

Devoir libre de Sciences Physiques n°7 du 24-02-2025

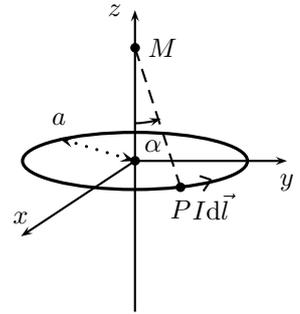
— Solutions —

Problème n° 1 – Lévitiation d'une sphère supraconductrice E3A MP 2003

A. Champ magnétique au voisinage d'un axe de révolution

1. La loi de BIOT et SAVART est $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge P\vec{M}}{PM^3}$. Par symétrie, seule la projection sur l'axe (Oz) va intervenir : $dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{PM^2}$, avec $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ et dans cette intégrale toutes les grandeurs sont constantes sauf dl . L'intégrale s'écrit alors simplement $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{PM^2} \oint dl$ donc $\vec{B} = f(z)I\vec{e}_z$ avec

$$f(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$



2. Le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant car il coupe les lignes de courants de la spire. Le champ magnétique en M appartient donc à ce plan : $\vec{B}(M) = B_x(x, z)\vec{e}_x + B_z(x, z)\vec{e}_z$. Le plan Oyz est aussi un plan d'antisymétrie. Comme B_z est parallèle à ce plan, il est invariant lorsqu'on envisage le changement de x en $-x$. B_z est paire en x . En effet le champ magnétique \vec{B} est un *pseudo-vecteur* : il se comporte de façon *opposée* par rapport aux vecteurs qui sont invariants lorsqu'ils sont parallèles à un plan de symétrie. La composante B_x est perpendiculaire au plan d'antisymétrie, elle sera donc changée en son opposée lors du passage de x en $-x$. B_x est impaire en x .

3. L'équation locale de conservation du flux est $\text{div } \vec{B} = 0$ soit ici $\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ et le calcul conduit aussitôt à $\alpha = -\frac{1}{2} \frac{df}{dz}$.

4. La forme locale du théorème d'AMPÈRE est $\vec{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ dans le vide, en l'absence de courant. À l'aide du même formulaire, cela conduit à l'équation $\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$. Le calcul conduit alors à $\beta(z) = \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dz^2}$.

B. Force exercée sur un anneau supraconducteur

5. Le flux est, par définition, $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot r dr d\theta \vec{e}_z$. Seule la composante selon z du champ magnétique va intervenir dans le calcul, et le terme en r^2 du champ va faire intervenir lors de l'intégration un ordre supérieur à 2. On ne conserve donc que le terme d'ordre le plus bas pour conclure $\phi = f(z)I\pi b^2$.

6. Le flux total correspond à ϕ ajouté au flux propre $L'I'$. La force électromotrice est donc $e = -L' \frac{dI'}{dt} - \pi b^2 f(z) \frac{dI}{dt}$. La loi d'OHM généralisée est $u = R'I' - e = 0$ puisque la spire est en court-circuit. L'équation différentielle est donc $\frac{dI'}{dt} + R'I' = -\pi b^2 f(z) \frac{dI}{dt}$.

7. Si on a $R' = 0$, alors l'équation différentielle précédente s'intègre pour obtenir : $L'I' = -\pi b^2 f(z)I + \text{Cte}$. Comme initialement les intensités sont nulles dans les deux spires, on obtient $I'_0 = -\frac{\pi b^2 f(z)}{L'} I_0$.

8. La force élémentaire de LAPLACE $d\vec{F}$, subie par un élément $d\vec{l}$ de (C') est $d\vec{F} = I' b d\theta \vec{e}_\theta \wedge (B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z)$, soit $d\vec{F} = -I' b d\theta B_r \vec{e}_z + I' b d\theta B_z \vec{e}_r$. En intégrant, les points symétriques de l'anneau vont avoir une composante de force selon \vec{e}_r dans des sens contraires. Il n'y aura donc pas, par symétrie, de résultante hors de la direction de \vec{e}_z . Intégrant alors sur θ entre 0 et 2π , il vient $\vec{F} = \frac{2\pi^2 b^4}{L'} I_0^2 f(z) \alpha(z) \vec{e}_z$.

