

Devoir libre de Sciences Physiques n°4 du 02-12-2024

— Solutions —

Problème n° 1 – Couleurs par diffraction

Centrale PC 2007

A. Généralités

1. On peut considérer que la direction de la lumière diffractée est également contenue dans le plan Oyz car $L \gg e$. Il n'y a pas d'effet notable de la diffraction, on peut considérer qu'on reste dans le cadre de l'optique géométrique du point de vue de la dimension sur Ox .

2. Les deux rayons étant strictement homologues, ils subissent le même phénomène. Ce qui diffère est uniquement la différence de marche qui apparaît aussi bien avant (sur un rayon lumineux) qu'après (sur l'autre rayon). De ce fait, on fera la différence entre les deux chemins supplémentaires avant et après le réseau. Le résultat est

$$\delta = a(\sin \theta - \sin i), \text{ la phase recherchée est donc : } \varphi = \frac{2\pi a(\sin \theta - \sin i)}{\lambda}.$$

3. La représentation de l'intensité nous fait voir que lorsque N devient grand, il n'y a de la lumière que dans les maxima qui s'obtiennent pour $\varphi = p2\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Cette condition se traduit par : $\sin \theta = \sin i + p\frac{\lambda}{a}$ et ceci à condition que l'angle θ existe à savoir pour $|\sin \theta| \leq 1$. C'est la loi de BRAGG.

4. Pour le réseau par réflexion, on a exactement la même situation. Mais il faut faire attention au fait que sur le schéma, l'orientation de l'angle θ' n'est pas la même que celle de i et n'est pas la même que celles des angles θ et i des questions précédentes. L'orientation des angles n'était pas indispensable dans le problème étudié. À cause de l'orientation de l'angle θ' , la différence de marche est $\delta' = a(\sin \theta' + \sin i)$. La phase est par conséquent :

$$\varphi' = \frac{2\pi a(\sin \theta' + \sin i)}{\lambda}.$$

5. Le dispositif doit utiliser avec profit deux lentilles convergentes et leurs foyers. Pour ménager une observation dans des conditions convenables, on utilisera une lame semi-réfléchissante. Voir la figure 1.

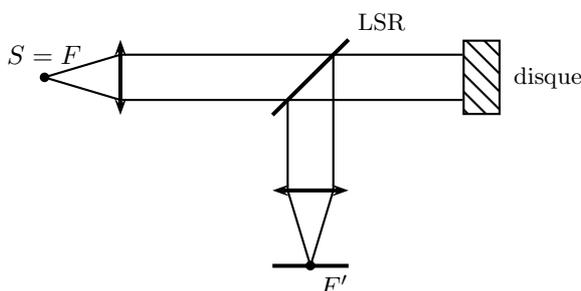


FIGURE 1 – Observation du compact disque

6. On a $i = 0$, la condition d'obtention de lumière est alors $\sin \theta' = p\frac{\lambda}{a}$. Le spectre visible est constitué des longueurs d'ondes $\lambda \in [0, 4 \mu\text{m}; 0, 8 \mu\text{m}]$. Avec la valeur $a = 1,6 \mu\text{m}$, on a pour le bleu ($0,4 \mu\text{m}$), la formule $\sin \theta' = \frac{p}{4}$. On raisonnera pour simplifier avec $\theta' > 0$, puisqu'il y a symétrie pour les valeurs de $\theta' < 0$ du fait de l'incidence normale $i = 0$. Il y a 5 ordres possibles pour $p \in [0; 1; 2; 3; 4]$, les angles correspondants sont $0; 14,5; 30; 48,6; 90^\circ$. Pour le rouge à l'autre extrémité du spectre, on a la formule $\sin \theta' = \frac{p}{2}$. Pour cette couleur, les ordres sont uniquement $p \in [0; 1; 2]$ avec les angles $0; 30; 90^\circ$. On voit très clairement que les ordres se mélangent et cela dès l'ordre 2 puisque pour $\theta' = 30^\circ$, l'ordre 1 pour le rouge se mélange à l'ordre 2 pour le bleu.

