec{n}(z)$  tangent et normal au filin au point de cote  $z$ . La condition d'équilibre d'un élément de surface de l'enveloppe détermine sa forme, c'est-à-dire la relation  $r(z)$ . Cette condition relie la tension des fils  $\vec{F}$  à la force de pression  $\vec{K}$ . On néglige l'accélération du champ de pesanteur sur l'enveloppe et les fils. On suppose que les pressions de l'air à l'intérieur,  $P_i(z)$ , et à l'extérieur,  $P_e(z)$ , de l'enveloppe sont des fonctions linéaires de  $z$ , telles que  $P_i(0) = P_e(0)$ . Les masses volumiques interne  $\mu_i$  et externe  $\mu_e$  sont quant à elles supposées uniformes. La figure ci-contre indique les forces agissant sur un élément de filin de longueur  $d\ell = AB$ . L'élément de surface associé, entre 2 méridiens, est  $dS = 2\pi r d\ell/N$  avec  $d\ell^2 = dr^2 + dz^2$ .

**23.** Justifier et commenter l'hypothèse de linéarité des pressions. Exprimer, en fonction de  $g$ ,  $\mu_i$ ,  $\mu_e$  et de la cote  $z$ , la différence des pressions  $\Delta P(z)$  qui gonfle l'enveloppe.

**24.** Écrire la condition d'équilibre de l'élément de filin de longueur  $d\ell$  sous la forme d'une relation  $[E_2]$  entre  $\frac{dF(z)\vec{t}(z)}{dz}$  et  $\frac{dK}{dz}\vec{n}(z)$ . En déduire que le module  $F$  de la force  $\vec{F}$  de tension des fils est constant sur toute

leur longueur.

**25.** Exprimer les composantes de la force de pression  $d\vec{K}'$  appliquée à un élément de surface de l'enveloppe compris entre deux filins consécutifs et les parallèles de cotes  $z$  et  $z + dz$ . Quelle relation existe-t-il entre  $d\vec{K}$  et  $d\vec{K}'$ .

**26.** En écrivant la relation  $[E_2]$  dans la base  $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ , établir une relation entre  $F$ ,  $\frac{d\varphi}{dz}$  et  $\frac{dK}{dz}$ .

**27.** En considérant la relation entre  $\frac{dr}{dz}$  et l'angle  $\varphi$ , montrer que l'équation différentielle vérifiée par les points de l'enveloppe peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -Arz \left[ 1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}$$

où  $A$  est une constante, dont on donnera l'expression et dont on précisera la dimension.

**28.** En effectuant le changement de variable  $z \rightarrow A^k x$  et le changement de fonction  $r \rightarrow A^k y$ , montrer que l'on peut trouver une valeur pour le réel  $k$  qui permet d'obtenir une équation différentielle  $[E_3]$  indépendante des caractéristiques de la montgolfière considérée dans le cadre des hypothèses de ce problème.

**29.** La figure 15(a) indique l'allure de plusieurs solutions de l'équation  $[E_3]$ . Ces solutions sont telles que  $y(0) = 0, 1$  et possèdent des valeurs de  $y'(0)$  distinctes. La figure 15(b) est la représentation graphique de 2 solutions :  $y_+$  telle que  $y_+(0) = 0, 1$  et  $y'_+(0) = 1, 12$ ;  $y_-$  telle que  $y_-(0) = -0, 1$  et  $y'_-(0) = -1, 12$ . Commentez ces diverses figures.

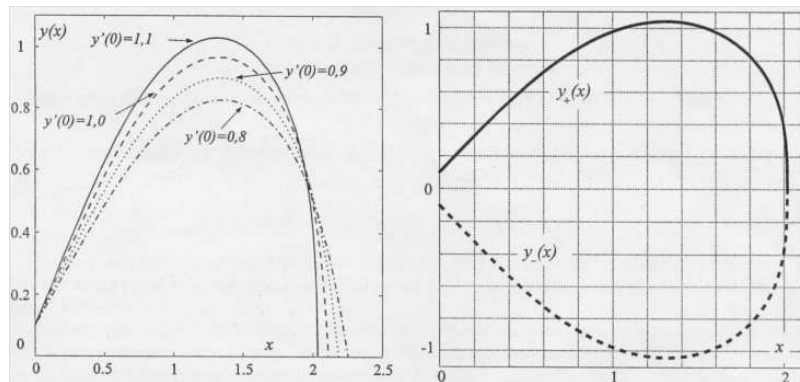


FIGURE 15 – Courbes d'enveloppe