9. Comme on a vu que $\alpha(z) = -\frac{1}{2} \frac{df}{dz}$, l'expression de \vec{F} fait intervenir le produit $f(z) \frac{df}{dz}$, qui est bien la dérivée de $f^2(z)/2$. On peut donc écrire que $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dz} \vec{e}_z$ avec $E_p = \frac{\pi^2 b^4}{2L'} I_0^2 f^2(z)$; $B_0(z) = f(z)I_0$ donc

$$K = \frac{\pi^2 b^4}{2L'}$$

C. Équilibre de lévitation d'une sphère supraconductrice

10. En dérivant l'expression proposée, on obtient $F(z) = -\frac{\pi R^3}{\mu_0} \frac{dB_z^2}{dz}$. Ici, on a $B_z = f(z)NI_0$ du fait de la présence de N spires, donc $F(z) = \frac{2\pi R^3}{\mu_0} N^2 I_0^2 f(z)\alpha(z)$. En tenant compte des expressions proposées dans l'énoncé, on trouve que $F(z) = \gamma I_0^2 \frac{z}{(a^2 + z^2)^4}$ avec $\gamma = \mu_0 \frac{3\pi}{2} R^3 a^4 N^2$.

11. À partir de l'expression précédente, on calcule $\frac{dF}{dz} = \gamma I_0^2 \frac{a^2 - 7z^2}{(a^2 + z^2)^5}$. Le maximum s'obtient pour $z_m = \frac{a}{\sqrt{7}}$.
 La force est alors $F_m = \frac{\gamma I_0^2}{a^7} \frac{73\sqrt{7}}{84}$. On trouve $c = \frac{73\sqrt{7}}{84} = 0,222$; l'allure de $F(z)$ est représentée à la figure 1.

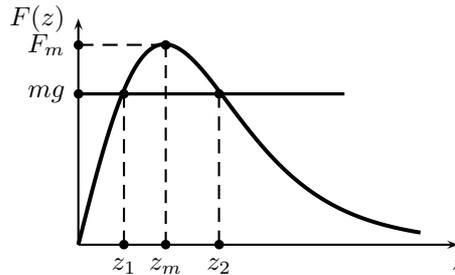


FIGURE 1 – Évolution de la force $F(z)$ en fonction de z

12. Il ne peut y avoir équilibre que si $mg \leq F_m$, donc $I_m = \sqrt{\frac{mga^7}{c\gamma}}$. On trouve $I_m = 11,8 \text{ A}$.

13. La condition d'équilibre est $F(z) = mg$. On peut tracer sur le graphique de la figure 1 une droite horizontale à l'ordonnée mg . Les points d'équilibre sont les intersections, on les note z_1 et z_2 avec $z_1 < z_2$. La position z_1 est instable car si la sphère se déplace un peu vers le bas ($z < z_1$), on peut voir que la force $F(z)$ diminue et devient inférieure au poids qui l'entraîne encore plus vers le bas. Au contraire, la position z_2 est stable car si la sphère passe à $z < z_2$, la force $F(z)$ devient supérieure au poids, la sphère va remonter à sa position initiale.

14. L'énergie potentielle est $E_p = \frac{\pi R^3}{\mu_0} (B_r^2 + B_z^2)$. Dans les termes au carré du champ magnétique, on ne conserve que les termes d'ordre 2 en r au maximum. Ainsi, $B_r^2 + B_z^2 = N^2 I_0^2 (f^2(z) + \alpha^2(z)r^2 + 2f(z)\beta(z)r^2)$; on peut donc alors écrire $\left(\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{z_s} = \frac{\pi R^3}{\mu_0} N^2 I_0^2 [\alpha^2(z_s) + 2\beta(z_s)f(z_s)]2r$. La position $r = 0$ correspond bien à un extremum par annulation de cette dérivée, donc à une position d'équilibre. Il y a stabilité si la dérivée seconde est positive, donc sous réserve de la condition $2f(z_s)\beta(z_s) + \alpha^2(z_s) > 0$.