7. On ne peut pas voir son propre reflet dans un disque compact comme dans un miroir car le miroir plan est très rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'objet. Ici, un même point possède plusieurs images dans des directions différentes correspondant aux ordres existant et en plus la direction d'une image dépend de la longueur d'onde. Toutefois, on doit moduler la réponse car dans l'ordre 0, on est dans la situation de l'optique géométrique. Les couleurs sont-elles modifiées? Non, puisque pour $\theta' = 0$, on aura l'ordre $p = 0$ pour toutes les longueurs d'onde. Dans l'ordre 0, toutes les couleurs seront respectées. Mais en $\theta' = 14,5^\circ$, cela ne sera pas le cas comme on vient de le voir. La réponse appropriée serait alors : on peut apercevoir son reflet dans un CD à condition de ne pas se laisser distraire par la diffraction qui provoque les effets de couleurs que l'on connaît tous. L'énergie totale disponible n'est pas utilisée pour une seule image comme dans le cas du miroir plan mais pour l'ensemble des ordres visibles, le reflet sera nettement moins lumineux dans un CD que dans un miroir plan.

B. Couleurs du paon

8. On voit rapidement que $\varphi_y = 0$ par le simple tracé des rayons translétés selon Oy . On a déjà vu que le franchissement d'un dioptre plan n'introduisait pas de différence de marche. Si l'on prend deux rayons parallèles d'incidence i arrivant sur le dioptre séparés par une distance h selon Oy , on voit que le rayon supérieur parcourt le chemin optique $h \sin i$ en plus par rapport au rayon inférieur pour arriver sur le dioptre. Après le dioptre, c'est le contraire, c'est le rayon inférieur qui parcourt plus de chemin optique : $nh \sin r$ puisque le milieu est d'indice n . La différence entre ces deux chemins est nulle puisque les lois de DESCARTES donnent : $\sin i = n \sin r$. Il ne reste plus qu'à évaluer les différences de chemin au niveau des réflexions sur les bâtonnets successifs, voir la figure 2. On voit que la distance en plus parcourue par un rayon plus profond d'une période a est $2a \cos r$, la différence de marche est donc $\delta = 2na \cos r$. On peut donc donner l'expression de la phase selon $\varphi_z = \frac{2\pi 2na \cos r}{\lambda}$. Or, on a $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r}$ et comme les lois de DESCARTES conduisent à $\sin i = n \sin r$, on peut conclure sur l'expression : $\varphi_z = \frac{2\pi 2a \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\lambda}$.

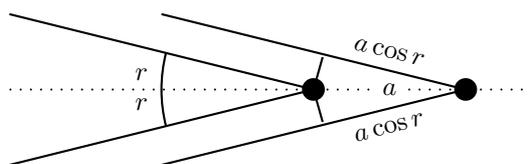


FIGURE 2 – Calcul de la différence de marche

9. On peut affirmer que la lumière n'est présente que dans les ordres entiers. Par conséquent, on a $\varphi_z = p2\pi$ et donc $\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{p\lambda}{2a}$. On peut en déduire que les angles sont donnés par : $\sin i = \sqrt{n^2 - \frac{p^2 \lambda^2}{4a^2}}$ à condition que $n > \frac{p\lambda}{2a}$ et que $|\sin i| \leq 1$.

10. La condition exprimée avant revient à écrire que $a > \frac{p\lambda}{2n}$. La valeur entière non nulle minimale est $p = 1$ et la longueur d'onde la plus grande est $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$ dans le visible (rouge), on en déduit que : $a_{\text{min}} = 0,27 \mu\text{m}$.

