

## Devoir libre de Sciences Physiques n°8 du 17-03-2025

### Problème n° 1 – Imagerie par résonance magnétique

*X MP 2011*

L'imagerie par résonance magnétique (ou IRM) est une technique utilisée par les radiologues pour visualiser les tissus mous du corps humain. Elle permet en particulier de localiser précisément les cancers. Cette technique utilise un champ magnétique intense pour orienter les moments magnétiques des protons des molécules d'eau, et un champ magnétique oscillant pour en perturber l'orientation. Ce problème expose le principe physique de l'IRM, et certains aspects de sa mise en œuvre pratique.

*Données numériques :*

Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Conductivité du cuivre :	$\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Moment magnétique du proton :	$\mu = 1,4 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
Constante de BOLTZMANN :	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de PLANCK réduite :	$\hbar = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Charge élémentaire :	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse du proton :	$m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

*Formulaire :*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$$

#### A. Production de champs magnétiques intenses et homogènes

On utilise un solénoïde d'axe  $Oz$ , parcouru par un courant continu, pour produire un champ magnétique. On choisit un système de coordonnées cylindro-polaires d'axe  $Oz$ , dont on note  $(r, \theta, z)$  les coordonnées et  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  le repère orthonormé direct.

1. On suppose que tout plan contenant l'axe  $Oz$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Quelles conditions la densité de courant  $\vec{j}(j_r, j_\theta, j_z)$  doit-elle vérifier pour cela ?

2. Quelles conditions en résultent pour le champ magnétique  $\vec{B}(B_r, B_\theta, B_z)$  ?

3. On suppose que  $j_\theta$  est uniforme à l'intérieur d'un cylindre de révolution creux de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1 < R_2$ , et de longueur  $L$  très grande devant  $R_2$ . Quelle est la particularité du champ magnétique créé par un tel solénoïde ? Donner l'expression de sa valeur  $B_0$  au centre.

4. La conductivité ohmique du matériau, notée  $\sigma$ , est supposée uniforme. Donner l'expression de la puissance dissipée dans le solénoïde par effet JOULE.

5.  $B_0$ ,  $L$  et  $R_2$  étant fixés, comment faut-il choisir  $R_1$  pour minimiser la puissance dissipée ?

6. On considère un solénoïde de cuivre de longueur  $L = 1 \text{ m}$  délivrant un champ  $B_0 = 1,3 \text{ T}$ . Calculer une borne inférieure de la puissance dissipée. Comparer à la puissance d'un radiateur électrique ordinaire.

7.  $B_0$  étant fixé, comment choisir  $R_2$  pour minimiser l'élévation de température du solénoïde due à l'effet JOULE ? Commenter.

8. On réalise la bobine en enroulant un fil électrique autour d'un cylindre de rayon  $R_1$ . Expliquer pourquoi la propriété de symétrie de la question 1. ne peut pas être exacte. Comment réaliser le bobinage en pratique pour qu'elle soit une bonne approximation ?

9. Tracer, sans calcul, l'allure de la variation du champ magnétique sur l'axe  $Oz$  lorsque  $R_2$  et  $L$  sont du même ordre de grandeur. Comment faudrait-il modifier le bobinage pour que le champ sur l'axe soit uniforme au voisinage du centre ? On se contentera d'une réponse qualitative et d'un croquis.

10. On parvient à réaliser une bobine telle que le champ sur l'axe soit quasiment uniforme dans un intervalle autour du centre de la bobine. Montrer que le champ est alors également uniforme au voisinage de l'axe.

## B. Utilisation de supraconducteurs

Pour s'affranchir de l'effet JOULE, on utilise pour les bobinages des matériaux supraconducteurs, qui ont la propriété de pouvoir transporter un courant sans dissipation au-dessous d'une température critique  $T_c$ .

11. On adopte un modèle microscopique de supraconducteur dans lequel les électrons de conduction (de charge  $-e$  et de masse  $m_e$ ), initialement au repos, sont mis en mouvement sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}$ , supposé uniforme et constant. Écrire l'équation du mouvement d'un électron.

12. On note  $n$  la densité volumique d'électrons, supposée uniforme. Dédire de la question précédente une relation simple entre  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$  et  $\vec{E}$ .

