

Devoir libre de Sciences Physiques n°4 du 02-12-2024

Problème n° 1 – Couleurs par diffraction

Centrale PC 2007

A. Généralités

On envisage un réseau par transmission constitué d'une surface plane ne laissant pas passer la lumière et percée de N fentes parallèles de largeur e et de longueur L régulièrement espacées. Elles forment ainsi un motif répété périodiquement de période a . On considère que $L \gg e$ et que L est très grand devant les longueurs d'ondes λ du domaine visible. L'indice de l'air est pris égal à 1. Voir la figure 1.

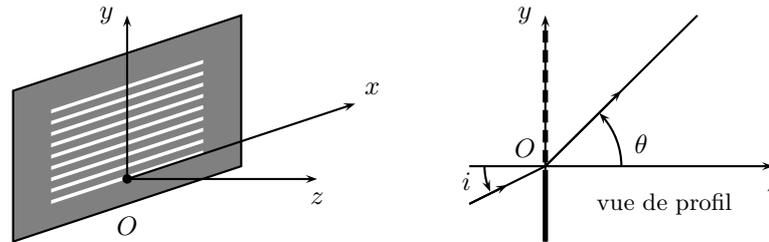


FIGURE 1 – Réseau par transmission

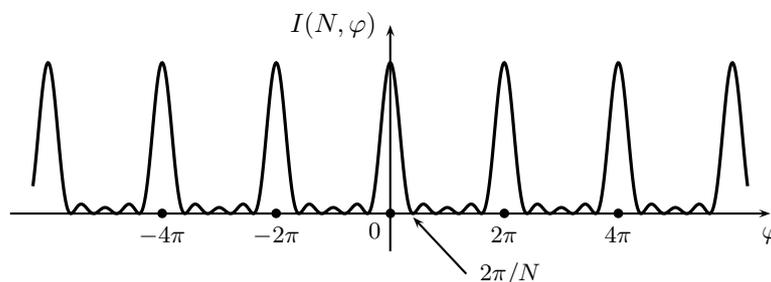
1. Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan yOz . Pourquoi peut-on considérer que la direction de la lumière diffractée est également contenue dans ce plan ?

2. On note $\underline{a}_0(i, \theta, e, \lambda)$ l'amplitude diffractée par la première fente (0) dans la direction θ . Justifier que l'amplitude diffractée dans la même direction par la fente (1) ne diffère de \underline{a}_0 que par l'ajout d'une phase supplémentaire φ que l'on déterminera en fonction de i , θ , a et λ la longueur d'onde de la lumière incidente.

On admet que l'amplitude diffractée par le réseau peut s'écrire comme le produit de l'amplitude diffractée par un motif unique (la fente (0) par exemple) et d'un terme d'interférence à N ondes, noté $\mathcal{A}(N, \varphi)$ indépendant de la nature des motifs et dont l'expression est :

$$\mathcal{A}(N, \varphi) = \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}$$

L'intensité lumineuse diffractée est reliée à $\mathcal{A}^2(N, \varphi)$ dont l'allure est représentée sur la figure 2. La représentation a été effectuée pour un nombre N relativement faible pour la rendre lisible. En réalité les maxima principaux ont une valeur très grande devant celle des maxima secondaires que l'on ne distingue pas en général.

FIGURE 2 – Intensité $I(N, \varphi)$ diffractée par le réseau

3. Exprimer la condition pour obtenir une intensité lumineuse importante et retrouver la loi de BRAGG des réseaux.

4. La surface d'un disque compact est modélisé par un ensemble de miroirs parallèles identiques aux fentes précédentes, voir la figure 3. Montrer que le résultat précédent reste valable à condition de remplacer φ par une phase $\varphi'(i, \theta', a, \lambda)$ à déterminer.