11. En incidence normale $i = 0$, on a $r = 0$ et donc $\varphi_z = \frac{2\pi 2na}{\lambda}$. L'ordre est alors $p = \frac{2na}{\lambda} = \frac{3a}{\lambda}$ en tenant compte de la valeur de l'indice de réfraction. On trouve au centre $p = \frac{0,48}{\lambda}$ où on exprime la longueur d'onde en μm . La longueur d'onde qui envoie un maximum de lumière est uniquement $\lambda = 0,48 \mu\text{m}$ pour l'ordre $p = 1$ puisqu'aucune autre longueur d'onde du visible ne permet d'avoir un ordre entier. La couleur correspondante est donc **bleu**. Pour la tache ovale, la formule devient $p = \frac{0,51}{\lambda}$ avec donc $\lambda = 0,51 \mu\text{m}$, c'est un peu plus vert que la précédente couleur et cohérent avec la couleur **turquoise** indiquée. Enfin, autour on a $p = \frac{0,63}{\lambda}$ et par conséquent $\lambda = 0,63 \mu\text{m}$, c'est maintenant **rouge**.

Problème n° 2 – Générateur à turbine et cogénération

E3A PSI 2011

A. Cycle de Carnot

Diagramme de Watt

1. Pour une isotherme, on a $PV = \text{Cte}$ que l'on différentie selon $VdP + PdV = 0$. La pente de la tangente à la courbe est donnée par $\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$. Pour une adiabatique réversible, le gaz parfait obéit à la loi de LAPLACE $PV^\gamma = \text{Cte}'$. On différentie à nouveau $\gamma PV^{\gamma-1}dV + V^\gamma dP = 0$. La pente de la tangente est donc $\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}$. Comme $\gamma > 1$, la pente de l'adiabatique est plus élevée en valeur absolue. La courbe est donc plus rapidement décroissante.

2. La représentation du cycle moteur de CARNOT est réalisée sur le schéma de la figure 3. Le cycle doit être parcouru dans le **sens des aiguilles d'une montre** pour être moteur. En effet, $\delta W = -PdV$ représente le travail transféré par l'aire sous la courbe. Il faut que dans les phases de détente $dV > 0$ le travail (négatif) corresponde à une aire plus grande que celui des phases de compression où $dV < 0$ comptant alors un travail positif. En conclusion, on fera observer que le travail est mesuré par l'aire du cycle. Comme la température T_1 est supérieure à T_2 , l'isotherme T_1 correspondante se trouve forcément située au dessus de l'isotherme à T_2 .

3. Le rendement est le rapport du transfert énergétique utile sur le transfert énergétique coûteux. Ici, compte-tenu du signe négatif du travail qui est le but recherché pour un moteur, on a $\eta = -\frac{W}{Q_c}$ où Q_c est le transfert thermique réalisé avec la source chaude. Ici, c'est la source qui assure l'isotherme à la température T_1 . On a donc

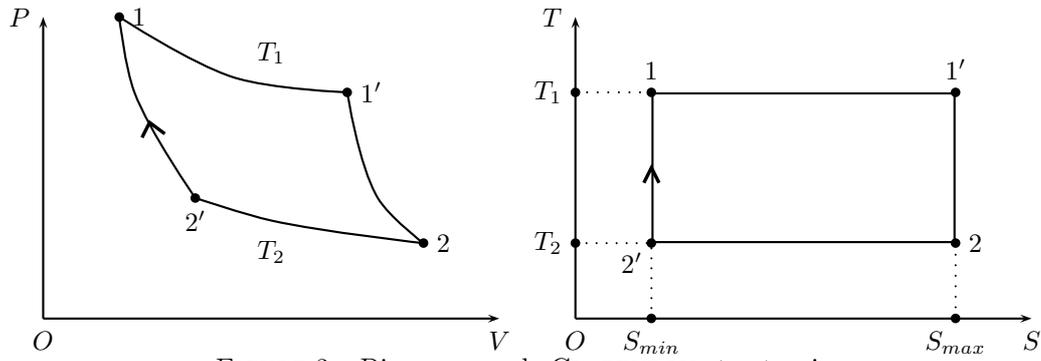


FIGURE 3 – Diagrammes de CLAPEYRON et entropique

$Q_c = Q_1 = Q_{11'}$. Dans une machine cyclique, la variation d'énergie interne sur un cycle (ou plusieurs cycles) est nulle : $\Delta U_{cy} = W + Q_1 + Q_2 = 0$. De la même façon pour la variation d'entropie, on a $\Delta S_{cy} = 0 = S_{transf} + S_{créée}$. Or, la transformation est réversible donc $S_{créée} = 0$ et comme $S_{transf} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$, on en déduit que $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$. À partir des bilans énergétique et entropique, on trouve que : $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. L'application numérique donne $\eta = 0,77$.

