

Devoir libre de Sciences Physiques n°7 du 24-02-2025

Problème n° 1 – Lévitiation d'une sphère supraconductrice *E3A MP 2003*

Ce problème s'intéresse à un dispositif de mesure du champ de pesanteur \vec{g} basé sur la lévitation magnétique d'une sphère supraconductrice en Niobium. Cet appareil, de développement récent, permet de mesurer des variations relatives de champ extrêmement faibles, de l'ordre du milliardième.

De façon simplifiée, un matériau à l'état supraconducteur se caractérise par les propriétés suivantes :

- la conductivité devient infinie (et donc la résistance d'un élément du circuit supraconducteur est nulle) ;
- le champ magnétique est nul dans tout le volume du matériau (Effet MEISSNER)
- la densité de courant volumique y est nulle et il n'existe que des courants de surface.

Signalons au passage que le Niobium est supraconducteur pour les températures inférieures à 9,3 K.

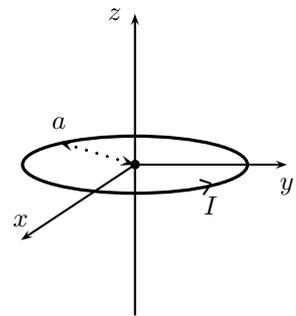
La base orthonormée directe des coordonnées cartésiennes est notée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la base locale des coordonnées cylindriques est notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

A. Champ magnétique au voisinage d'un axe de révolution

On étudie (cf. ci-contre) une spire conductrice (C) de rayon a et d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I constante.

1. En utilisant la loi de BIOT et SAVART, montrer que (C) crée en un point de son axe à la cote z un champ magnétostatique $\vec{B} = B_0(z)\vec{e}_z = f(z)I\vec{e}_z$ avec $f(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$.

2. On étudie la topographie du champ magnétique dans le plan xOz . Montrer par un argument de symétrie très précis que le champ magnétique \vec{B} en un point M de coordonnées (x, z) dans ce plan peut s'écrire : $\vec{B}(M) = B_x(x, z)\vec{e}_x + B_z(x, z)\vec{e}_z$. Exploiter également les symétries du système pour exprimer $B_x(-x, z)$ en fonction de $B_x(x, z)$ puis $B_z(-x, z)$ en fonction de $B_z(x, z)$.



On utilise désormais le système de coordonnées cylindriques. En un point quelconque M de coordonnées (r, θ, z) , on écrit le champ magnétique sous la forme : $\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$. On se restreint aux points proches de l'axe Oz .

3. Au premier ordre en r , on écrit donc $B_r(r, z) \simeq \alpha(z)rI$ et $B_z(r, z) = f(z)I$. À partir de l'équation locale traduisant la conservation du flux de \vec{B} , exprimer $\alpha(z)$ en fonction de $\frac{df}{dz}$. On pourra utiliser le formulaire mathématique donné en annexe à la fin du problème.

4. On poursuit au deuxième ordre en r le développement de $B_z(r, z)$, qu'on écrit $B_z(r, z) \simeq f(z)I + \beta(z)r^2I$. On notera qu'à cet ordre, l'expression de $B_r(r, z)$ obtenue à la question précédente est inchangée. En utilisant la forme locale du théorème d'AMPÈRE en un point n'appartenant pas à la spire, exprimer $\beta(z)$ en fonction de $\frac{d^2f}{dz^2}$. Dans toute la suite, on admettra les expressions $\alpha(z) = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}$ et $\beta(z) = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 a^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} (a^2 - 4z^2)$.

B. Force exercée sur un anneau supraconducteur

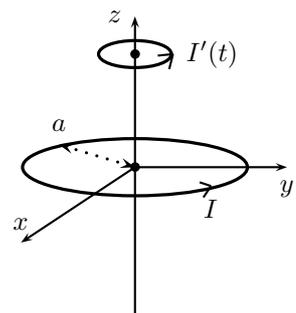
La spire (C) est maintenant parcourue par un courant $I(t)$ d'intensité variable. On place une spire conductrice circulaire (C') de rayon b très petit, d'axe Oz , à la cote z . (C') est parcourue par un courant $I'(t)$ (voir la figure ci-après). On se place dans l'approximation des régimes quasi permanents et la spire (C') est supposée immobile.