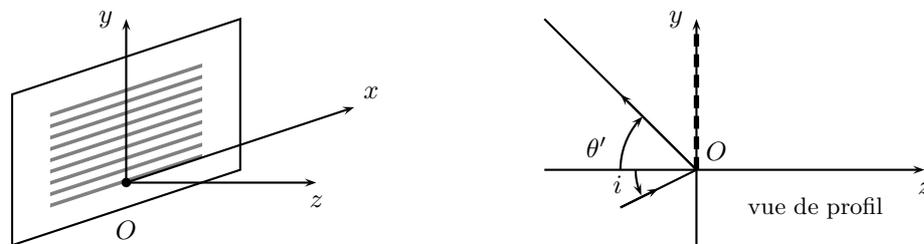


FIGURE 3 – Réseau par réflexion

- 5. Pour un disque compact, $a = 1,6 \mu\text{m}$. Le disque est désormais éclairé en incidence normale. Proposer un dispositif expérimental permettant d’observer la lumière diffractée dans les conditions décrites précédemment.
- 6. Y-a-t-il mélange des ordres en lumière blanche ?
- 7. Peut-on voir son propre reflet dans un disque compact comme dans un miroir ? Les couleurs sont-elles modifiées ?

B. Couleurs du paon

Les barbules des plumes de paon contiennent des bâtonnets de mélanine (pigment brun foncé qui donne sa coloration à la peau) opaques noyés dans de la kératine (protéine fibreuse transparente d’indice $n = 1,5$). Chaque bâtonnet constitue un obstacle qui diffracte la lumière (comme les miroirs précédents). Les bâtonnets sont régulièrement répartis dans la kératine au niveau des nœuds d’un réseau cubique simple (N_x bâtonnets dans la direction x , N_y dans la direction y et N_z dans la direction z). Comme précédemment, seuls les rayons contenus dans le plan yOz sont pris en compte. On suppose l’amplitude diffractée indépendante de N_x : tout se passe comme si les bâtonnets avaient une longueur L dans la direction x très supérieure à a et λ . On note \underline{a}_1 l’amplitude (supposée constante) diffractée par un unique bâtonnet. On s’intéresse à la lumière diffractée par chaque bâtonnet dans la direction $r' = -r$ de la réflexion spéculaire, voir la figure 4.

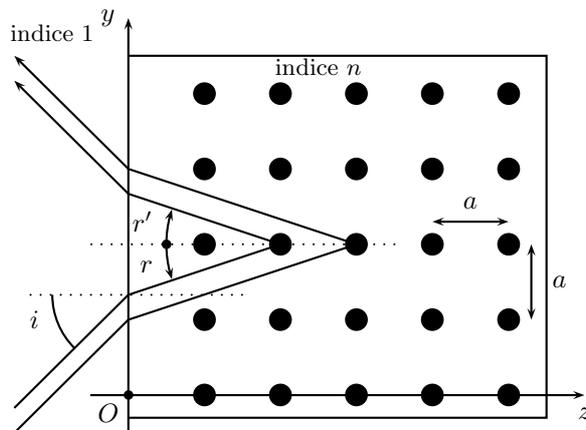


FIGURE 4 – Modèle de la kératine

Soit φ_y le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction y et de même coordonnée z : bâtonnets (i, j) et $(i + 1, j)$. De même, φ_z est le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction z et de même coordonnée y : bâtonnets (i, j) et $(i, j + 1)$. L’intensité diffractée est proportionnelle à $|\underline{a}_1|^2 I(N_y, \varphi_y) I(N_z, \varphi_z)$.

- 8. Expliquer pourquoi les déphasages sont $\varphi_z = \frac{2\pi 2na \cos r}{\lambda}$ et $\varphi_y = 0$.
- 9. Dans quelle(s) direction(s) i la longueur d’onde λ est-elle préférentiellement diffractée ?
- 10. Pour quelle valeur minimale de a toutes les longueurs d’onde du spectre visible sont-elles diffractées ? Faire l’application numérique.
- 11. On se place en incidence normale $i = 0$. Que vaut alors φ_z ? En observant les taches colorées des plumes de paon, on peut voir un centre bleu-noir (bâtonnets distants de $0,16 \mu\text{m}$) entouré d’une tache ovale turquoise (bâtonnets séparés de $0,17 \mu\text{m}$) ceinte d’une couronne extérieure brun-rouge (bâtonnets séparés de $0,21 \mu\text{m}$). Interpréter ces différentes teintes.