15. Le calcul de $2f(z_s)\beta(z_s) + \alpha^2(z_s) = g(z_s)$ conduit à $g(z_s) = \frac{\mu_0^2 a^4}{16} \frac{6a^2 - 15z_s^2}{(a^2 + z_s^2)^5}$. La condition précédente est respectée si $2a^2 - 5z_s^2 > 0$, avec $z_s > 0$ donc $z_s \leq \sqrt{\frac{2}{5}}a$. L'intervalle est finalement $\frac{1}{\sqrt{7}}a \leq z_s \leq \sqrt{\frac{2}{5}}a$. On trouve numériquement $0,38a \leq z_s \leq 0,63a$.

D. Principe des mesures de variation de \vec{g} . Sensibilité

16. La condition d'équilibre est $mg = \gamma I_0^2 \frac{z_s}{(a^2 + z_s^2)^4}$. En différentiant, on trouve $\delta g = \frac{\gamma I_0^2}{m} \frac{a^2 - 7z_s^2}{(a^2 + z_s^2)^5} \delta z_s$. En utilisant à nouveau dans le calcul la position d'équilibre, on obtient la sensibilité de l'appareil $\epsilon = \frac{1}{g} \frac{(a^2 + z_s^2)z_s}{7z_s^2 - a^2}$.

17. On trouve $\epsilon = \frac{5a}{6g} = 4,25 \times 10^{-3} \text{ s}^2$.

18. L'application numérique conduit à $\delta z_s = 42 \text{ pm}$. C'est une longueur beaucoup trop petite pour espérer la mesurer car elle inférieure à la taille d'un atome qui est de l'ordre de 100 pm.

19. On différencie maintenant par rapport à I_0 la condition d'équilibre : $m\delta g = \gamma \frac{z_s}{(a^2 + z_s^2)^4} 2I_0 \delta I_0$. En

utilisant, comme avant, la condition d'équilibre dans le calcul, on trouve $\delta I_0 = I_0 \frac{\delta g}{2g} = 6,5 \text{ nA}$. On peut tout à fait envisager de mesurer une telle intensité ; par exemple, la charge d'un condensateur de capacité 1 nF avec une telle intensité s'effectuerait à un rythme de 6,5 V par seconde.

E. Mesures du déplacement de la sphère par pont de capacités

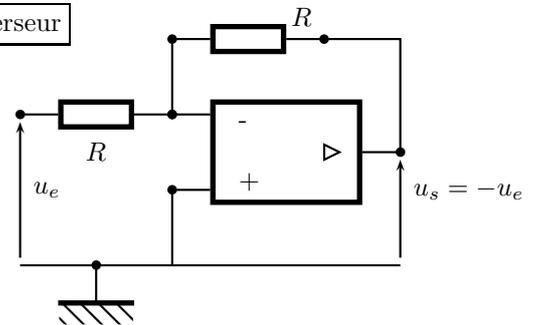
20. Comme $e \ll a$, on peut considérer que localement le rayon de courbure du condensateur n'est pas sensible.

On peut donc raisonner sur un condensateur plan de capacité $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e} = 12,4 \text{ pF}$.

21. Lors que la sphère se déplace vers le haut par exemple, la coupelle et la sphère ne sont plus concentriques. Au niveau du sommet de la sphère, l'épaisseur sera plus petite que sur les bords gauche et droit. La capacité augmente globalement mais il n'est pas possible à cause de ce fait d'avoir $k = 1$. Pour avoir $k = 1$, il faudrait que toute l'épaisseur du condensateur ait diminué de δz . Dans ce cas, on aurait $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e - \delta z} \simeq \frac{\varepsilon_0 S}{e} (1 + \frac{e}{\delta z})$. Au niveau de l'anneau, le problème est différent car le déplacement de la sphère est *longitudinal* par rapport à l'épaisseur. Comme les rayons de courbure de l'anneau et de la sphère sont grands devant la hauteur h de l'anneau et que le déplacement est faible, on peut assez logiquement dire que la capacité C' est constante.