4. Ce rendement ne dépend pas de la nature du fluide considéré. Il ne peut être dépassée par aucun moteur réel fonctionnant entre les deux même sources de chaleur, car dans le bilan entropique on a $S_{créée} > 0$ pour une transformation réelle. Par conséquent, cela impose que $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$ et comme $\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$, on a forcément

$$\eta_{réel} < 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

B. Étude d'un générateur à turbine à gaz

Premier principe pour un système ouvert

5. On a $m_0(t + dt) = m_0(t) + \delta m_e - \delta m_s$. En régime permanent, on a $m_0(t) = m_0(t + dt)$. Par conséquent : $\delta m_e = \delta m_s$.

6. Pour le travail en entrée, on a $\delta W_e = -\int_{dV_e} P_e dV = P_e dV_e$. En utilisant le volume massique, on écrit que $dV_e = \delta m_e v_e$. Le travail des forces pressantes en entrée est alors $\delta W_e = P_e v_e \delta m_e$. Pour celui en sortie, on a $\delta W_s = -\int_0^{dV_s} P_s dV$. Le calcul est identique au précédent, on arrive à $\delta W_s = -P_s v_s \delta m_s$. Comme en régime permanent, on a $\delta m_s = \delta m_e$, on peut écrire le travail massique de transvasement (ou encore lié à l'écoulement) selon la formule : $w_p = P_e v_e - P_s v_s$.

7. Le premier principe pour un système fermé est de la forme massique suivante : $\Delta e_{c,macro} + \Delta e_{pot,ext} + u_s - u_e = w_p + w_u + q$. En utilisant, la formule précédente pour le travail des forces pressantes liées à l'écoulement, en négligeant les contributions des énergies cinétiques et potentielles, on trouve que le premier principe devient : $\Delta h = w_u + q$.

Cycle de Brayton idéal

8. On utilise une identité thermodynamique pour démarrer, la plus classique $dU = TdS - PdV$. Avec la définition de l'enthalpie $H = U + PV$, on arrive à $dH = TdS + VdP$. Comme nous venons de le voir une transformation adiabatique et réversible est une isentropique et donc $dS = 0$. On a donc $dH = VdP$ dans ce cas particulier. Comme pour un gaz parfait $dH = n c_p dT$ et avec $V = \frac{nRT}{P}$, on en déduit que $c_p dT = \frac{RT}{P} dP$. On utilise la définition de γ et la loi de MAYER qui dit que $c_p - c_v = R$ pour finalement écrire que $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$. La relation précédente devient alors $\frac{\gamma}{\gamma - 1} dT = T \frac{dP}{P}$. Elle peut encore s'écrire sous la forme $(1 - \gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$. Son intégration conduit à la loi de LAPLACE $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Cte}$. Cette loi ne s'utilise que si l'on a une transformation isentropique ou une transformation adiabatique et réversible. Sur l'étape $1 \rightarrow 2$, on a $T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \lambda$. La relation est donc $T_2 = \lambda T_1 = 579 \text{ K}$ puisque le calcul donne $\lambda = 1,93$. De la même façon sur l'autre adiabatique réversible, on a $T_4 = T_3 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{1}{\lambda} T_3$. On trouve donc que $T_4 = T_1 \frac{\tau}{\lambda} = 673 \text{ K}$ car $\tau = 4,33$.