Problème n° 2 – Générateur à turbine et cogénération

E3A PSI 2011

Les industries, les hôpitaux et les villes sont des sites qui ont besoin d'un apport d'énergie très important : les consommations d'électricité, de chaleur ou de froid y sont nécessaires conjointement. De petites turbines à gaz intégrées à de grands immeubles, à des quartiers administratifs, à des centres commerciaux ou à des usines assurent la stabilité et le contrôle local de leurs productions. La cogénération a l'avantage d'exploiter la chaleur dégagée par les gaz d'échappement, habituellement dissipée dans l'environnement, pour délivrer de façon combinée de l'énergie thermique et de l'énergie mécanique. L'une peut être utilisée pour le chauffage des immeubles, alors que l'autre produit de l'électricité par couplage avec un alternateur.

A. Cycle de Carnot

Diagramme de Watt

Le cycle réversible de CARNOT décrit par le fluide est constitué des quatre transformations suivantes :

- deux isothermes $1 \rightarrow 1'$ et $2 \rightarrow 2'$ de températures respectives T_1 et $T_2 < T_1$ au cours desquelles sont échangés les transferts thermiques respectifs Q_1 et Q_2 .
- deux adiabatiques $1' \rightarrow 2$ et $2' \rightarrow 1$ joignant les deux isothermes.

Ce cycle moteur est habituellement représenté dans le diagramme de WATT (P, V) visualisant la pression P du gaz en fonction du volume V qu'il occupe.

1. Comparer qualitativement les pentes des tangentes aux courbes représentant une isotherme et une adiabatique réversible en un point commun du diagramme (P, V). Cette propriété étant indépendante de la nature du fluide, exprimer, dans le cas du gaz parfait, le rapport de ces deux pentes en fonction du rapport γ de ses capacités thermiques à pression et à volume constants.

2. En déduire la représentation du cycle moteur de CARNOT en précisant son orientation, les états 1, 1', 2 et 2' du fluide, les isothermes T_1 et T_2 . Que représente l'aire du cycle ?

3. Définir le rendement η de ce cycle puis l'exprimer en fonction des températures T_1 et T_2 . Calculer sa valeur pour $T_1 = 1\,300\text{ K}$ et $T_2 = 300\text{ K}$.

4. Ce rendement dépend-il de la nature du fluide considéré ? Justifier que la valeur du rendement de CARNOT ne peut être dépassée par aucun moteur réel fonctionnant entre les deux même sources de chaleur.

B. Étude d'un générateur à turbine à gaz

Le schéma simplifié du générateur est représenté sur la figure 5.

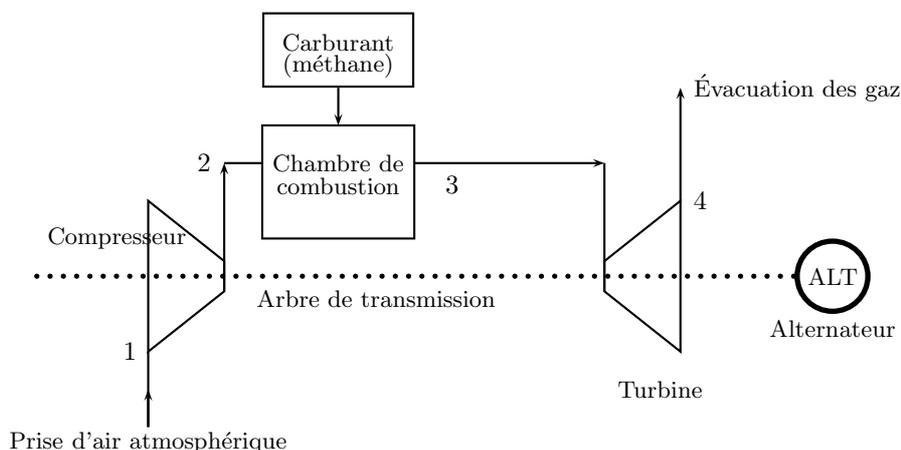


FIGURE 5 – Générateur à turbine à gaz

L'énergie thermique est fournie dans la chambre de combustion et l'énergie mécanique est récupérée sur l'arbre de transmission pour entraîner le compresseur et actionner l'alternateur. Les éléments de la turbine à gaz (compresseur, chambre de combustion, turbine, échangeurs thermiques) traversés par le fluide en écoulement sont des systèmes ouverts.