22. Le montage demandé est un montage de type amplificateur inverseur utilisant deux résistances identiques, ainsi son gain sera -1 . Il est représenté sur la figure ci-contre.

23. Le condensateur C' est relié à l'oscilloscope d'impédance infinie : il ne passe pas de courant dans cette branche. La tension $V(t)$ est donc la même que celle du point situé entre C_1 et C_2 . Par le théorème de Millman, on a $V = \frac{jC_1 \omega V_1 + jC_2 \omega V_2}{jC_1 \omega + jC_2 \omega}$. On peut transformer cette expression grâce au fait que $V_1 = -V_2$.



Revenant aux grandeurs réelles, $V(t) = U \cos \omega t \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$. À l'ordre le plus bas, on a $C_1 + C_2 = 2C_0$ et $C_1 - C_2 = C_0 \frac{2k\delta z}{e}$. La tension est alors $V(t) = U \frac{k\delta z}{e} \cos \omega t$ dont l'amplitude crête à crête est $V_{cc} = 2U \frac{k\delta z}{e} = 10 \mu\text{V}$, faible mais mesurable.

24. La symétrie sphérique entraîne automatiquement le fait que la résultante des forces électriques est nulle. Par contre, si la sphère monte, les charges opposées des deux faces en regard sur la coupelle et la sphère vont s'attirer plus fortement pour la partie supérieure puisque la distance qui les sépare diminue. Au contraire la force électrique va diminuer au niveau des faces en regard sur la partie inférieure du dispositif. Il en résulte une force globale dirigée vers le haut. Si la sphère était un peu descendue, l'effet serait contraire et la résultante vers le bas. Pour une estimation de cette force, on écrira tout d'abord que $F_{el} \simeq \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S$. La charge surfacique est telle que si l'on appelle Q la charge du condensateur supérieur alors $Q = \sigma S = CU$. Grâce à ces formules et grâce à celle de la capacité d'un condensateur plan, on peut proposer que $F_{sup} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2 e_1^2}$ où l'épaisseur du condensateur est $e_1 = e - k\delta z$. De la même façon, on a $F_{inf} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2 e_2^2}$ avec $e_2 = e + k\delta z$. La force totale est $F_{el} = F_{sup} - F_{inf}$. Avec le développement limité lié à $\delta z \ll e$, on arrive à $F_{el}(t) = \varepsilon_0 S U^2(t) \frac{2k\delta z}{e^3}$. La force moyenne est $F_{moy} \simeq \frac{\varepsilon_0 S U^2 \delta z}{e^3} \simeq 10^{-10} \text{ N}$. Cette force est du même ordre de grandeur que les fluctuations du poids puisque $m\delta g \simeq 5 \times 10^{-11} \text{ N}$.

F. Conclusion

25. Les méthodes traditionnelles de mesure de \vec{g} sont soit des mesures où on fait chuter un objet dans un vide poussé et on mesure des durées de chute, soit des systèmes où l'on fait osciller une masse au bout d'un ressort et là aussi, on a affaire à une mesure de temps. Dans le premier cas, la difficulté est de maîtriser les conditions initiales de la chute libre et de mesurer avec précision le temps de chute. Reproduire des chutes libres à l'identique n'est pas évident. Dans l'autre cas, il faut un dispositif avec un système d'oscillateur très sensible et des mesures de temps très précises.

26. Le champ de pesanteur peut évoluer parce qu'il y a des glissements de terrain dans le sous-sol qui ne se voient pas en surface, on peut sans doute étudier les zones de subduction des différentes plaques constituant la

croûte terrestre. On peut aussi grâce à une mesure de \vec{g} étudier le remplissage d'une cavité dans le sous-sol par de la lave, ce qui pourrait être un indicateur d'irruption prochaine du volcan situé à proximité.