5. Calculer, en négligeant les termes d'ordre strictement supérieur à deux en b , le flux Φ du champ magnétique créé par (C) à travers (C') en fonction de b , $f(z)$ et $I(t)$.

6. On note L' le coefficient d'autoinduction de (C') et R' sa résistance électrique.

Montrer que : $L' \frac{dI'}{dt} + R'I' = -\pi b^2 f(z) \frac{dI}{dt}$.

7. On suppose dans la suite que la spire (C') est dans l'état supraconducteur. Dans ces conditions, on a donc $R' = 0$. Initialement les intensités sont nulles dans les deux spires. À partir de $t = 0$, on augmente progressivement l'intensité dans la bobine (C) jusqu'à une valeur I_0 , après quoi elle est maintenue constante. Exprimer



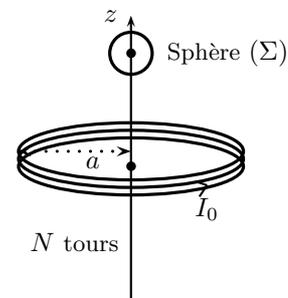
$I'(t)$ en fonction de $I(t)$, $f(z)$, b et L' . En déduire l'intensité I'_0 existant dans la spire (C') lorsque le régime permanent est atteint, ce que l'on suppose dans la suite.

8. Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, exprimer les composantes de la force élémentaire de LAPLACE $d\vec{F}$, subie par un élément $d\vec{\ell}$ de (C') en fonction de I'_0 , $d\vec{\ell}$, $B_r(r = b, z)$ et $B_z(r = b, z)$. Justifier que la résultante \vec{F} de ces forces est portée par l'axe Oz et exprimer \vec{F} en fonction de I_0 , $f(z)$, $\alpha(z)$, b et L' .

9. Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle de la forme $E_p = KB_0^2(z)$ où $B_0(z)$ est le champ défini à la première question et K une constante que l'on explicitera en fonction de b et L' .

C. Équilibre de lévitation d'une sphère supraconductrice

On étudie désormais en régime permanent l'action d'une bobine sur une sphère supraconductrice creuse (Σ), de masse $m = 5 \times 10^{-3}$ kg et de rayon $R = 1,5$ cm, voir la figure ci-contre. La bobine est constituée de N spires circulaires de rayon $a = 5$ cm, parcourue par un courant d'intensité I_0 constante. Les spires sont très resserrées, de sorte que les expressions du champ magnétique établies pour une spire restent valables. Du fait de l'effet MEISSNER, la surface de la sphère est parcourue de courants induits analogues à ceux qui existaient dans la spire (C') de la question précédente. Nous généralisons les résultats précédents, avec les hypothèses simplificatrices suivantes :



- Le changement de géométrie de la spire à la sphère se traduit par une modification du facteur K .
- L'expression de l'énergie potentielle reste valable lorsque le centre de la sphère est hors de l'axe.

Nous admettrons alors que lorsque le centre de (Σ) se trouve au point M (non nécessairement sur l'axe), où la bobine crée un champ magnétique $\vec{B}(M)$, la sphère est soumise à une force dérivant de l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{\pi R^3}{\mu_0} \|\vec{B}(M)\|^2.$$

En plus de cette force, (Σ) est soumise à son poids $m\vec{g}$. L'axe Oz correspond à la verticale ascendante et $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On étudie seulement les mouvements de translation de la sphère, repérés par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) en son centre M . Dans un premier temps, on suppose que M est sur l'axe Oz de la spire, de telle sorte que $r = 0$; par ailleurs, on suppose $z > 0$.

10. La sphère est soumise à une force $\vec{F} = F(z)\vec{e}_z$. Montrer que $F(z)$ peut se mettre sous la forme $F(z) = \gamma \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} I_0^2$ et exprimer γ en fonction de a , N , μ_0 et R .

11. Montrer que $F(z)$ passe par un maximum à une cote z_m que l'on exprimera en fonction de a . Exprimer F_m sous la forme $F_m = \frac{c\gamma}{a^7} I_0^2$, où c est un facteur dont on donnera la valeur numérique. Représenter graphiquement $F(z)$ pour $z > 0$.

12. En déduire que l'équilibre de la sphère n'est possible que si l'intensité I_0 est supérieure à une intensité I_m que l'on exprimera en fonction de γ , m , g , c et a . Calculer numériquement I_m , sachant que $c\gamma = 2,77 \times 10^{-13} \text{ N} \cdot \text{m}^7 \cdot \text{A}^{-2}$.