Premier principe pour un système ouvert

Les hypothèses suivantes seront adoptées tout au long du problème :

- le régime de fonctionnement de la machine est permanent,
- les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur du fluide traversant chaque partie du dispositif sont négligeables devant les autres formes d'énergie.

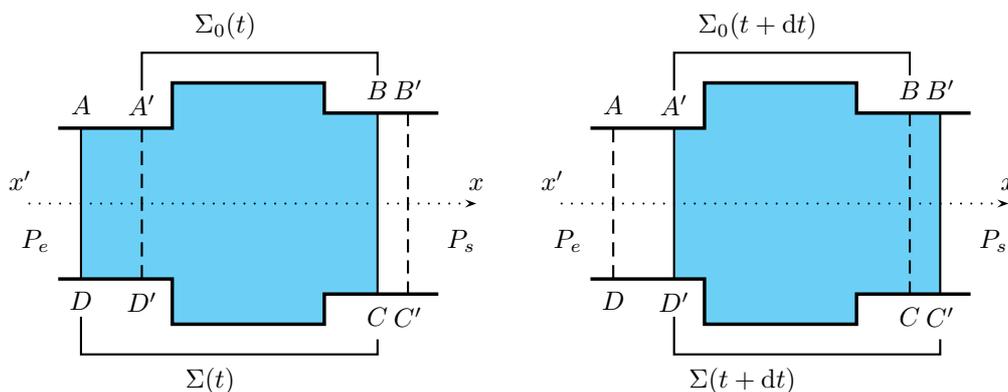


FIGURE 6 – Système ouvert en écoulement permanent

Le schéma de principe de l'étude est proposé à la figure 6.

Le volume de contrôle $A'BCD'$ définit le système machine ouvert Σ_0 . La masse de fluide gazeux contenue dans ce volume est notée $m_0(t)$ à la date t et $m_0(t + dt)$ à la date $t + dt$. Le fluide s'écoule du réservoir de pression P_e au réservoir de pression $P_s < P_e$. Pendant la durée dt , une masse δm_e (contenue dans le volume $AA'DD'$) entre par l'ouverture de section S_e et une quantité de matière de masse δm_s (contenue dans le volume $BB'CC'$) sort par l'ouverture de section S_s . Le système fermé Σ considéré pour cette étude occupe à l'instant t le volume $ABCD$ puis à l'instant $t + dt$ le volume $A'B'C'D'$. Pour les fluides entrant et sortant, u, h, v désignent respectivement l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et le volume massique du fluide. L'indice e est relatif aux grandeurs d'entrée et l'indice s aux grandeurs de sortie. Les grandeurs d'échanges massiques entre ce système et le milieu extérieur sont :

- le transfert thermique massique q ,
- le travail massique d'écoulement ou de transvasement w_p qui est exercé par les forces pressantes à l'entrée et à la sortie de la machine,
- le travail massique utile w_u fourni à l'intérieur de la machine par des pièces mobiles (ailettes ou pistons).

5. Établir un bilan de masse pour le système Σ entre les instants t et $t + dt$. En déduire une relation simple entre δm_e et δm_s .

6. Déterminer en fonction de P_s, P_e, v_e et v_s , le travail massique de transvasement w_p exercé par les forces de pression sur le système Σ entre les instants t et $t + dt$.

7. En appliquant le premier principe de la Thermodynamique au système Σ entre les instants t et $t + dt$, montrer que $h_s - h_e = w_u + q$.