13. On suppose que la relation obtenue à la question précédente reste valable même si le champ n'est ni uniforme ni constant, et on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. En utilisant les équations de MAXWELL, montrer que le champ magnétique vérifie l'équation (1) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0} \quad (1)$$

où  $\lambda$  est une longueur dont on donnera l'expression.

14. Calculer  $\lambda$  pour une densité d'électrons de conduction  $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

15. Lorsqu'on plonge un supraconducteur dans un champ magnétique extérieur, il expulse ce champ. Cette propriété, qui porte le nom d'effet MEISSNER, est représentée sur la figure 1.

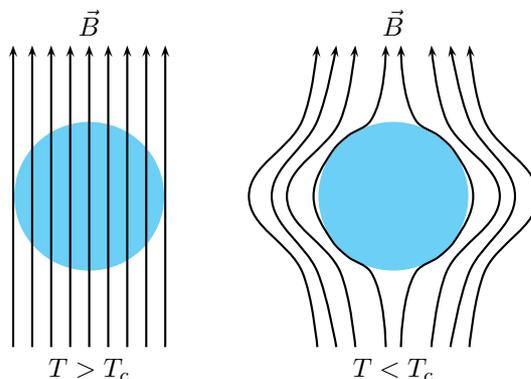


FIGURE 1 – Effet MEISSNER dans une boule supraconductrice placée dans un champ magnétique lorsqu'elle est refroidie sous la température critique  $T_c$ . Les lignes sont les lignes de champ.

Pour expliquer l'effet MEISSNER, on postule une relation plus forte que l'équation (1) :

$$\left( \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0} \quad (2)$$

On considère un supraconducteur occupant le demi-espace  $x > 0$  dans un système de coordonnées cartésiennes de repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On suppose que le champ à l'extérieur du supraconducteur ( $x < 0$ ) est uniforme et vaut  $B_0 \vec{e}_z$ , et on admet que  $\vec{B}$  ne dépend que de  $x$ . Calculer le champ magnétique pour  $x > 0$  en fonction de  $B_0$ ,  $x$  et  $\lambda$ . En quoi ce modèle explique-t-il l'effet MEISSNER ?

16. Déterminer la densité de courant  $\vec{j}(x)$  à l'intérieur du supraconducteur.

## C. Moments magnétiques et aimantation

17. Un proton de vitesse nulle possède un moment magnétique intrinsèque  $\vec{\mu}$ , dont la norme  $\mu$  est constante, mais la direction peut varier. L'imagerie par résonance magnétique utilise l'interaction des protons des atomes d'hydrogène de l'eau avec un champ magnétique. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction, notée  $U$ , d'un proton (assimilé à un dipôle magnétique) avec un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . Application numérique : on donne  $B_0 = 1,5 \text{ T}$ . Calculer les valeurs maximale et minimale de  $U$ .

18. Un échantillon étudié par IRM contient un grand nombre de protons dont les moments magnétiques pointent dans des directions différentes et aléatoires. On admet qu'à l'équilibre thermodynamique, la probabilité pour que la direction d'un moment donné  $\vec{\mu}$  soit dans l'angle solide élémentaire  $d^2\Omega$  autour d'une direction donnée vaut :

$$dp = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d^2\Omega \quad (3)$$

où  $T$  est la température absolue et  $Z = \iint \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d^2\Omega$ , l'intégrale portant sur toutes les directions spatiales. Comment s'appelle cette loi ? Dans quel contexte l'avez-vous rencontrée ? Quelle est la direction de  $\vec{\mu}$  la plus probable ?

**19.** Exprimer l'énergie potentielle  $U$  et l'angle solide élémentaire  $d^2\Omega$  dans un système de coordonnées sphériques d'axe polaire  $Oz$ .

**20.** On suppose dorénavant que  $|U|$  est très petit devant  $k_B T$ . Est-ce une bonne approximation à température ambiante avec le champ magnétique de la question **17.** ?

**21.** On appelle aimantation d'un échantillon contenant  $N$  protons la somme de leurs moments magnétiques, notée  $\vec{M}$ . Expliquer pourquoi, lorsque  $N \gg 1$ , l'aimantation vaut approximativement  $\vec{M} \simeq N \langle \vec{\mu} \rangle$ , où  $\langle \vec{\mu} \rangle$  désigne la valeur moyenne de  $\vec{\mu}$  avec la loi de probabilité (3).

