

Devoir libre de Sciences Physiques n°3 du 06-11-2023

— Solutions —

Problème n° 1 – Objectif Lune

X PC 2015

A. La télémétrie laser-Lune

B. Analyse de l'article

1. On a $2D = c\Delta t$ avec $\Delta t \simeq 2,5$ s pour l'aller et le retour, on trouve : $D \simeq 375\,000$ km.

Traversée de l'atmosphère

2. L'écart de distance correspond à l'écart d'indice de réfraction entre un parcours dans le vide d'indice 1 et un parcours dans le milieu d'indice $n(z)$. Ce parcours correspond à la hauteur de l'atmosphère que nous noterons d_a . On a donc

$$\delta D = \int_0^{d_a} (n(z) - 1) dz.$$

3. L'énoncé nous invite à considérer que la masse volumique est proportionnelle à $n(z) - 1$, on peut donc écrire que $\rho(z) = \alpha(n(z) - 1)$. On détermine la constante α en utilisant les conditions en $z = 0$: $\rho_0 = \alpha(n_0 - 1)$. Pour la masse volumique, on utilise la loi des gaz parfaits $PV = \frac{m}{M}RT$ qui évolue en $\rho = \frac{MP}{RT}$. À la surface de la Terre, on peut donc écrire que $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$. On en déduit que $n(z) - 1 = (n_0 - 1) \frac{RT_0}{MP_0} \rho(z)$. On peut donc remplacer dans l'intégrale définissant l'écart de distance dû à l'atmosphère : $\delta D = (n_0 - 1) \frac{RT_0}{MP_0} \int_0^{d_a} \rho(z) dz$. Pour calculer cette intégrale, il faut tenir compte de l'hypothèse hydrostatique. On a $\vec{\text{grad}} P(z) = -\rho(z)g\vec{e}_z$. Cela conduit à écrire que $\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g$. On peut donc en déduire que $\rho(z)dz = -\frac{dP}{g}$. L'intégrale peut alors se calculer facilement. On arrive à $\delta D = (n_0 - 1) \frac{RT_0}{MgP_0} \int_0^{d_a} -dP = (n_0 - 1) \frac{RT_0}{MgP_0} (P_0 - P(d_a))$. La pression à la fin de l'atmosphère doit être considérée comme nulle puisqu'ensuite on considère que l'indice de réfraction vaut 1, on a donc $P(d_a) = 0$. On obtient finalement $\delta D = (n_0 - 1) \frac{RT_0}{Mg}$. La distance évoquée par l'énoncé est $H = \frac{RT_0}{Mg}$.

4. On trouve $H \simeq 8,5$ km et $\delta D \simeq 2,5$ m. Cette longueur correspond bien à ce que l'énoncé a avancé puisqu'il indique un écart de l'ordre du mètre. La distance H est la longueur caractéristique d'évolution de la pression $P(z)$.

5. Si le tir est incliné par rapport à la verticale, la lumière va suivre une trajectoire courbe. On peut modéliser cette courbe par une succession de segments d'orientation angulaire évoluant en fonction des lois de DESCARTES. Au niveau du sol, si on considère un dioptre après l'épaisseur e_0 , on aura $n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1$. Comme l'angle h est défini par rapport à l'horizontale, on peut écrire que $i_0 = \frac{\pi}{2} - h$ et par conséquent $n_0 \cos h = n_1 \cos h_1$ où h_1 est l'angle marquant la réfraction défini lui aussi par rapport à l'horizontale. La parcours du rayon laser s'effectue donc en conservant la grandeur $n(z) \cos h(z)$. On a donc $n(z)h(z) = n_0 \cos h$. Si on raisonne sur un dioptre plan à l'altitude z et un second à l'altitude $z + dz$, le rayon lumineux parcourt la distance $\frac{dz}{\sin h(z)}$ du fait de son caractère oblique. La distance δD va donc correspondre à l'intégrale sur l'épaisseur de l'atmosphère de cette distance corrigée - comme pour le tir vertical - du facteur $n(z) - 1$. On a donc $\delta D = \int_0^{d_a} (n(z) - 1) \frac{dz}{\sin h(z)}$.

Avec la loi de DESCARTES, on écrit que $\cos h(z) = \frac{n_0}{n(z)} \cos h$ et donc que $\sin h(z) = \sqrt{1 - \frac{n_0^2 \cos^2 h}{n^2(z)}}$. Cela nous permet d'écrire l'intégrale recherchée sous la forme : $\delta D = \int_0^{d_a} \frac{(n(z)-1)n(z)}{\sqrt{n^2(z)-n_0^2 \cos^2 h}} dz$. Cette intégrale doit sans doute se calculer numériquement à condition d'avoir une bonne connaissance du modèle d'évolution de l'indice optique $n(z)$.

Trajett Terre-Lune

6. La force exercée sur la Terre par le Soleil permet d'écrire la relation de la Dynamique dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen. On a $-\frac{GM_S M_\oplus}{D_\oplus^2} \vec{e}_r = -\frac{M_\oplus v_\oplus^2}{D_\oplus} \vec{e}_r$. On peut exprimer la vitesse de la Terre sur son orbite : $v_\oplus^2 = \frac{GM_S}{D_\oplus}$. Le potentiel gravitationnel est $V = -\frac{GM_S}{D_\oplus}$. Puisque l'écart relatif de durée est proportionnel au potentiel, on peut écrire que $\frac{\delta t}{t} = \beta \frac{GM_S}{D_\oplus} = \beta v_\oplus^2$. Le facteur β est nécessairement dimensionné, il est même l'inverse d'une vitesse au carré. L'énoncé nous suggère de faire intervenir la vitesse de la lumière dans le vide. On peut introduire un coefficient de proportionnalité adimensionné k tel que : $\frac{\delta t}{t} = k \left(\frac{v_\oplus}{c}\right)^2$. On en déduit que $\delta D = k \left(\frac{v_\oplus}{c}\right)^2 D$. Il faut supposer que la constante k adimensionnée est de l'ordre de l'unité sans quoi une telle mise en forme n'aurait pas d'intérêt.