Cycle de Brayton idéal

Le fluide utilisé dans les générateurs à turbine à gaz est l'air atmosphérique. Les étapes successives du cycle de BRAYTON réversible décrit par l'air sont les suivantes :

- $1 \rightarrow 2$: l'air atmosphérique s'engage en 1 dans le compresseur où il est comprimé de façon isentropique.
- $2 \rightarrow 3$: l'air frais est ensuite admis dans la chambre de combustion où le gaz naturel est injecté et s'enflamme. Le fluide est porté à des températures très élevées de façon isobare, sans apport de travail. Sa composition n'est pas modifiée.
- $3 \rightarrow 4$: le gaz chaud subit dans la turbine une détente isentropique. Cette détente est utilisée pour produire un travail mécanique dont une partie sert à faire fonctionner le compresseur alors que l'autre actionne l'alternateur. À la sortie 4 de la turbine, les gaz d'échappement sont évacués vers l'atmosphère.
- $4 \rightarrow 1$: le gaz chaud qui s'échappe subit un refroidissement sans apport de travail au contact de la source froide (l'air atmosphérique). Le transfert thermique est isobare.

La puissance fournie par la turbine est modulée grâce au débit d'air envoyé dans le compresseur à l'entrée 1 du dispositif et à la quantité de gaz naturel injecté dans la chambre de combustion. L'air atmosphérique, le mélange initial (air-gaz naturel) et les gaz brûlés sont assimilés à un même gaz parfait. Le rapport de ses capacités thermiques à pression et volume constants est supposé constant et égal à $\gamma = 1,4$. Sa capacité thermique massique à pression constante est : $c_p = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Le cycle de BRAYTON est représenté sur la figure 7 dans le diagramme entropique, où T est la température du gaz et s son entropie massique. L'air est aspiré dans le compresseur à la pression $P_1 = 1 \text{ bar}$ et à la température $T_1 = 300 \text{ K}$ pour y être comprimé à la pression $P_2 = 10 \text{ bar}$. On a $T_3 = 1300 \text{ K}$. On posera pour simplifier :

$$\lambda = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{T_3}{T_1}$$

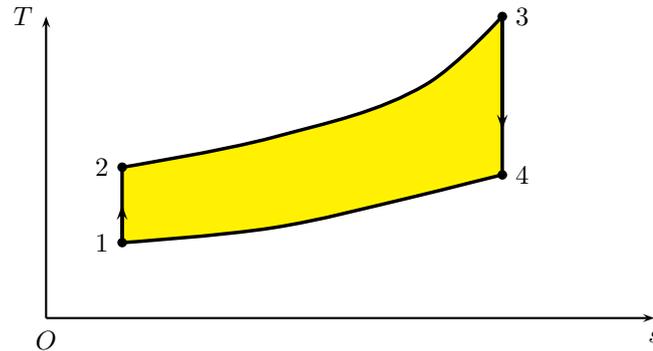


FIGURE 7 – Cycle idéal de BRAYTON

8. Démontrer la loi de LAPLACE relative au couple (P, T) en précisant ses conditions d'utilisation. En déduire T_2 et T_4 en fonction de λ , τ et T_1 . Applications numériques.

9. Exprimer puis calculer le travail massique de compression w_{12} absorbé par le gaz (fourni au gaz par le compresseur) au cours de la transformation adiabatique $1 \rightarrow 2$ en fonction de c_p , λ et T_1 .

10. À l'issue de la combustion (étape $2 \rightarrow 3$), la chambre fournit au gaz une énergie thermique massique de combustion q_{23} qui amène la température de celui-ci à la valeur $T_3 = 1\,300\text{ K}$. Exprimer q_{23} en fonction de c_p , λ , τ et T_1 . Réaliser l'application numérique.

11. Exprimer puis calculer le travail massique w_T récupéré par la turbine (fourni à la turbine par le gaz) au cours de la transformation $3 \rightarrow 4$, en fonction de c_p , λ , τ et T_1 .