Problème n° 2 – Radiosonde

Centrale TSI 2008

A. Émission-Réception

1. On a : $\lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ m}$.

2. Le champ électrique \vec{E} de l'onde au voisinage du cadre peut être considéré comme celui d'une onde plane se propageant dans le sens y croissant et comme sa polarisation est rectiligne selon \vec{e}_z , on a alors :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \exp i(\omega t - ky)$$

3. \vec{E} et \vec{B} sont liés par l'équation de MAXWELL-FARADAY : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On peut utiliser le rotationnel en cartésien ou encore écrire que $\text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ pour aboutir. Mais, on doit savoir qu'en situation d'onde plan progressive, l'équation précédente conduit à $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E})$. Avec $\frac{\omega}{k} = c$ et $\vec{k} = k \vec{e}_y$, on arrive aisément à :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{e}_x \exp i(\omega t - ky)$$

4. La densité volumique d'énergie électromagnétique est définie par $W_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$. Pour déterminer son expression, il faut passer en réels et on remarque que la contribution électrique est équivalente à la contribution magnétique. On trouve : $W_{em} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)$.

5. Par définition, $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$. Là aussi, il est indispensable d'effectuer les calculs en réels. On trouve $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - ky) \vec{e}_y = W_{em} c \vec{e}_y$ car on a la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Le calcul de sa moyenne est immédiat :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c \vec{e}_y$$

6. L'onde provoque dans le cadre (MNPQ) un flux du champ magnétique \vec{B} variable puisque que le champ magnétique est variable avec le temps. Avec la loi intégrale de FARADAY $e = -\frac{d\phi}{dt}$, on comprend qu'il va y avoir une force électromotrice induite dans le cadre et éventuellement un courant induit si le circuit est fermé sur une impédance non infinie.

7. L'effet d'induction sera d'autant plus notable que le flux à travers le circuit sera maximal. Il est donc souhaitable, entre autre... , d'orienter le cadre de telle sorte que sa normale soit dirigée selon l'axe du champ magnétique. Or, ce dernier est selon \vec{e}_x , il faut donc que $\vec{n}_{cadre} = \vec{e}_x$. Cela correspond sur le schéma à $\theta = 0$. Le cadre se trouve dans le plan $O'yz$.

8. Il y a N spires, le flux sera donc N fois celui trouvé à travers une spire à condition de supposer que l'empilement des spires de remet pas en cause les abscisses du cadre (épaisseur faible). On a donc $\phi = N \iint \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - ky) dydz$. On intègre sur z de $-a/2$ à $a/2$ alors que y va de $D - \frac{a}{2}$ à $D + \frac{a}{2}$. Après intégration, utilisation de la formule donnée dans l'énoncé et de $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$, on arrive finalement à : $\phi(t) = \frac{2NE_0a}{\omega} \sin \frac{ka}{2} \cos(\omega t - kD)$.

9. La fem est donnée par : $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = 2NE_0a \sin \frac{ka}{2} \sin(\omega t - kD)$.

10. La valeur efficace maximale de la fem est $U_{eff} = \sqrt{2}NE_0a |\sin \frac{ka}{2}|$. Pour la rendre maximale, il faut que $\frac{ka}{2} = (2p + 1)\frac{\pi}{2}$ où $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la longueur d'onde, cette condition a plus de sens physique :

$a = (2p + 1)\frac{\lambda}{2}$. Si la longueur a est mal choisie, le champ magnétique qui change de sens tous les $\lambda/2$ va contribuer au flux dans un sens et dans l'autre, il y a aura un effet de compensation qui nuira à l'obtention d'une fem. Notons toutefois qu'avec une longueur d'onde de 3 m, la taille du cadre de réception commencerait à être assez respectable, voire ennuyeuse du point de vue de l'encombrement.

11. Dans le cas où $a = \lambda$, on aura $\phi(t) = 0 \forall t$ puisque $\frac{ka}{2} = \pi$. Cette situation n'a aucun intérêt, il faut l'éviter à tout prix. Dans ce cas le flux du champ magnétique pour une moitié du cadre est exactement compensé par celui de l'autre moitié.