7. On calcule la vitesse de la Terre sur son orbite en supposant le périmètre parcouru à vitesse constante : $v_\oplus = \frac{2\pi D_\oplus}{T_{1 \text{ an}}}$. On trouve $v_\oplus \simeq 30$ km · s⁻¹. On obtient alors $\frac{\delta t}{t} = k 10^{-8}$, la distance à corriger est alors $\delta D =$

$k10^{-8}D$. Si $k = 1$, on trouve $\delta D_{k=1} = 3,8 \text{ m}$. Le texte nous précisait que l'écart de distance était de l'ordre de la dizaine de mètre. Il suffit que k soit de 2 ou 3 et on obtient cet ordre de grandeur.

L'écho lumineux

8. L'énergie de l'impulsion est $E_{imp} = N \frac{hc}{\lambda}$. On possède l'énergie d'un photon $\frac{hc}{\lambda} = 2 \times 10^{-19} \text{ J}$, on en déduit que $N = 3 \times 10^{18}$ photons. Cela correspond à la valeur annoncée en 10^{18} .

9. La diffraction provoque une divergence angulaire de l'ordre de $\alpha_{diff} = \frac{\lambda}{\phi_{tel}} = 3 \times 10^{-7} \text{ rad}$ ce qui représente un peu moins de 0,1 seconde d'arc. Comme en sortie du laser, on a 1 seconde d'arc, l'effet n'est pas dû qu'à la diffraction.

10. La fraction recherchée correspond au rapport de la surface du récepteur par rapport à la surface du faisceau laser lorsqu'il arrive sur la Lune. On a $\eta_1 = \frac{S_{det}}{S_{las}}$. L'angle de 5 secondes d'arc est noté $\alpha = 2,4 \times 10^{-5} \text{ rad}$. La surface de la tache laser à l'arrivée sur la Lune est $S_{las} = \frac{1}{4}\pi\alpha^2 D^2$ en l'assimilant à un disque de rayon αD . La surface du détecteur accumule celle des 300 cataphotes. On a $S_{det} = 300 \frac{1}{4}\pi d^2$ où $d = 3,8 \text{ cm}$. Le rapport est donc : $\eta_1 = \frac{300d^2}{\alpha^2 D^2}$. On trouve $\eta_1 = 5,2 \times 10^{-9}$.

11. Sur le schéma de la figure 1, on peut voir la réflexion classique du rayon lumineux sur un miroir plan. Le vecteur d'onde incident est noté $\vec{k}_i = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$. On note que la composante k_x du vecteur d'onde est conservée alors que la composante k_y est changée de signe. Le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est donc $\vec{k}_r = k_x \vec{e}_x - k_y \vec{e}_y$. D'une façon générale, toute réflexion sur un miroir plan conserve les composantes tangentielles du vecteur d'onde et change de signe la composante normale. Si l'on enchaîne trois réflexions sur les trois plans formant le coin de cube, on aura forcément changé les signes des trois composantes du vecteur d'onde. Le résultat est donc : $\vec{k}_r = -\vec{k}_i$. L'onde revient bien dans la direction qu'elle avait en incidence.

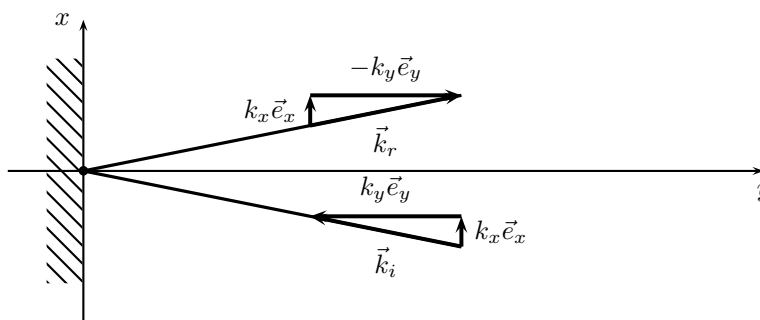


FIGURE 1 – Réflexion sur un miroir plan

12. Montrer que tous les rayons lumineux réfléchis sur un même cataphote parcourent exactement le même chemin optique entre l'émission et la réception revient à démontrer le caractère stigmatique du miroir plan. On envisage deux ondes lumineuses parallèles qui arrivent décalées sur un miroir plan. Par les propriétés de symétrie de la réflexion, on constate bien que les différences de marche avant d'arriver sur le miroir et après la réflexion sont identiques. On a bien : $\delta_1 = \delta_2$, voir le schéma de la figure 2.