13. Montrer que pour $I_0 > I_m$, il existe deux positions d'équilibre que l'on notera z_1 et z_2 avec $z_1 < z_2$ (on pourra raisonner graphiquement). Montrer qu'une d'entre elles seulement est stable vis à vis d'un petit déplacement selon l'axe Oz et préciser s'il s'agit de z_1 ou de z_2 .

14. On suppose maintenant que la sphère est à l'altitude z_s de la position d'équilibre stable et qu'elle peut légèrement s'écarter de l'axe Oz . En utilisant les expressions de \vec{B} hors de l'axe et en se limitant à l'ordre 2 en r , exprimer l'énergie potentielle de la sphère $E_p(r, z_s)$ en fonction de r , μ_0 , I_0 , $f(z_s)$, $\alpha(z_s)$ et $\beta(z_s)$. Vérifier que $r = 0$ est bien une position d'équilibre.

Montrer que cet équilibre est stable vis à vis des petits déplacements latéraux si z_s vérifie $2f(z_s)\beta(z_s) + \alpha^2(z_s) > 0$.

15. Déduire de la condition précédente, l'intervalle des valeurs de z_s pour lesquelles l'équilibre de lévitation est stable vis à vis de tout déplacement (de petite ampleur). Les bornes de cet intervalle seront exprimées en fonction de a .

D. Principe des mesures de variation de \vec{g} . Sensibilité

Le système précédent est utilisé pour détecter les petites variations de l'accélération de la pesanteur \vec{g} . Un premier mode de mesure, dit à *courant constant* consiste à mesurer le déplacement de la sphère induit par une variation de \vec{g} , tous les autres paramètres restant constants.

16. On suppose que \vec{g} varie de $\delta\vec{g} = \delta g\vec{e}_z$, les autres paramètres restants fixes. La position d'équilibre varie alors de δz_s (la sphère reste sur l'axe). Calculer la sensibilité de l'appareil $\epsilon = \left| \frac{\delta z_s}{\delta g} \right|$ en fonction de z_s , a et g .

17. On choisit de se placer en $z_s = a/2$. Exprimer alors ϵ en fonction de a et g . Évaluer numériquement ϵ .

18. On cherche à déceler des variations relatives du champ de pesanteur telles que $\frac{\delta g}{g} = 10^{-9}$. Calculer

numériquement le déplacement correspondant de la sphère. Commenter le résultat en le comparant à d'autre(s) longueur(s) pertinente(s).

19. Une autre méthode possible, dite à *sphère fixe* consiste à mesurer la variation d'intensité δI_0 à appliquer à I_0 pour maintenir la sphère à une altitude constante, alors que le champ de pesanteur varie de δg . Exprimer la variation δI_0 en fonction I_0 , δg et g . Déterminer δI_0 pour $I_0 = 13$ A et $\frac{\delta g}{g} = 10^{-9}$. Commenter.

E. Mesures du déplacement de la sphère par pont de capacités

Pour déceler avec précision les déplacements de la sphère, on fait appel au dispositif de la figure 1 qui vient se rajouter au dispositif de lévitation (non représenté sur la figure).