9. Le travail massique de compression w_{12} absorbé par le gaz (fourni au gaz par le compresseur) au cours de la transformation adiabatique $1 \rightarrow 2$ correspond à la variation d'enthalpie puisque la transformation est

adiabatique. On a donc $\Delta h_{12} = w_{12} = c_p(T_2 - T_1)$. Avec les relations établies avant, on peut écrire que :

$$w_{12} = c_p T_1 (\lambda - 1) = 279 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

10. Pour la chambre de combustion, il n'y a que du transfert thermique et pas de travail utile (pas d'ailettes ou de pistons). On a donc $\Delta h_{23} = q_{23} = c_p(T_3 - T_2)$. On arrive à : $q_{23} = c_p T_1 (\tau - \lambda) = 721 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

11. Le travail massique w_T récupéré par la turbine (fourni à la turbine par le gaz) au cours de la transformation 3 \rightarrow 4 correspond à la variation d'enthalpie puisque la transformation est adiabatique. On a $\Delta h_{34} = w_T = c_p(T_4 - T_3)$. On peut conclure que $w_T = c_p T_1 \frac{\tau(1-\lambda)}{\lambda} = -627 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

12. On a $-w_T = w_a + w_{12}$. On en déduit l'expression du travail reçu par l'alternateur $w_a = c_p T_1 \left[1 - \lambda + \frac{\tau(\lambda-1)}{\lambda} \right]$. On trouve $w_a = 348 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Le recherche du maximum demande le calcul de la dérivée et son annulation : $\frac{dw_a}{d\lambda} = 0 = c_p T_1 \left(-1 + \frac{\tau}{\lambda^2} \right)$. On a donc : $\lambda_{max} = \sqrt{\tau}$. On trouve numériquement $\lambda_{max} = 2,08$ à comparer à $\lambda = 1,93$. La valeur utilisée est un peu en dessous mais, elle est convenable. La machine est utilisée dans d'assez bonnes conditions par rapport au modèle idéal.

13. On trouve : $\mathcal{R} = \frac{w_c}{w_a} = 0,80$. La turbine fournit plus de travail à l'alternateur qu'au compresseur, la situation est assez satisfaisante.

14. Le rendement thermique η du générateur à turbine est le rapport du transfert énergétique utile, c'est-à-dire w_a fourni à l'alternateur, sur le transfert énergétique coûteux, c'est celui dépensé par le carburant dans la chambre de combustion. On a donc $\eta = \frac{w_a}{q_{23}}$. On trouve à l'aide des expressions de ces quantités établies avant que : $\eta = \frac{\tau}{\lambda} - 1 = 0,48$. Cette valeur est assez logiquement inférieure au rendement de CARNOT calculé au début qui était de 77%.

15. Le transfert thermique massique q_{41} reçu par le gaz au cours de la phase d'échappement est la variation d'enthalpie puisqu'il n'y a pas de transfert de travail utile. On a donc $q_{41} = \Delta h_{41} = c_p(T_1 - T_4)$. On trouve : $q_{41} = c_p T_1 \left(1 - \frac{\tau}{\lambda} \right) = -373 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Sur le plan du principe, il n'y aucune raison que cette énergie ne soit pas récupérable. Mais sa récupération aura forcément un coût en investissement pour installer des échangeurs thermiques par exemple.

Cycle de Brayton réel

16. Les enthalpies étant proportionnelles aux températures, on a $\eta_c = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2'} - T_1}$. Cette formule nous permet d'exprimer la température demandée $T_{2'} = T_1 + \frac{1}{\eta_c}(T_2 - T_1)$. On obtient $T_{2'} = T_1 \left(1 + \frac{\lambda-1}{\eta_c} \right)$ et numériquement $T_{2'} = 649 \text{ K}$. On procède de la même manière pour le rendement sur la turbine et on arrive à $T_{4'} = T_3 + \eta_T(T_4 - T_3)$. En utilisant les expressions établies avant, on arrive à $T_{4'} = T_1 \tau \left[1 + \eta_T \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]$. Cela donne : $T_{4'} = 767 \text{ K}$.