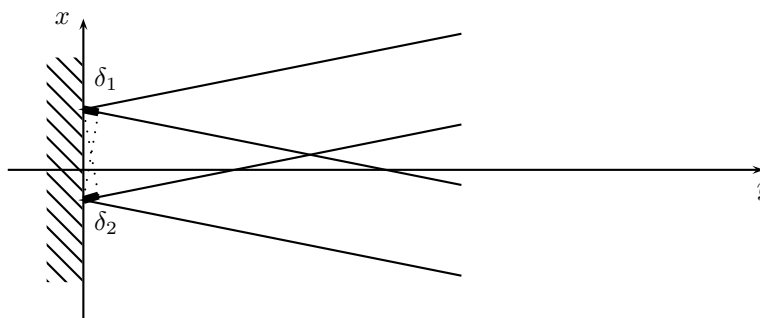


FIGURE 2 – Stigmatisme du miroir plan

13. L'ordre de grandeur de l'angle d'ouverture α' du faisceau réfléchi par un cataphote dû à la diffraction est $\alpha' \simeq \frac{\lambda}{d}$. On trouve $\alpha' \simeq 2,6 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ce qui correspond à 5,5 secondes d'arc.

14. La diffraction n'est pas la seule à contribuer à l'élargissement angulaire du faisceau, il faut encore rajouter

l'effet de l'atmosphère qui correspond à environ 4 secondes d'arc comme nous l'avons vu avant. L'angle de divergence est donc $\alpha'_{tot} \simeq 10$ secondes d'arc ce qui fait $\alpha'_{tot} \simeq 5 \times 10^{-5}$ rad. le diamètre d' de la tache laser est $d' = \alpha'_{tot} D$ alors que le diamètre du télescope est $\phi_{tel} = 1,5$ m. Le rapport des énergies est le rapport des surfaces. on a donc $\eta_2 = \frac{\phi_{tel}^2}{d'^2}$. On trouve $\eta_2 = 6,2 \times 10^{-9}$.

15. Le rapport η entre l'énergie reçue par le télescope et celle qu'il a émise est donc le produit des deux rapports précédents : $\eta = \eta_1 \eta_2$. On trouve $\eta = 3,2 \times 10^{-17}$.

16. Le nombre de photons en retour est $N_r = N\eta$. On trouve que $N_r = 100$. D'après le texte, on a un photon tous les 100 tirs. Il y a un rapport de 10^4 entre la valeur que nous avons trouvée et la valeur constatée. Il y a une forte absorption des photons sans doute dans l'atmosphère.

17. L'impulsion possède une durée Δt_i . Cela correspond à un train d'ondes $\Delta \ell_i = c\Delta t_i$ d'où $\Delta t_i = \frac{\Delta \ell_i}{c} \simeq \frac{10 \times 10^{-2}}{3 \times 10^8} \simeq 3 \times 10^{-10}$ s. Le photon que l'on va récupérer est peut-être parti au début de l'impulsion ou bien à la fin. En faisant du travail sur un grand nombre d'impulsions, on va obtenir une valeur moyenne qui permet une détermination meilleure de la distance Terre-Lune. L'incertitude est alors liée à l'écart-type sur les mesures utilisées que l'on va supposer indépendantes.

Analyse de la figure

18. On raisonnera avec un Lune immobile car sur un intervalle de 6 h, elle se déplace peu puisque sa période est d'environ 29 jours. Il faut effectuer un schéma, voir la figure 3, pour bien comprendre les phases de la Lune et surtout noter que le début des mesures a lieu à minuit à savoir 0 h. Ce moment correspond grosso modo à une opposition par rapport au Soleil. Les mesures sont effectuées la nuit car il faut avoir la Lune mais aussi parce que même si elle était présente pendant la journée, les quelques photons en retour seraient complètement noyés dans ceux de la lumière ambiante. L'observation ne peut pas se faire lors de la nouvelle Lune. Si l'on est au premier quartier, le télescope ne serait pas accessible bien longtemps pour la lumière revenant du réflecteur lunaire. Si l'on était en pleine Lune, la distance entre le télescope et le réflecteur ne ferait qu'augmenter au cours de la rotation de la Terre. Il n'y a plus qu'une solution, c'est le **dernier quartier**. Entre minuit et 3 h, la distance diminue et ensuite elle augmente.