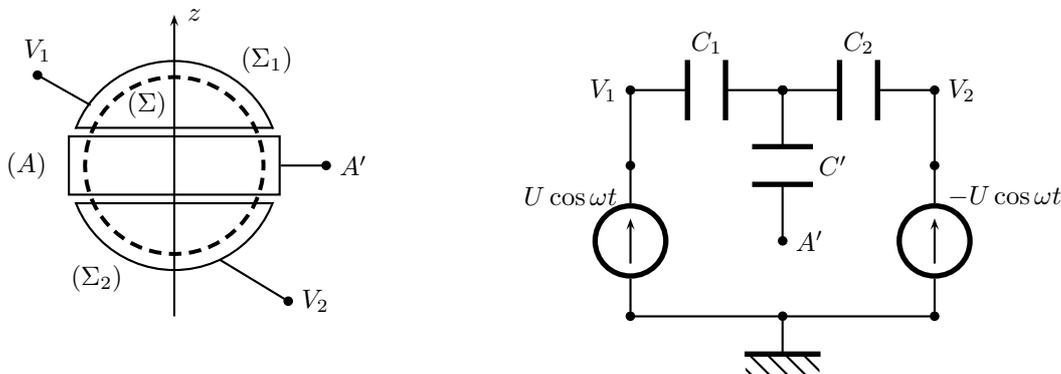


FIGURE 1 – Pont de capacités

La sphère supraconductrice (Σ) est placée entre deux coupelles métalliques identiques (Σ_1) et (Σ_2). Ces coupelles sont assimilées à des calottes sphériques de rayon intérieur $R + e$ avec $e = 1$ mm. Dans la bande équatoriale, un espace est ménagé de façon à ce que (Σ) soit entourée d'un anneau conducteur cylindrique (A), d'axe Oz , de petite hauteur h et de rayon $R + e$. L'anneau (A) et les deux coupelles sont fixes et liés au support de l'appareil (et donc à la bobine de lévitation). La sphère (Σ) est libre de se déplacer dans la cavité qui l'entoure et l'espace entre les sphères est vide. Dans la position de repos (obtenue pour une valeur de référence de g et de I_0), (Σ), (Σ_1) et (Σ_2) sont concentriques.

20. On note S l'aire de (Σ_1) qui est en vis à vis avec (Σ) et on suppose que (Σ) est en position de repos. Justifier qualitativement que la capacité C_0 entre (Σ) et (Σ_1) peut être assimilée à celle d'un condensateur plan. Exprimer C_0 en fonction de ϵ_0 , S et e en négligeant les effets de bord. Calculer numériquement C_0 si $S = 1,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

21. Lorsque la sphère subit un petit déplacement vertical δz selon Oz , la capacité entre (Σ) et (Σ_1) prend la nouvelle expression $C_1 = C_0 \left(1 + k \frac{\delta z}{e} \right)$, où k est un facteur numérique. Celle entre (Σ) et (Σ_2) devient $C_2 = C_0 \left(1 - k \frac{\delta z}{e} \right)$. Justifier qualitativement ces résultats. Dans les applications numériques, on prendra $k = 0,5$. Pourquoi k ne vaut-il pas simplement 1 ? Pourquoi peut-on considérer que la capacité C' entre (A) et (Σ) est pratiquement indépendante de la position de la sphère ?

22. D'un point de vue électrocinétique, le montage est équivalent à celui présenté sur la figure 1 à droite. Le système est utilisé en régime sinusoïdal établi de pulsation ω . La tension $V(t)$ en A' est mesurée avec un oscilloscope d'impédance d'entrée supposée infinie. La sphère (Σ_1) est portée au potentiel $V_1 = U \cos \omega t$ et (Σ_2) au potentiel $V_2 = -U \cos \omega t$. Proposer un montage électronique très simple utilisant un amplificateur opérationnel (supposé idéal) permettant en pratique d'obtenir l'opposé d'une tension donnée.

23. On suppose que la sphère se déplace de δz . Déterminer la tension $V(t)$ en fonction de δz , ω , t , k , e et U . Calculer numériquement l'amplitude crête à crête de ce signal si $\delta z = 10^{-11}$ m et $U = 1000$ V. Une telle tension est-elle mesurable ?

24. On admet qu'un élément de surface $d\vec{S}$ de conducteur chargé en surface avec une densité surfacique σ est soumis à une force $d\vec{F}_{el} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S}$, orientée vers l'extérieur du conducteur. Justifier que lorsque la sphère (Σ) et les coupelles sont concentriques, la force totale subie par la sphère est nulle. Justifier qualitativement que, lorsque la sphère se déplace de δz , la résultante des forces électrostatiques moyennes exercées sur la sphère est non nulle. Préciser son sens en fonction du signe de δz . Déterminer une ordre de grandeur de la force électrostatique moyenne résultante \vec{F}_{el} , pour un petit déplacement δz de la sphère, en fonction de δz , e , S , ϵ_0 et U . Calculer numériquement cet ordre de grandeur, en supposant que $\delta z = 10^{-11}$ m. Quelle variation relative

de g produirait la même force sur la sphère de masse m ? Commenter. À votre avis est-il préférable d'utiliser l'appareil à courant constant ou à sphère fixe?

F. Conclusion

25. Présentez deux méthodes différentes de celle analysée dans ce problème permettant de mesurer \vec{g} . Analysez succinctement ce qui limite leur performance.

26. L'appareil est surtout utilisé pour mettre en évidence des variations temporelles du champ de pesanteur. Quel(s) type(s) de phénomène(s) peuvent engendrer ces variations?