**22.** Développer la loi de probabilité (3) à l'ordre 1 en  $U/(k_B T)$ . Calculer la valeur moyenne de  $\vec{\mu}$  dans cette approximation, et en déduire que l'aimantation vérifie la loi de CURIE :

$$\vec{M} = \frac{C}{T} \vec{B}_0 \quad (4)$$

où  $C$  est une constante qu'on exprimera en fonction de  $N$ ,  $\mu$  et  $k_B$ .

**23.** Rappeler l'expression du couple exercé par le champ magnétique  $\vec{B}_0$  sur le dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mu}$ .

**24.** Un proton de vitesse nulle est animé d'un mouvement de rotation propre. Ce mouvement lui confère un moment cinétique intrinsèque, nommé spin et noté  $\vec{S}$ , de norme constante  $S = \hbar/2$ , où  $\hbar$  est la constante de PLANCK réduite. On admet que les vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{\mu}$  sont proportionnels :  $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ , avec  $\gamma = \mu/S$ . Montrer que  $\vec{\mu}$  est animé d'un mouvement de précession de vitesse angulaire  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z$ , et donner l'expression de  $\omega_0$  dite pulsation de LARMOR, en fonction de  $B_0$  et  $\gamma$ . Calculer  $\omega_0$  pour  $B_0 = 1,5$  T.

**25.** Soit un proton de vitesse initiale  $\vec{v}_0$  perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ . Rappeler l'expression de la vitesse angulaire de sa trajectoire dans le champ  $\vec{B}_0$  (pulsation cyclotron), et comparer sa valeur à celle de la pulsation de LARMOR.

## D. Résonance magnétique

L'imagerie par résonance magnétique utilise d'une part un champ uniforme et constant  $\vec{B}_0$ , qu'on supposera dirigé suivant l'axe  $Oz$ , et d'autre part un champ dépendant du temps  $\vec{B}_1(t)$ , avec  $|\vec{B}_1| \ll |\vec{B}_0|$ .

**26.** On place dans le champ un échantillon contenant  $N$  protons, avec  $N \gg 1$ . On assimile chacun de ces protons à un dipôle magnétique soumis au couple exercé par le champ magnétique total  $\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$ . Écrire l'équation du mouvement de l'aimantation  $\vec{M}(t)$  sous la forme :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t)) \wedge \vec{M} \quad (5)$$

et définir le vecteur rotation  $\vec{\omega}_1(t)$  en fonction de  $\vec{B}_1(t)$ .

**27.** Le champ auxiliaire  $\vec{B}_1(t)$  est un champ tournant autour de  $\vec{B}_0$  et perpendiculaire à celui-ci. Dans un référentiel galiléen de repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , ses coordonnées sont  $(B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, 0)$ . On définit le repère  $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}_X(t), \vec{u}_Y(t), \vec{u}_Z(t))$  tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $Oz$  et coïncidant avec  $\mathcal{R}$  à la date  $t = 0$ , de telle sorte que  $\vec{B}_1(t) = B_1 \vec{u}_X(t)$ . Écrire l'équation du mouvement de  $\vec{M}$  dans  $\mathcal{R}'$ .

**28.** On suppose dans toute cette partie que l'aimantation à  $t = 0$  est la valeur d'équilibre déterminée à la question **22.**,  $\vec{M}_0 = C \vec{B}_0 / T$ . Expliquer pourquoi les composantes de l'aimantation perpendiculaires à  $Oz$  sont petites pour tout  $t > 0$ , sauf si  $\omega$  est très proche de  $\omega_0$ .

**29.** On se place à la résonance, définie par  $\omega = \omega_0$ . Décrire au moyen d'un schéma l'évolution de l'aimantation dans  $\mathcal{R}'$  puis dans  $\mathcal{R}$ .

**30.** En prenant pour  $\omega_0$  la valeur obtenue à la question **24.**, à quel domaine de fréquence appartient le champ  $\vec{B}_1(t)$  ?

**31.** On donne  $B_1 = 3 \times 10^{-5}$  T. Calculer la norme du vecteur de POYNTING d'une onde électromagnétique plane de champ magnétique  $\vec{B}_1(t)$  se propageant dans le vide.