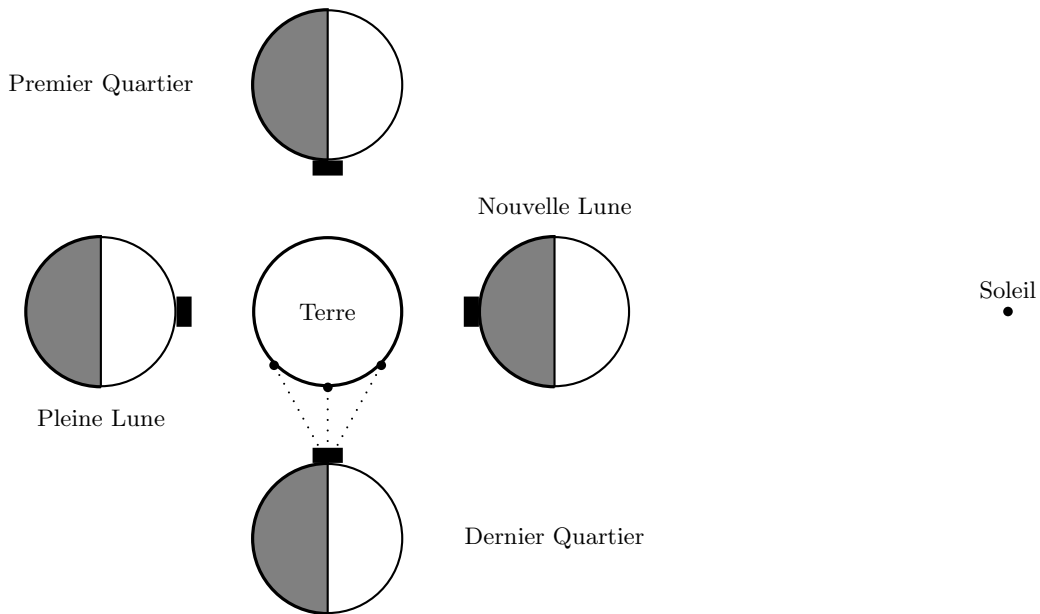


FIGURE 3 – Phases de la Lune

19. La principale cause de la variation de la durée aller-retour est l'évolution de la distance Terre-Lune comme on a pu le voir sur le schéma de la figure 3. C'est à l'instant $t_0 = 3$ h que la Lune est au plus haut dans le ciel de l'observatoire puisque la durée de la mesure est minimale à ce moment-là.

20. Il est important de faire un repérage correct sur la Terre, voir le schéma de la figure 4. On note ω la vitesse de rotation de la terre sur elle-même. L'angle entre les vecteurs \vec{e}_u et \vec{e}_y est noté $\beta = \omega(t - t_0)$, cet angle est aussi celui entre HM et HA . La latitude, angle entre le plan équatorial et le vecteur position est notée ϕ . Le détecteur est, par hypothèse, de l'énoncé placé sur la Lune dans le plan équatorial. On a $\Delta t_{MP} = \frac{2MP}{c}$ et $\Delta t_{AP} = \frac{2AP}{c}$, l'écart entre les deux sera noté $\tau = \frac{2(MP-AP)}{c}$. On observe bien que le

point A est situé à la verticale de l'axe Oy . Le calcul des distances s'effectue en exprimant tout d'abord les vecteurs. On a $\vec{AP} = [D - (R_L + R_\oplus \cos \phi)]\vec{e}_y + R_\oplus \sin \phi \vec{e}_z$. Les projections conduisent pour le second vecteur position à $\vec{MP} = R_\oplus \cos \phi \sin \beta \vec{e}_x + [D - (R_L + R_\oplus \cos \phi \cos \beta)]\vec{e}_y + R_\oplus \sin \phi \vec{e}_z$. On en déduit que $AP^2 = D^2 - 2D(R_L + R_\oplus \cos \phi) + R_\oplus^2 + R_L^2 + 2R_\oplus R_L \cos \phi$ et $MP^2 = D^2 - 2D(R_L + R_\oplus \cos \phi \cos \beta) + R_\oplus^2 + R_L^2 + 2R_\oplus R_L \cos \phi \cos \beta$. Si on effectue un développement limité au premier ordre des distances correspondantes, on obtient $AP \simeq D(1 - \frac{2(R_L + R_\oplus \cos \phi)}{D})^{1/2} = D - (R_L + R_\oplus \cos \phi)$. On procède de la même façon pour MP et on arrive à $MP = D - (R_L + R_\oplus \cos \phi \cos \beta)$. On obtient alors $\tau = \frac{2}{c} R_\oplus \cos \phi (1 - \cos \beta)$. Sur l'enregistrement proposé, on trouve une durée de 2,5 h pour $t - t_0$. On peut considérer que cette durée est telle que l'on puisse effectuer un développement limité de $\cos \omega(t - t_0)$ puisque qu'elle représente environ 1/10 de la période. Cela signifie que $\omega(t - t_0) = \frac{5}{24}\pi$. On peut écrire que $\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$. On arrive ainsi à : $\tau = \frac{R_\oplus \cos \phi \omega^2}{c} (t - t_0)^2$.

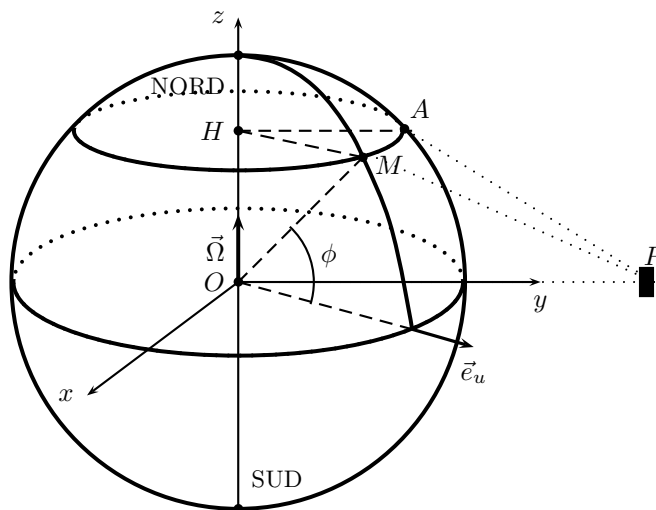


FIGURE 4 – Repérage sur la Terre et distance Terre-Lune

21. On a $\tau = \Delta t_{MP} - \Delta t_{AP} = 2,644 - 2,638 = 0,006$ s. On en déduit que $\cos \phi = \frac{\tau c}{R_\oplus (\frac{5}{24}\pi)^2}$. On trouve $\cos \phi = 0,656$ et donc une latitude $\phi = 49^\circ$ pour l'observatoire de Nice-Côte d'Azur. Cette valeur est un peu trop élevée car Nice se situe en dessous de la latitude 45° qui passe dans la vallée du Rhône à proximité de la ville de Valence.

Analyse de la figure

22. Une telle orbite s'obtient en négligeant l'interaction gravitationnelle avec le Soleil et aussi en considérant les deux astres comme possédant la **symétrie sphérique**.