Données :

$$\text{Permittivité du vide : } \varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{Perméabilité du vide : } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Pour un champ de vecteurs $\vec{A} = A_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + A_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z \\ \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Pour un champ scalaire $f(r, \theta, z)$:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Problème n° 2 – Radiosonde

Centrale TSI 2008

Les météorologistes sondent les basses couches de l'atmosphère (troposphère et basse troposphère) pour tenter de comprendre et de modéliser les phénomènes météorologiques, en vue notamment d'améliorer les prévisions météorologiques. Le ballon-sonde est le moyen le plus simple et le plus économique d'envoyer une charge dans les différentes couches de l'atmosphère. Le ballon-sonde communique avec la station météo grâce à une radiosonde qui émet un signal électromagnétique de haute fréquence (onde UHF) de valeur $f = 100 \text{ MHz}$. Le signal reçu par un cadre récepteur est amplifié puis envoyé via un câble coaxial vers un dispositif qui effectue son analyse. Dans tout le problème, le milieu ambiant est assimilé au vide de permittivité diélectrique $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et de perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. Les ondes électromagnétiques s'y propagent à la célérité $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

A. Émission-Réception

1. Calculer la valeur de la longueur d'onde λ du signal UHF émis par la radiosonde.

Le ballon-sonde émet une onde assimilable localement à une onde plane progressive dans le sens des y croissants, harmonique de pulsation ω , de vecteur d'onde \vec{k} , polarisée rectilignement selon \vec{e}_z . On note E_0 l'amplitude du champ électrique. L'onde électromagnétique émise par le ballon-sonde est reçue par un capteur, situé à une distance $D = OO'$, ayant la forme d'un cadre ($MNPQ$) indéformable carré, de centre O' , de côté a , sur lequel sont enroulées N spires de fil conducteur. Voir la figure 2.

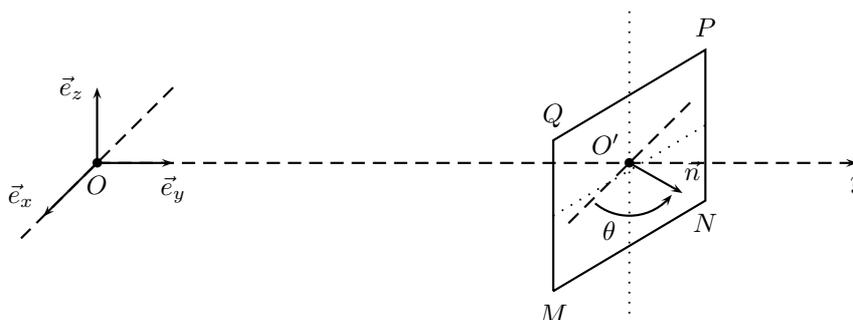


FIGURE 2 – Cadre récepteur

Au besoin le cadre est mobile autour de l'axe \vec{e}_z . on note θ l'angle (\vec{e}_x, \vec{n}) où \vec{n} est un vecteur unitaire normal

au cadre orienté selon le sens $MNPQ$. On note $\overrightarrow{OO'} = D\vec{e}_y$.

2. Donner l'expression du champ électrique \vec{E} de l'onde au voisinage du cadre en un point d'abscisse y .
3. En déduire l'expression du champ magnétique \vec{B} associé.
4. Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique W_{em} en ce point.
5. Déterminer le vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ en ce point, en fonction de c , W_{em} et d'un vecteur unitaire. Donner la moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$.
6. Justifier l'existence d'une force électromotrice (fem) induite dans le cadre ($MNPQ$).
7. Donner l'orientation du cadre permettant d'obtenir une fem $e(t)$ de valeur efficace maximale. On se placera pour toute la suite du problème dans ce cas-là.
8. Calculer le flux $\phi(t)$ du champ magnétique \vec{B} dans le cadre ($MNPQ$) en fonction de E_0 , N , a , ω , k , D et du temps t . On fera apparaître $\phi(t)$ sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales. On rappelle la formule trigonométrique :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

9. Déterminer l'expression de la fem $e(t)$.
10. Pour quelle valeur de a a-t-on une fem $e(t)$ de valeur efficace maximale? Exprimer cette valeur en fonction de la longueur d'onde λ du signal. Commenter.
11. Commenter le cas où $a = \lambda$.
12. Comment se simplifie l'expression de $e(t)$ dans le cas où $a \ll \lambda$?