17. On a toujours $w_{12'} = c_p(T_{2'} - T_1)$. On arrive à $w_{12'} = c_p T_1 \frac{\lambda-1}{\eta_c}$. Cette expression nous fait bien comprendre la définition du rendement de la phase de compression. On trouve $w_{12'} = 349 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

18. L'énergie thermique massique de la combustion réelle est $q_{2'3} = c_p(T_3 - T_{2'})$. On trouve $q_{2'3} = c_p T_1 (\tau - (1 + \frac{1-\lambda}{\eta_c}))$. On trouve $q_{2'3} = 651 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Pour le travail fourni au niveau de la turbine, il suffit d'appliquer le rendement de la turbine réelle au calcul effectué dans le cas idéal. On a $w'_T = \eta_T w_T = c_p T_1 \tau \frac{1-\lambda}{\lambda} \eta_T$. On trouve : $w'_T = -533 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

19. Comme précédemment la répartition du travail entre la compression et l'alternateur conduit à écrire que $w'_a = -w'_T - w_{12'}$. Après calcul, on arrive à $w'_a = c_p T_1 \left[\tau \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \eta_T - \frac{\lambda-1}{\eta_c} \right]$. Ce travail est donc $w'_a = 184 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. La recherche du maximum passe par $\frac{dw'_a}{d\lambda} = c_p T_1 \left[\tau \eta_T \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\eta_c} \right] = 0$. On trouve : $\lambda'_{max} = \sqrt{\tau \eta_T \eta_c} = 1,72$. Cette valeur est naturellement plus faible que celle de λ_{max} . On constate qu'elle est plus basse que la valeur réelle de 1,93.

20. On trouve $\mathcal{R}' = \frac{w'_c}{w'_a} = 1,90$. Le rendement thermique est $\eta' = \frac{w'_a}{q_{2'3}} = 0,28$. Il est logique de trouver que $\mathcal{R}' > \mathcal{R}$ et $\eta' < \eta$. La répartition de travail généré à la turbine est maintenant telle qu'il y en a plus d'utilisé pour la compression que pour l'alternateur. Le rendement est plus faible que dans la situation idéale comme attendu.

Régénérateur

21. On a directement à partir de la définition de l'efficacité de l'échangeur thermique $T_{2R} = T_{2'} + \varepsilon(T_{4'} - T_{2'})$. On trouve $T_{2R} = 761 \text{ K}$.

22. On obtient facilement $q_{2'2R} = c_p(T_{2R} - T_{2'}) = 112 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Cela permet de calculer $q_{2R3} = 651 - 112 = 539 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

23. Le rendement du cycle de BRAYTON réel avec régénération est : $\eta_R = \frac{w_a'}{q_{2R3}} = 0,34$. On a gagné 6% par rapport à la situation sans régénération.

C. Cogénération

24. On a déjà vu que par application du premier principe pour les systèmes en écoulement permanent, on a avait $\Delta h = w_u + q$. Comme la machine est supposée fonctionner avec le même débit en entrée qu'en sortie, il suffit de multiplier le bilan massique précédent par la débit massique pour obtenir l'équation en puissance :

$$\mathcal{D}_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u.$$

25. Dans l'échangeur thermique, il n'y a ni transfert thermique avec l'extérieur (cas idéal), ni de travail utile car les parois sont rigides et fixes. On a donc $\mathcal{P}_{th} = 0$ et $\mathcal{P}_u = 0$. Il faut par contre faire attention à l'écriture du premier terme de l'équation car il y a deux flux (deux débits) à contre-courant. On a donc $\mathcal{D}_m c_p(\theta_6 - \theta_4) + d_m c_e(\theta_s - \theta_e) = 0$. Cela permet d'écrire que : $\frac{d_m}{\mathcal{D}_m} = \frac{c_p}{c_e} \frac{\theta_4 - \theta_6}{\theta_s - \theta_e}$. On trouve que les deux débits massiques sont du même ordre puisque $\frac{d_m}{\mathcal{D}_m} = 1,09$. Il ne faut pas quand même oublier qu'un kilogramme d'air représente un volume de l'ordre d'un mètre-cube alors qu'un kilogramme d'eau représente un volume mille fois plus petit à savoir un litre.