23. Les variations de durées ont une **période** de 29 jours environ ce qui correspond à la période de rotation de la Lune sur son ellipse. La **distance varie** entre la Terre et la Lune en raison de l'excentricité de l'ellipse. On passe du périégée $r_{min} = \frac{p}{1+e}$ à l'apogée $r_{max} = \frac{p}{1-e}$.

24. Comme précisé ci-dessus, la période est $T \simeq 29$ jours. On calcule $r_{min} = c \frac{\Delta t_{min}}{2} = 363\,000$ km et $r_{max} = c \frac{\Delta t_{max}}{2} = 402\,000$ km. Le grand axe de l'ellipse est $2a = r_{min} + r_{max}$. On trouve $a = 382\,500$ km. Pour déterminer l'excentricité, on utilise les expressions des rayons au périégée et à l'apogée. On obtient : $\frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1+e}{1-e}$. On en déduit que : $e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = 0,05$.

25. Le premier graphique proposé a été enregistré le 25 mars 2000, il correspond au jour 25 sur l'axe des abscisses. Après le dernier quartier, on se retrouve en **Nouvelle Lune** et dans le premier quartier. Comme les mesures doivent se faire la nuit, cela n'est pas possible. Il ne faut non plus oublier qu'il peut y avoir sur Terre une couverture nuageuse qui absorbe les photons en retour mais pour cet observatoire du Sud de la France, il est très peu probable que cela dure pendant 16 jours...

Tests de physique

26. C'est le moment cinétique de la Lune sur son orbite qui est conservé car la force reste centrale même si la constante de gravitation diminue au cours du temps.

27. On écrit la relation de la Dynamique appliquée à la Lune dont le mouvement est supposé circulaire. On obtient $-\frac{G(t)M_L M_\oplus}{D^2} \vec{e}_r = -M_L D \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$. On en déduit que $\dot{\theta}^2 = \frac{G(t)M_\oplus}{D^3}$. Le moment cinétique orbital de la Lune est $\vec{L}_L = M_L D^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$. La constante des aires est $C = D^2 \dot{\theta}$. De cette dernière relation, on déduit que $D^3 = \frac{C^3}{\dot{\theta}^3}$ que l'on utilise dans l'expression de $\dot{\theta}^2$ issue de la relation de la Dynamique. On arrive à l'expression : $\dot{\theta}^{1/2} = \frac{G(t)M_\oplus}{C^{3/2}}$.

On constate donc que si $G(t)$ diminue au cours du temps qu'alors $\dot{\theta}$ va lui aussi diminuer. Si l'on différencie, sur le plan logarithmique, l'expression précédente, on écrit que $\frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{dG}{G}$. Si la variation relative de $G(t)$ est de 1% alors la variation relative de $\dot{\theta}$ est de 2%.

28. La relation de la Dynamique a conduit à la relation $D^3 \dot{\theta}^2 = GM_\oplus = \text{Cte}$. On différencie en logarithme pour obtenir $3 \frac{dD}{D} + 2 \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = 0$. Comme $d\dot{\theta} < 0$ puisque la vitesse angulaire diminue, on en déduit que $dD > 0$ la distance augmente. La relation précédente permet d'écrire que la vitesse angulaire de la Lune est $\omega_L = \dot{\theta} = \frac{2\pi}{29 \times 24 \times 3600}$. À partir de l'expression différentielle établie avant, on peut écrire que $\frac{dD}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{D}{\omega_L} \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Avec les valeurs numériques proposées, on trouve que $\frac{dD}{dt} = 3,8 \text{ cm par an}$.

29. Le moment cinétique du système Terre-Lune est conservé car on néglige l'influence du Soleil, c'est donc un système isolé. En prenant en compte les rotations propres de la Terre et de la Lune en plus de la contribution liée au mouvement orbital de la Lune, on trouve que $L_{tot} = \frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2 \omega_T + \frac{2}{5} M_L R_L^2 \omega_L + M_L D^2 \omega_L$. Compte tenu du fait que $R_L^2 \ll R_\oplus^2$ et que $M_L \ll M_\oplus$, on peut largement négliger la contribution du terme $\frac{2}{5} M_L R_L^2 \omega_L$ devant le terme équivalent de la Terre. Finalement, le moment cinétique du système est $L_{tot} = \frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2 \omega_T + M_L D^2 \omega_L$.

30. Comme L_{tot} est une constante, on peut différencier cette expression en n'oubliant pas que ω_L , ω_T et D varie au cours du temps et écrire une relation intéressante. On différencie donc une fois de plus : $0 = \frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2 d\omega_T + M_L (2D d\omega_L + D^2 d\omega_L)$. On modifie l'écriture de cette équation pour avoir $\frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2 d\omega_T + M_L D^2 \omega_L (2 \frac{dD}{D} + \frac{d\omega_L}{\omega_L}) = 0$. Nous avons vu avant que $\frac{d\omega_L}{\omega_L} = -\frac{3}{2} \frac{dD}{D}$, on obtient la relation $\frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2 d\omega_T + M_L D^2 \omega_L \frac{dD}{2D} = 0$. On constate facilement que si la distance augmente alors $dD > 0$ et qu'automatiquement $d\omega_T < 0$, la vitesse de rotation de la Terre diminue. Sur des durées de l'ordre de l'âge de l'Univers, on assistera à la synchronisation des vitesses de rotation de la Lune et de la Terre. Les effets dus aux marées contribuent dans le même sens à cette évolution inéluctable.