Le travail w_c fourni au compresseur par la turbine est intégralement transféré au gaz par le compresseur au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$: $w_c = w_{12}$.

12. Écrire le travail utile w_a fourni par la turbine pour actionner l'alternateur, puis l'exprimer en fonction de c_p , λ , τ et T_1 , effectuer l'application numérique. Pour quelle valeur λ_{max} de λ (fonction de τ) ce travail w_a est-il maximal? Comparer λ_{max} à la valeur numérique de λ adoptée pour la turbine.

13. Calculer le rapport $\mathcal{R} = \frac{w_c}{w_a}$ qui évalue la répartition entre le travail w_c que fournit la turbine au compresseur et le travail utile w_a qu'elle fournit à l'alternateur. Commenter.

14. Définir le rendement thermique η du générateur à turbine et l'exprimer en fonction du paramètre λ . Calculer η pour le travail w_a fourni par la turbine à l'alternateur et le comparer à celui d'un cycle de CARNOT fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes.

15. Exprimer puis calculer le transfert thermique massique q_{41} reçu par le gaz au cours de la phase d'échappement $4 \rightarrow 1$ en fonction de c_p , λ , τ et T_1 . Cette énergie thermique est-elle récupérable? Commenter.

Cycle de Brayton réel

En réalité, des phénomènes irréversibles tant au niveau du compresseur qu'au niveau de la turbine se produisent et des chutes de pression apparaissent dans les conduits et dans la chambre de combustion. Le cycle réel décrit par la turbine diffère alors du cycle idéal décrit précédemment. Il est représenté à la figure 8 dans le diagramme entropique par le cycle $1 \rightarrow 2'$ (adiabatique irréversible), $2' \rightarrow 3$ (isobare) $3 \rightarrow 4'$ (adiabatique irréversible) et $4' \rightarrow 1$ (isobare). Les irréversibilités dans le compresseur et dans la turbine sont prises en compte grâce aux rendements isentropiques :

$$\eta_c = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} = 0,80 \quad \text{et} \quad \eta_T = \frac{h_{4'} - h_3}{h_4 - h_3} = 0,85$$

16. Déterminer la température réelle de sortie du compresseur $T_{2'}$, puis la température réelle à la sortie de la turbine $T_{4'}$, en fonction de λ , τ , η_c , η_T et T_1 . Applications numériques.

17. Exprimer puis calculer le travail massique de compression $w_{12'}$ absorbé par le gaz en fonction de c_p , T_1 , λ et η_c .

18. Déterminer l'énergie thermique massique de la combustion réelle $q_{2'3}$, puis le travail réel w'_T récupéré par la turbine au cours de la transformation $3 \rightarrow 4'$, en fonction de c_p , λ , τ , η_c , η_T et T_1 . Applications numériques.

19. Le travail w'_c fourni au compresseur par la turbine est intégralement transféré au gaz par le compresseur au cours de la transformation $1 \rightarrow 2'$. Déterminer, en fonction de c_p , λ , τ , η_c , η_T et T_1 , le travail utile w'_a fourni

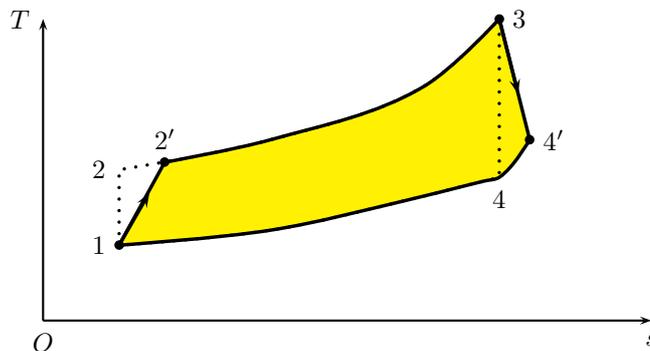


FIGURE 8 – Cycle réel de BRAYTON

par la turbine pour actionner l'alternateur. Application numérique. Pour quelle valeur λ'_{max} de λ (fonction de τ , η_c et η_T), ce travail w'_a est-il maximal? Comparer cette valeur numérique λ'_{max} à la valeur λ adoptée pour la turbine.