**32.** On se place toujours à la résonance, et on applique le champ  $\vec{B}_1(t)$  uniquement entre les instants  $t = 0$  et  $t = \tau$ , où  $\tau$  est choisi de telle sorte que l'aimantation tourne d'un angle  $\pi/2$  dans  $\mathcal{R}'$  entre les instants  $t = 0$  et  $t = \tau$ . Donner l'expression de  $\tau$  et calculer sa valeur. Montrer que l'aimantation est un vecteur constant pour  $t > \tau$  dans  $\mathcal{R}'$ . Quelle est sa direction ?

**33.** En pratique, le champ  $\vec{B}_0$  n'est pas parfaitement homogène sur tout l'échantillon, et l'écart à la résonance  $\delta\omega = \omega - \omega_0$  fluctue autour de 0 d'un bout à l'autre de l'échantillon. On suppose en tout point  $|\delta\omega| \ll \omega_1$ .

Décrire qualitativement comment évolue l'aimantation de l'échantillon pour  $t \gg \tau$  dans  $\mathcal{R}'$ .

**34.** Pour pallier l'effet de ces inhomogénéités, on applique le champ  $\vec{B}_1(t)$  une deuxième fois entre les instants  $t = T_E$  et  $t = T_E + 2\tau$ , avec  $T_E \gg \tau$ , et on mesure l'aimantation à l'instant  $t = 2T_E$ . Déterminer l'orientation de l'aimantation à  $t = 2T_E$  dans  $\mathcal{R}'$  pour  $\delta\omega = 0$ , puis pour  $\delta\omega \neq 0$ . Conclure. Cette technique porte le nom d'*écho de spin*.

**35.** L'étude ci-dessus ne prend en compte que l'interaction des protons avec le champ magnétique extérieur. Dans cette modélisation, nous avons montré à la question **32.** qu'à la résonance, l'aimantation dans  $\mathcal{R}'$  est constante après l'arrêt du champ  $\vec{B}_1(t)$ . En réalité, elle n'est pas constante indéfiniment mais finit par retourner à sa valeur d'équilibre, déterminée à la question **22.**, sous l'effet de processus dits de relaxation. On donne les équations d'évolution des coordonnées  $(M_X, M_Y, M_Z)$  de l'aimantation dans  $\mathcal{R}'$  à la résonance et en l'absence de champ  $\vec{B}_1$  :

$$\begin{aligned}\frac{dM_X}{dt} &= -\frac{M_X}{T_2} \\ \frac{dM_Y}{dt} &= -\frac{M_Y}{T_2} \\ \frac{dM_Z}{dt} &= -\frac{M_Z - M_0}{T_1}\end{aligned}$$

$T_1$  et  $T_2$  sont deux constantes appelées temps de relaxation. On donne les valeurs  $T_1 = 0,9$  s et  $T_2 = 0,1$  s pour un proton appartenant à la matière grise du cerveau. Expliquer pourquoi il est légitime, avec ces valeurs, de négliger les processus de relaxation entre les instants  $t = 0$  et  $t = \tau$ . Résoudre ces équations pour  $t > \tau$ , tracer les variations de  $M_X$ ,  $M_Y$  et  $M_Z$ .

**36.** L'IRM consiste à mesurer l'aimantation au cours du temps pour  $t > \tau$ , et à en déduire  $T_1$  et  $T_2$ , qui dépendent fortement de l'environnement du proton et donnent des informations fines sur la nature des tissus contenus dans l'échantillon étudié. On utilise, pour mesurer  $T_2$ , la technique d'écho de spin exposée à la question **34.** Quelle valeur de  $T_E$  choisiriez-vous pour cette mesure ?

## Problème n° 2 – Interférométrie atomique

Centrale PC 2017

N.B. : Cet énoncé présente quelques différences avec l'énoncé original qui possédait des imprécisions et des questions discutables.