Problème n° 2 – Moteurs moléculaires

ENS Bio 2010

A. Approche mécanique

1. On a $m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + F(t)$. Cette équation s'écrit aussi $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{F(t)}{m}$.

2. On recherche la solution sous la forme $v(t) = A(t) \exp -\frac{t}{\tau}$, cela implique que $\frac{dv}{dt} = \frac{dA}{dt} \exp -\frac{t}{\tau} - \frac{v}{\tau}$. On a donc $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{dA}{dt} \exp -\frac{t}{\tau}$. On identifie donc $\frac{dA}{dt} \exp -\frac{t}{\tau} = \frac{F(t)}{m}$. En intégrant, on arrive à $A(t) - A(0) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) \exp \frac{t}{\tau} dt$. Or à $t = 0$, on a $v(0) = A(0)$ d'où $A(t) = v(0) + \frac{1}{m} \int_0^t F(t) \exp \frac{t}{\tau} dt$. Cela permet de donner la forme voulue à l'expression de la vitesse : $v(t) = \left(v(0) + \frac{1}{m} \int_0^t F(t) \exp \frac{t}{\tau} dt \right) \exp -\frac{t}{\tau}$.

3. Comme $v = \frac{dx}{dt}$, il faut intégrer l'expression précédente pour arriver à $x(t)$. On a $x(t) - x(0) = \left[-v(0)\tau \exp -\frac{t}{\tau} \right]_0^t + \frac{1}{m} \int_0^t \exp -\frac{t}{\tau} \left(\int_0^t F(t) \exp \frac{t}{\tau} dt \right) dt$. On peut donc proposer l'expression $x(t) = x(0) + v(0)\tau(1 - \exp -\frac{t}{\tau}) + \frac{1}{m} \int_0^t \exp -\frac{t}{\tau} \left(\int_0^t F(t) \exp \frac{t}{\tau} dt \right) dt$.

4. La vitesse moyenne $\langle v(t) \rangle_M$, au temps t , de la kinésine est évaluée sur un ensemble de M expériences. Le calcul de cette moyenne n'a aucun rapport avec le temps t figurant dans les expressions, en particulier la prise de la moyenne rentre ainsi dans l'intégrale qui figure dans l'expression de $v(t)$. On a donc $\langle v(t) \rangle_M = \langle v(0) \rangle_M \exp -\frac{t}{\tau} + \frac{1}{m} \left(\int_0^t \langle F(t) \rangle_M \exp \frac{t}{\tau} dt \right) \exp -\frac{t}{\tau}$. Or, selon l'hypothèse de l'énoncé, la vitesse initiale est la même pour toutes les expériences donc $\langle v(0) \rangle_M = v(0)$ et comme la force est aléatoire, on a $\langle F(t) \rangle_M = 0$. On peut conclure que la vitesse moyenne sur les M expériences est : $\langle v(t) \rangle_M = v(0) \exp -\frac{t}{\tau}$.

5. On procède exactement de la même façon pour la position moyenne et comme, là encore, la position initiale est identique pour toutes les expériences, on arrive facilement à $\langle x(t) \rangle_M = x(0) + v(0)\tau(1 - \exp -\frac{t}{\tau})$.

6. L'écart quadratique moyen de la vitesse $\sigma^2 = \langle \{v(t) - \langle v(t) \rangle_M\}^2 \rangle_M$ montre la dispersion du carré de la vitesse. On $v(t) - \langle v(t) \rangle_M = \frac{1}{m} \exp -\frac{t}{\tau} \int_0^t F(t) \exp \frac{t}{\tau} dt$. On élève cette expression au carré et on introduit

les variables muettes t_1 et t_2 . Il faut encore prendre la valeur moyenne sur les M expériences. Cela donne $\sigma^2 = \frac{1}{m^2} \exp -\frac{2t}{\tau} < \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^{t_2} dt_2 F(t_1)F(t_2) \exp \frac{t_1}{\tau} \exp \frac{t_2}{\tau} >_M$. On peut passer le calcul de la moyenne sur $F(t_1)F(t_2)$ puisque l'intégration sur le temps n'a rien à voir avec ce calcul de moyenne. Il faut ensuite utiliser le résultat de l'énoncé pour écrire que $\sigma^2 = \frac{1}{m^2} \exp -\frac{2t}{\tau} 2D\gamma^2 \int_0^t \exp \frac{2t_1}{\tau} dt_1$. On a donc $\sigma^2 = \frac{2D\gamma^2}{m^2} \exp -\frac{2t}{\tau} \frac{\tau}{2} (\exp \frac{2t}{\tau} - 1)$. Après simplification, on arrive à : $\sigma^2 = \frac{D\gamma}{m} (1 - \exp -\frac{2t}{\tau})$.

7. L'énergie cinétique moyenne de la kinésine est définie par $< E_c >_M = \frac{1}{2}m < v^2 >_M$. Pour déterminer son expression, on peut développer l'expression définissant l'écart-type au carré : $\sigma^2 = < v^2 >_M + < v >_M^2 - 2v < v >_M$. Le calcul de la moyenne se rapporte sur chaque terme, on a donc $\sigma^2 = < v^2 >_M - < v >_M^2$. On voit donc que $< v^2 >_M = < v >_M^2 + \sigma^2$ ce qui est assez logique avec la notion d'écart quadratique. L'expression de l'énergie cinétique moyenne est donc, à une date t quelconque : $< E_c(t) > = \frac{1}{2}mv(0)^2 \exp -\frac{2t}{\tau} + \frac{1}{2}m\sigma^2$. Lorsque $t \gg \tau$, on a $< E_c >_M = \frac{1}{2}m \frac{D\gamma}{m} = \frac{1}{2}D\gamma$. Comme $E_c = \frac{1}{2}k_B T$, on en déduit la relation $D\gamma = k_B T$.