12. Si on a $a \ll \lambda$, on pourra considérer le champ magnétique comme uniforme sur le cadre. On peut sur le plan calculatoire effectuer un développement limité $\sin \frac{ka}{2} \simeq \frac{ka}{2}$ et on arrive à l'expression suivante de la fem :

$$e(t) = N \frac{2\pi}{\lambda} a^2 E_0 \sin(\omega t - kD)$$

13. L'onde est localement plane au voisinage du cadre car la distance du cadre à la source est très grande devant à la fois la longueur d'onde $D \gg \lambda$ et la taille du cadre : $D \gg a$.

14. On constate que $a \ll \lambda$. On peut donc considérer que le champ magnétique est uniforme sur le cadre

lors du calcul de la fem induite.

15. Puisqu'il y a isotropie, la puissance se répartit sur l'ensemble de la surface de rayon D et donc de valeur $4\pi D^2$. On a donc $\langle p_s \rangle = \frac{\langle P \rangle}{4\pi D^2} = 4 \times 10^{-11} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

16. Cette puissance surfacique moyenne correspond au vecteur de POYNTING de l'onde. On peut donc écrire d'après les calculs effectués avant que : $\langle p_s \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c$. Cela permet de déterminer l'expression de l'amplitude du champ électrique : $E_0 = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{\langle P \rangle}{2\pi \varepsilon_0 c}}$. On trouve numériquement que $E_0 = 1,7 \times 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

17. La tension efficace correspondant à la fem dans le cadre est donc : $U_{eff} = N \frac{\pi}{\lambda} a^2 E_0 \sqrt{2}$ ce qui donne $U_{eff} = 6,4 \times 10^{-5} \text{ V}$. Cette tension est très faible, il faut un dispositif électronique assez sophistiqué pour pouvoir en effectuer la mesure correctement. On comprend d'ailleurs pourquoi dans la suite, on envisage une amplification.

B. Amplification

18. On effectue un simple diviseur de tension pour obtenir la relation entre s et e : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega}$. ω_0 représente la pulsation propre de l'oscillateur constitué par le circuit LC , Q représente le facteur de qualité et m le coefficient d'amortissement. En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient la fonction de transfert suivante : $\underline{H}(ju) = \frac{1}{(1-u^2)+j\frac{u}{Q}}$. On constate que lorsque u tend vers l'infini, $\underline{H}(ju)$ tend vers 0 et lorsque $u = 0$, on a $\underline{H}(ju) = 1$. On a donc un filtre passe-bas du second ordre.

19. Le fait de réaliser $\omega = \omega_0$ permet de profiter d'une **résonance éventuelle** si le facteur de qualité est suffisamment grand. D'autre part, plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance se produit pour une pulsation proche de ω_0 .

20. On trouve : $C = 25 \text{ pF}$.

21. Toujours pour $\omega = \omega_0$, on obtient $\underline{H}(j\omega_0) = \frac{1}{jRC\omega_0}$. Avec les expressions de ω_0 et du facteur de qualité fournies, on trouve : $|\underline{H}(j\omega_0)| = Q$.

22. Le gain en décibel est défini par $G_{dB} = 20 \log H$. Ce gain vaut 20 dB lorsque $Q = 10$. On en déduit que : $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = 6,3 \Omega$.

C. Liaison par câble coaxial

23. Le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est supposé de la forme $\vec{E} = E_0(r, z) \exp i\omega t \vec{e}_r$. On peut utiliser l'équation locale de MAXWELL-FARADAY $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En utilisant l'expression du rotationnel fournie dans l'énoncé et en utilisant la multiplication par $i\omega$ pour traduire une dérivation temporelle, on arrive à la relation : $\vec{B} = \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_0(r, z)}{\partial z} \exp i\omega t \vec{e}_\theta$. Le vecteur champ magnétique est donc orthoradial.