Les ondes de matière permettent de réaliser des expériences d'interférométrie tout à fait analogues à celles rencontrées en optique. On s'intéresse ici à un interféromètre de Mach-Zehnder à ondes de matière (figure 2). Un tel interféromètre a été construit par des chercheurs du Laboratoire Collisions, Agrégats, et Réactivité (LCAR) à Toulouse. La source est un jet supersonique collimaté d'atomes de lithium 7, les miroirs et lames séparatrices sont réalisés à l'aide d'ondes lumineuses sur lesquelles les atomes sont diffractés ; enfin, sur l'une des sorties de l'interféromètre, un détecteur mesure l'intensité du faisceau atomique résultant de l'interférence entre les ondes de matière qui se propagent dans les deux bras de l'interféromètre.

Les constantes physiques utiles au problème ainsi qu'un formulaire sont donnés en fin d'énoncé. Les vecteurs unitaires selon  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ , sont notés  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ .

### A. Diffraction du jet atomique par une onde stationnaire

À l'aide d'un laser de longueur d'onde  $\lambda = 671$  nm, on crée une onde plane et progressive, polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_y$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_L$  et de pulsation  $\omega_L$ , qui se propage dans la direction  $\vec{e}_x$ . Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E}_+(x, t) = \vec{e}_y E_0 \cos(\omega_L t - k_L x)$$

#### Ondes stationnaires

**1.** L'onde laser se réfléchit en incidence normale sur un miroir assimilé à un plan métallique parfaitement conducteur, situé dans le plan  $x = x_M$ . Montrer que le champ électrique de l'onde stationnaire résultante s'écrit  $\vec{E}(x, t) = \vec{e}_y E(x) \sin(\omega_L t - k_L x_M)$ . Préciser l'expression de  $E(x)$  en fonction de  $x$ ,  $E_0$ ,  $k_L$  et  $x_M$ .

#### Notion de potentiel lumineux

On s'intéresse d'abord à l'interaction de cette onde stationnaire avec les atomes de lithium. Lorsqu'ils pénètrent dans la zone où règne le champ  $\vec{E}$ , les atomes se polarisent. Lorsque la pulsation  $\omega_L$  est très éloignée des

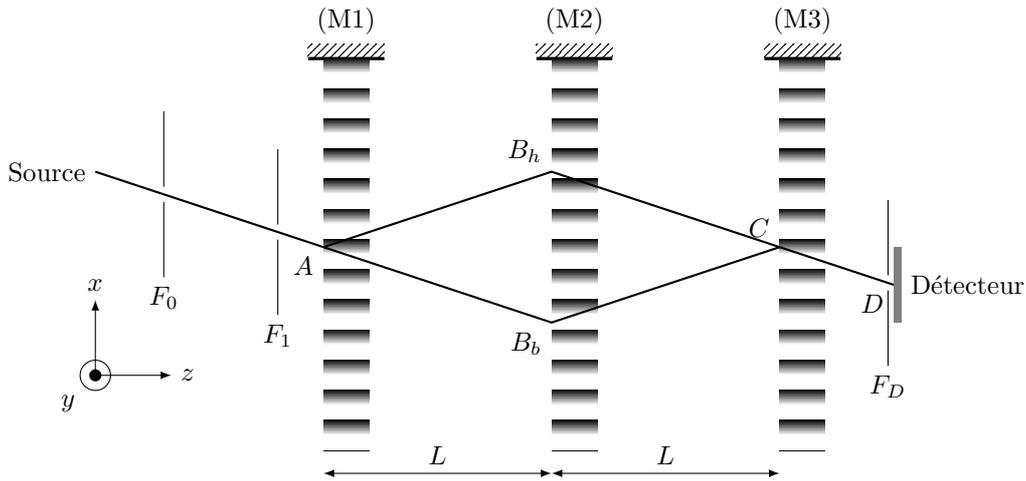


FIGURE 2 – Schéma de principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder à ondes de matière ( $M1$ ), ( $M2$ ) et ( $M3$ ) sont des miroirs plans ;  $F_0$  et  $F_1$  sont les fentes de collimation du jet supersonique ;  $F_0$  est la fente de détection ; la distance entre deux ondes stationnaires est  $L = 605$  mm.