8. On a $\Delta G_m = F_m d$ et par conséquent $F_m = \frac{\Delta G_m}{d} = \frac{r \Delta G_b}{d}$. On trouve $F_m = 4 \times 10^{-11} \text{ N}$.

9. Avec l'hypothèse d'une force F_m constante supplémentaire, le principe fondamental de la dynamique appliqué à une kinésine permet d'écrire que : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{F(t)}{m} + \frac{F_m}{m}$.

10. La solution de l'équation différentielle précédente est facilement obtenue par application du théorème de superposition, on peut utiliser la solution du cas précédent y ajouter la solution particulière associée à F_m et faire attention à la condition initiale sur la vitesse. On obtient alors : $v(t) = (v(0) - \frac{F_m}{m} + \frac{1}{m} \int_0^t F(t) \exp \frac{t}{\tau} dt) \exp -\frac{t}{\tau} + \frac{F_m}{m}$. On calcule la vitesse moyenne comme avant et on trouve aisément $< v >_M = (v(0) - \frac{F_m}{m}) \exp -\frac{t}{\tau} + \frac{F_m}{m}$. Pour $t \gg \tau$, on a donc $< v >_M = \frac{F_m}{\gamma}$. Le mouvement est alors rectiligne et uniforme.

11. L'écart quadratique moyen est toujours défini par $\sigma^2 = < \{v(t) - < v(t) >_M\}^2 >_M$ mais l'expression de la vitesse moyenne a changé. Toutefois, il correspond toujours au carré du terme de fluctuation qui a généré la contribution $\frac{D\gamma}{m}$ précédente dans le cas où $t \gg \tau$. En utilisant le fait que $\sigma^2 = < v^2 >_M - < v >_M^2$, on en déduit que $v_q^2 = < v^2 >_M = \sigma^2 + < v >_M^2$. Comme lorsque $t \gg \tau$, on a $< v >_M = \frac{F_m}{\gamma}$, on peut en déduire que la vitesse quadratique moyenne est donnée par la relation : $v_q^2 = \frac{D\gamma}{m} + \frac{F_m^2}{\gamma^2}$.

B. Approche statistique

12. Le coefficient de diffusion de la kinésine noté D s'exprime comme tous les coefficients de diffusion en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Par analyse dimensionnelle, on peut proposer la relation : $D = \frac{d^2}{\tau_d}$.

13. IL faut faire apparaître sur le schéma 2 flèches partant de $N(x, t)$, une allant vers $N(x - d, t)$ l'autre vers $N(x + d, t)$. Ceci montre les pertes, pour les gains il faut mettre en place deux flèches, l'une venant de l'abscisse $x + d$ et l'autre de $x - d$. Il y a donc **4 contributions** au bilan du nombre d'occupation d'un site donné.

14. L'équation bilan traduisant l'évolution entre t et $t + \Delta t$ du nombre d'occupation en x se traduit par : $N(x, t + \Delta t) = N(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau_d} (N(x + d, t) + N(x - d, t)) - 2 \frac{\Delta t}{\tau_d} N(x, t)$. Cette équation est effectivement celle proposée par l'énoncé : $N(x, t + \Delta t) = (1 - 2 \frac{\Delta t}{\tau_d}) N(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau_d} [N(x - d, t) + N(x + d)]$.

15. Pour la dérivée temporelle, on peut se contenter du premier ordre : $N(x, t + \Delta t) = N(x, t) + \Delta t \frac{\partial N}{\partial t}$. Par contre, pour la dérivation spatiale, il faut aller à l'ordre 2 du fait de la somme des deux contributions qui élimine le terme de premier ordre. On a $N(x + d, t) = N(x, t) + d \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$ et $N(x - d, t) = N(x, t) - d \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$. Lorsque l'on remplace dans l'équation bilan précédente, on obtient $\Delta t \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\Delta t}{\tau_d} d^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$. Après simplification par Δt et en utilisant le coefficient de diffusion $D = \frac{d^2}{\tau_d}$, on arrive à l'équation (ED1) qui est une équation de diffusion : $\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial N}{\partial t}$.

16. On teste la solution proposée dans l'équation différentielle. On a $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2} \right] \exp -\frac{x^2}{4Dt}$. Calculons la dérivée première en x : $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[-\frac{x}{2Dt} \right] \exp -\frac{x^2}{4Dt}$. On enchaîne avec le calcul de la dérivée seconde : $\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right] \exp -\frac{x^2}{4Dt}$. Cette dernière expression nous permet de constater qu'on a bien $D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

17. La solution est tracée pour trois temps $t_1 < t_2 < t_3$ sur le graphique de la figure 5.

18. L'aire sous une courbe correspond à l'intégrale de la grandeur représentée à savoir $I = \int_{-\infty}^{\infty} N(x, t_i) dx$. On somme donc tous les nombres d'occupation. Or, le processus proposé considère la réalisation de M expériences