Le cadre récepteur possède les caractéristiques suivantes : $a = 5$ cm, $N = 100$, il est situé à la distance $D = OO' = 20$ km du ballon-sonde. On suppose que la radiosonde du ballon émet de la même manière dans toutes les directions de l'espace avec une puissance moyenne $\langle P \rangle = 200$ mW.

13. Montrer qu'il est légitime de considérer que l'onde est localement plane au voisinage du cadre.
14. Comparer a et λ . Conclure.
15. Quelle est la valeur de la puissance surfacique moyenne reçue à la distance D ? Que représente cette valeur?
16. Déterminer la valeur de l'amplitude du champ électrique E_0 . Faire l'application numérique.
17. Déterminer la valeur efficace U_{eff} de la fem apparaissant aux bornes du cadre. Faire l'application numérique. Commenter.

B. Amplification

Le signal obtenu aux bornes du cadre récepteur puis amplifié est envoyé sur un circuit RLC , voir la figure 3.

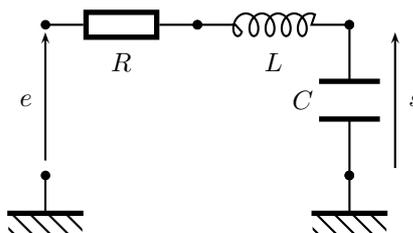


FIGURE 3 – Circuit RLC

18. Donner l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ de ce montage. On notera :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 2m = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$$

Que représentent ces grandeurs? Quelle est la nature de ce montage? On ajuste les valeurs de R , L et C afin que la fréquence f du signal d'entrée satisfasse à la condition suivante : $\omega_0 = 2\pi f$. On considère cette condition réalisée dans la suite de cette partie.

19. Quel est l'intérêt de réaliser cette condition?
20. La valeur de l'inductance est $L = 0,10$ μ H, calculer la valeur de C permettant d'obtenir la condition précédente.
21. Exprimer le gain du montage en fonction de R , L et C puis en fonction de Q .
22. Donner la valeur de R permettant d'obtenir un gain de 20 dB.

C. Liaison par câble coaxial

Le signal est alors transporté via un câble coaxial, de grande dimension selon son axe $z'z$, et constitué de deux surfaces cylindriques parfaitement conductrices, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. L'espace entre les conducteurs est un isolant de permittivité diélectrique absolue $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ et de perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. Dans ce milieu, on admet que l'on peut utiliser les résultats établis dans le vide en remplaçant la permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ par la permittivité absolue $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Le conducteur interne achemine dans le sens des z positifs un courant alternatif sinusoïdal d'intensité $\underline{I} = \underline{I}_m \exp i\omega t$ et le conducteur externe un courant exactement opposé. Entre les conducteurs, les champs électrique et magnétique s'écrivent : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(r, z) \exp i\omega t$ et $\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0(r, z) \exp i\omega t$. On donne en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

— la *divergence* du vecteur \vec{A} est :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

— le *rotationnel* du vecteur \vec{A} est :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

23. Le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est supposé radial, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$.

24. Déterminer en justifiant les étapes du calcul le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ en fonction de r et \underline{I} et d'un vecteur unitaire.

25. Déterminer $\vec{E}(M, t)$ en fonction de r , ω , ε , $\frac{d\underline{I}}{dz}$ et d'un vecteur unitaire.

26. Montrer que $\underline{I}_m(z)$ obéit à une équation différentielle dont une solution est $\underline{I}_m = I_0 \exp -ikz$ où I_0 est une constante et k une fonction de ω . Déterminer $k(\omega)$. Commenter la forme de la solution \underline{I} correspondante.

27. Montrer qu'il existe une onde électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dans l'espace entre les conducteurs. Cette onde est-elle plane? On précisera l'expression de la vitesse de phase v_φ en fonction de la célérité c de la lumière dans le vide et de ε_r .

28. On donne $\varepsilon_r = 3$. La fréquence du signal est de l'ordre de 100 MHz et la longueur du câble de l'ordre de la centaine de mètres. Peut-on se placer dans le cadre de l'approximations des régimes quasi-stationnaires? Justifier.

29. Donner l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de POYNTING.

30. Déterminer la puissance électromagnétique moyenne $\langle P \rangle$ transportée à travers une section droite $z = \text{Cte}$ de l'isolant.