20. Calculer le rapport $\mathcal{R}' = \frac{w'_c}{w'_a}$, qui évalue la répartition entre le travail $w'_c = w_{12'}$ que fournit la turbine pour actionner le compresseur et le travail w'_a qu'elle destine à la rotation de l'alternateur. Calculer le rendement thermique η' du générateur à turbine pour le cycle réel. Comparer \mathcal{R}' au rapport idéal \mathcal{R} et η' au rendement η du cycle théorique. Commenter.

Régénérateur

La température des gaz d'échappement à la sortie de la turbine est considérablement plus élevée que la température de l'air comprimé admis dans la chambre de combustion. Une partie de la chaleur des gaz d'échappement peut ainsi être avantageusement récupérée pour le préchauffage de l'air de combustion. Le rendement du générateur à turbine, de faible valeur dans le cas du cycle de BRAYTON réel, en est ainsi amélioré. Le régénérateur est un échangeur thermique intercalé entre le compresseur et la chambre de combustion. En traversant le régénérateur, les gaz d'échappement chauffent l'air comprimé en écoulement vers la chambre de combustion, moins d'énergie issue de la combustion du carburant est donc requise et moins de combustible se révèle nécessaire. Voir le schéma de la figure 9.

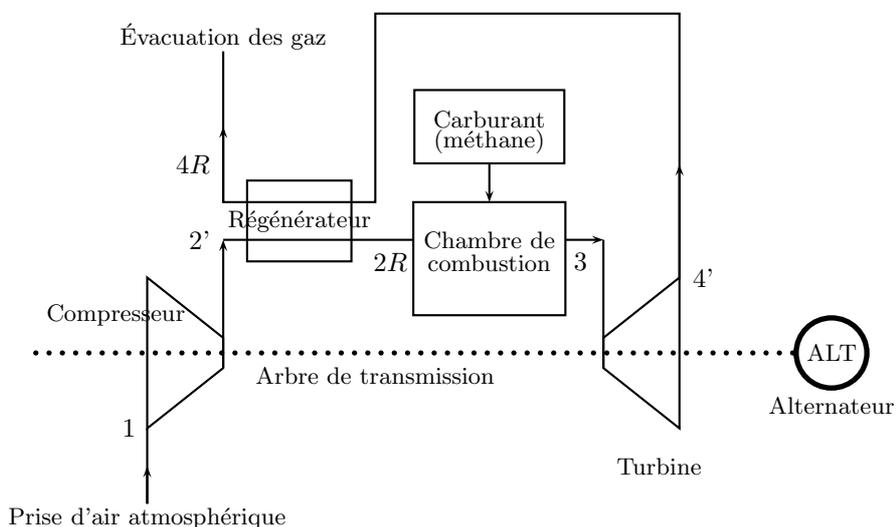


FIGURE 9 – Générateur à turbine à gaz avec régénérateur

Les travaux et la chaleur $q_{2/3}$ échangés restent les mêmes que dans le cas précédent sans régénération, seul l'apport de chaleur que doit fournir la combustion est modifié. Le régénérateur fonctionne de manière isobare. Le coefficient d'efficacité ε est défini comme le rapport entre le transfert thermique reçu par le gaz et celui que l'on pourrait recueillir au maximum :

$$\varepsilon = \frac{h_{2R} - h_{2'}}{h_{4'} - h_{2'}} = 0,95$$

Le cycle décrit par le fluide est donné sur le schéma de la figure 10.