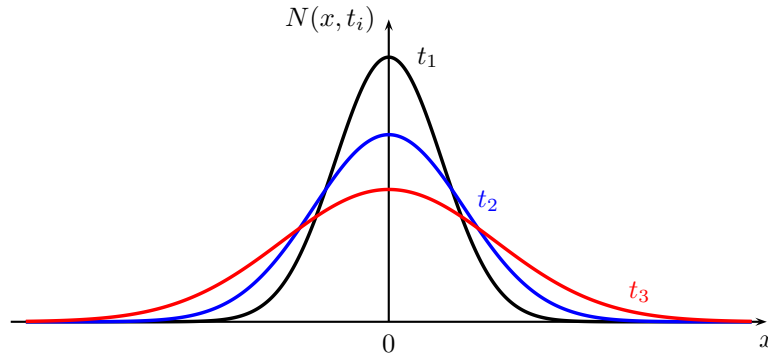


FIGURE 5 – Processus de diffusion

avec pour chacune d'elle une seule kinésine. Il y a donc au total M kinésines permettant de constituer le graphique. On peut donc écrire que : $M = \int_{-\infty}^{\infty} N(x, t_i) dx$.

19. Depuis le début du problème, on envisage une progression de la kinésine sur l'axe Ox dans le sens des x croissants. Il est donc indispensable que la probabilité d'une transition dans ce sens soit supérieure à la probabilité d'évolution dans le sens des x décroissants. On doit donc observer que $p^+ > p^-$, c'est-à-dire que les temps caractéristiques vérifient la relation $\tau_d^+ < \tau_d^-$. Le bilan des nombres d'occupation s'écrit maintenant :

$$N(x, t + \Delta t) = N(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau_d^+} N(x - d, t) + \frac{\Delta t}{\tau_d^-} N(x + d, t) - \frac{\Delta t}{\tau_d^+} N(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau_d^-} N(x, t).$$

20. On utilise les mêmes développements de TAYLOR-LAGRANGE que ceux de l'étude précédente. On obtient $\Delta t \frac{\partial N}{\partial t} = \Delta t \frac{d^2}{2} \left(\frac{1}{\tau_d^+} + \frac{1}{\tau_d^-} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \Delta t d \left(\frac{1}{\tau_d^+} - \frac{1}{\tau_d^-} \right) \frac{\partial N}{\partial x}$. En utilisant les variables proposées par l'énoncé, on peut donc conclure que l'équation différentielle (ED2) est : $\frac{\partial N}{\partial t} = D_F \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial N}{\partial x}$.

21. On effectue le changement de variable, celui-ci a des conséquences pour le calcul des dérivées. On a $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial T} - \nu \frac{\partial Q}{\partial X}$ puisque $\frac{\partial T}{\partial t} = 1$ et $\frac{\partial X}{\partial t} = -\nu$. On a aussi $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x}$. On trouve facilement que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial X}$ car $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial X}{\partial x} = 1$. Le calcul de la dérivée seconde est inutile au vu de celui-ci : $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}$. On peut donc écrire l'équation différentielle à laquelle obéit $Q(X, T)$: $\frac{\partial Q}{\partial T} - \nu \frac{\partial Q}{\partial X} = D_F \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} - \nu \frac{\partial Q}{\partial X}$. Cette équation se simplifie en une équation de diffusion, notée (EDQ) : $\frac{\partial Q}{\partial T} = D_F \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}$.

22. Pour donner l'expression de la solution $N(x, t)$, il suffit de reprendre celle proposée dans le cas précédent en remplaçant le rôle de x par celui de la variable $X = x - \nu t$. On a donc : $N(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -\frac{(x - \nu t)^2}{4Dt}$. Cette solution présente un maximum à une position x_i pour une date t_i telle que $x_i - \nu t_i = 0$. Cette forme montre tout de suite l'avancement de ce maximum au cours du temps à la vitesse ν comme les courbes de la question suivante vont le confirmer.

23. La solution est représentée pour trois temps $t_1 < t_2 < t_3$ sur le graphique de la figure 6.

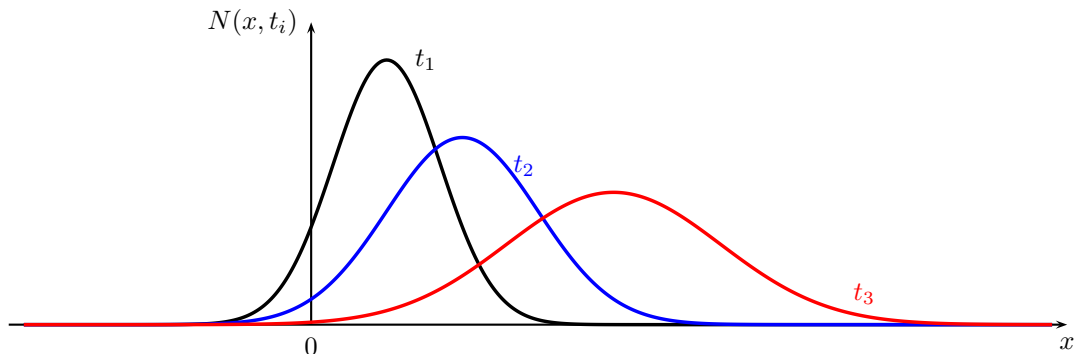


FIGURE 6 – Progression de la kinésine

On peut voir clairement sur les courbes de la figure 6 que les effets de la diffusion classique et de la progression à vitesse constante se mêlent pour décrire le comportement moyen de la kinésine. Le maximum de la courbe $N(x, t)$ progresse à vitesse constante tandis que les M positions de la kinésine des M expériences se répartissent sur un intervalle d'espace toujours plus grand.