24. On utilise l'équation de MAXWELL-AMPÈRE $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Sous forme intégrale cette équation devient le théorème d'AMPÈRE généralisé : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enlacé} + \mu_0 \varepsilon i\omega \iint_{S/C} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ dans notre cas précis. Comme \vec{B} est orthoradial, on va choisir un contour d'AMPÈRE C circulaire de rayon r . La surface associée est donc le disque d'aire πr^2 et surtout de normale \vec{e}_z . Par conséquent $\iint_{S/C} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ puisque l'on réalise le produit scalaire $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = 0$ du fait du caractère radiale de \vec{E} . Finalement le théorème d'AMPÈRE est assez simple à pratiquer et on trouve $B_\theta 2\pi r = \mu_0 I$. On conclut par : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

25. On applique à nouveau l'équation de MAXWELL-AMPÈRE mais au niveau local, dans l'isolant. Dans celui-ci, il n'y a pas de densité de courant \vec{j} , elle se résume à $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon i\omega \vec{E}$ après dérivation temporelle. À l'aide du formulaire, on trouve $\vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \vec{e}_r = -\frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{dI}{dz} \vec{e}_r$. En comparant avec l'expression précédente, on aboutit à : $\vec{E} = \frac{i}{2\pi r \varepsilon \omega} \frac{dI}{dz} \vec{e}_r$.

26. Nous avons précédemment que $\vec{B} = \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_0(r, z)}{\partial z} \exp i\omega t \vec{e}_\theta$. En dérivant l'expression du champ électrique précédente, on arrive à $\frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{i}{2\pi r \varepsilon \omega} \frac{d^2 I}{dz^2}$. On injecte dans l'expression précédente et on peut conclure en reprenant l'expression de \vec{B} issue du théorème d'AMPÈRE. On trouve : $\frac{d^2 I_m}{dz^2} + \mu_0 \varepsilon \omega^2 I_m = 0$. La solution de cette équation différentielle est de la forme $I_m = A \exp -ikz + B \exp ikz$ avec $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r}$. L'expression du courant en fonction du temps est de la forme $I = I_m \exp i\omega t$, il ne faut retenir que la solution $A \exp -ikz$ ($B = 0$) pour s'assurer d'une onde de courant qui progresse dans le sens z croissant. En appelant I_0 l'amplitude du courant, il vient finalement : $I = I_0 \exp i(\omega t - kz)$. Cette onde de courant est de la forme onde plane progressive sinusoïdale.

27. On reprend les expressions précédentes des champs en particulierisant à l'aide de l'expression du courant

que l'on vient de trouver : $\vec{E} = \frac{I_0}{2\pi r} \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\epsilon_r}} \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_r$ où l'on a utilisé $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$. On fait de même pour le champ magnétique : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_\theta$. La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$. La structure n'est pas celle d'une onde plane progressive sinusoïdale qui se propage à la vitesse v_φ car l'amplitude des champs dépend de $1/r$.

28. La longueur d'onde dans l'isolant du câble est $\lambda_c = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r}}$ où λ est la longueur d'onde dans le vide calculée au début du sujet. On trouve : $\lambda_c = 1,7 \text{ m}$. On ne peut pas se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires car cela reviendrait à négliger la durée de propagation de l'onde dans le câble. Or, la longueur du câble de quelques centaines de mètres est très grande devant la longueur d'onde. Cela reviendrait d'ailleurs à considérer le courant comme uniforme le long du câble à un instant donné, c'est bien sûr impossible.

29. On reprend la définition du vecteur de POYNTING en réels et on remplace la fonction $\cos^2(\omega t - kz)$ par sa moyenne à savoir $1/2$. Après calcul, on trouve : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2} \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\epsilon_r}} \vec{e}_z$.

30. La puissance électromagnétique moyenne $\langle P \rangle$ transportée à travers une section droite correspond au flux du vecteur de POYNTING : $\langle P \rangle = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$ où $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_z$. On obtient donc $\langle P \rangle =$

$$\frac{1}{2} \frac{I_0^2}{4\pi^2} \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\epsilon_r}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta. \text{ En utilisant à nouveau } \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1, \text{ on arrive à l'expression : } \langle P \rangle = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2.$$

Le coefficient présent en facteur de I_0^2 s'identifie à une résistance en ohms. On peut d'ailleurs faire remarquer que la grandeur $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ est une résistance appelée impédance caractéristique du vide et valant $Z_{\text{vide}} = 377 \Omega$.