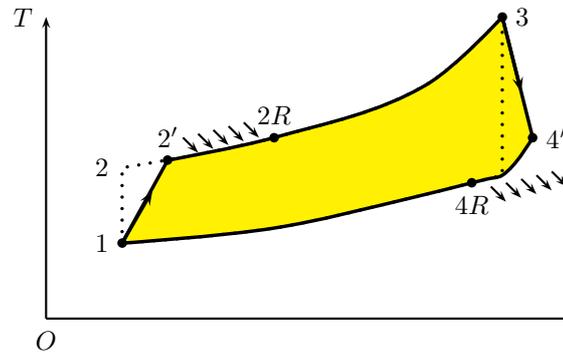


FIGURE 10 – Cycle réel de BRAYTON avec régénération

21. Préciser la valeur numérique de la température de sortie du régénérateur T_{2R} .
22. Calculer le transfert thermique massique $q_{2'2R}$ reçu par le gaz en sortie de l'échangeur.
23. Conclure sur la valeur du rendement η_R du cycle de BRAYTON réel avec régénération.

C. Cogénération

Le générateur à turbine fournit de la puissance électrique mais il rejette également des gaz de combustion très chauds. Cette puissance thermique sert à réchauffer un fluide pour le chauffage de locaux. Un échangeur thermique, dispositif dans lequel le gaz est rejeté et l'eau domestique échangent de l'énergie thermique sans se mélanger, est placé en sortie de la turbine. \mathcal{D}_m est le débit massique du fluide en régime permanent, \mathcal{P}_{th} et \mathcal{P}_u les puissances respectivement thermique et utile qu'il échange avec le milieu extérieur. Voir le schéma de la figure 11.

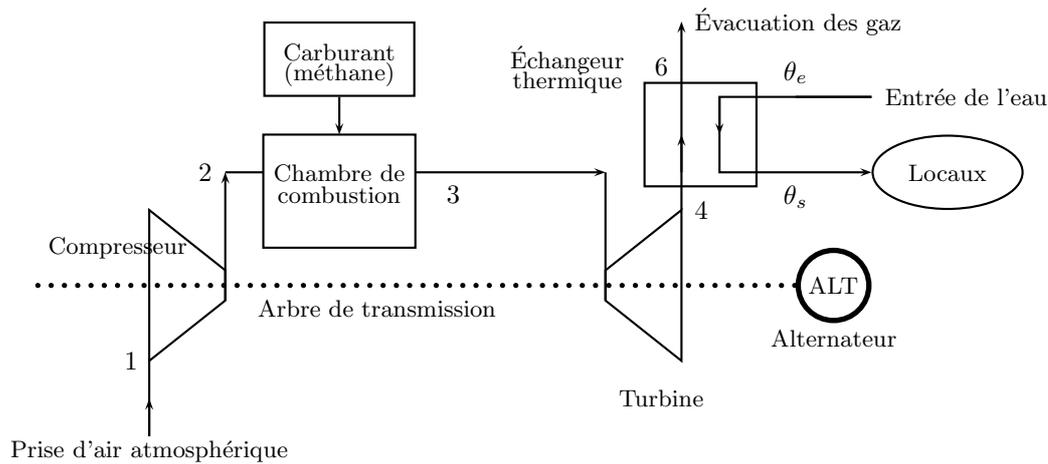


FIGURE 11 – Générateur à turbine à gaz et cogénération

24. Montrer que $\mathcal{D}_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u$.

L'échangeur thermique de cogénération est parfaitement calorifugé, il fonctionne de manière isobare et ne reçoit aucune puissance mécanique autre que la puissance des forces de pression. Une vanne de régulation permet d'adapter le débit massique d_m de l'eau aux besoins de son réchauffement. Le gaz d'échappement, de débit massique \mathcal{D}_m , est évacué (point 4) par la turbine à une température $\theta_4 = 400^\circ\text{C}$. Il sort de la cheminée (point 6) à une température de l'ordre de $\theta_6 = 150^\circ\text{C}$. Conjointement, l'eau entre dans l'échangeur thermique à la température $\theta_e = 5^\circ\text{C}$ et en sort à la température $\theta_s = 60^\circ\text{C}$.

25. Calculer le rapport d_m/\mathcal{D}_m des débits des deux circuits correspondant à une telle élévation de la température de l'eau. On rappelle les valeurs de la capacité thermique massique du gaz d'échappement $c_p = 1\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et celle de l'eau $c_e = 4,18\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.