résonances atomiques, les dipôles induits oscillent à la pulsation  $\omega_L$  du laser excitateur et en phase avec lui : le dipôle induit s'écrit alors :

$$\vec{p}_d = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{\hbar \delta_L}$$

où  $\alpha$  est la polarisabilité de l'atome de lithium,  $d = 3,45 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$  est une constante caractérisant le dipôle de l'atome de lithium et où  $\delta_L = \omega_L - \omega_0$  est l'écart entre la pulsation laser  $\omega_L$  et la pulsation  $\omega_0$  de la transition atomique la plus proche. Le champ lumineux interagit avec le dipôle atomique  $\vec{p}_d$  qu'il induit via une énergie potentielle  $V$ , appelée *potentiel lumineux* :

$$V = -\frac{1}{2} \vec{p}_d \cdot \vec{E}$$

2. Montrer que la moyenne temporelle de ce potentiel lumineux s'écrit sous la forme :

$$W(x) = -\frac{1}{2} V_0 (1 - \cos(k_r(x - x_M)))$$

où on exprimera  $V_0$  et  $k_r$  en fonction des paramètres du problème.

### Équation de propagation de l'onde de matière

Un jet supersonique de lithium se propage dans le plan  $Oxz$  à une vitesse  $v = 1060 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et traverse l'onde lumineuse stationnaire générée par un miroir ( $M$ ), voir la figure 3. Un atome de lithium est assimilé à un paquet d'ondes de matière décrit par sa fonction d'onde  $\psi(x, z, t)$  dont le module carré donne la densité de probabilité de présence de l'atome dans l'espace à trois dimensions. On s'intéresse ici exclusivement au processus élastique de diffusion des atomes par l'onde lumineuse stationnaire, de sorte que l'énergie de l'atome peut être considérée comme fixée et égale à son énergie cinétique incidente  $E_i$ . La partie spatiale  $\varphi(x, z)$  de sa fonction d'onde obéit alors à l'équation de SCHRÖDINGER :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + W(x) \varphi = E_i \varphi & \text{pour } 0 < z < D \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = E_i \varphi & \text{pour } z < 0 \text{ et } z > D \end{cases}$$

où  $0 < z < D$  correspond au passage de l'onde de matière dans l'onde stationnaire lumineuse. Pour  $z < 0$  et  $z > D$ , l'onde de matière se situe à l'extérieur de l'onde stationnaire lumineuse. On note  $m = 1,16 \times 10^{-26} \text{ kg}$  la masse de l'atome de lithium 7 et  $E_i$  son énergie totale, égale à son énergie cinétique incidente.

3. Rappeler l'expression de la longueur d'onde de DE BROGLIE  $\lambda_{DB}$  de l'atome incident et l'évaluer numériquement dans le cas présent.

4. On assimile le paquet d'onde atomique incident à une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ . Relier  $\vec{k}_i$  à la quantité de mouvement de l'atome  $m\vec{v}$  et en déduire l'expression de son énergie  $E_i$ . L'évaluer numériquement en électron-volt (eV).

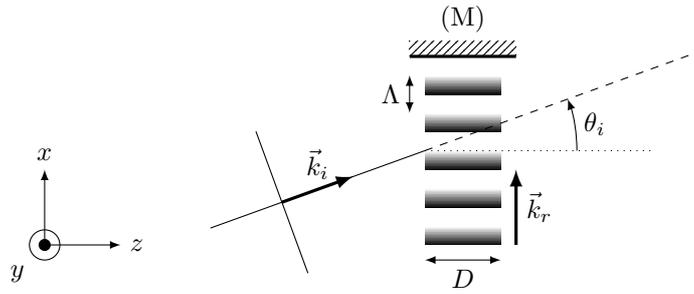


FIGURE 3 – Réseau lumineux de pas  $\Lambda$  et d'épaisseur  $D$ .

On supposera dans la suite que la profondeur  $V_0$  du potentiel lumineux est beaucoup plus faible que l'énergie  $E_i$  de l'atome (on se place dans le cas d'un puits de potentiel).

5. Rappeler l'expression de l'équation de propagation d'un champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}(x, z, t)$  se propageant dans le vide. Lorsque l'on envisage la propagation de ce champ électrique dans un milieu diélectrique d'indice de réfraction  $n(x)$ , l'équation de propagation devient :

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2} + n^2(x) k_v^2 \vec{\mathcal{E}} = 0$$

où  $\vec{k}_v$  est le vecteur d'onde dans le vide du champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}$  de l'onde électromagnétique. Expliquer la forme de l'équation précédente.

6. Par analogie avec l'équation précédente, montrer que la propagation de l'onde de matière à l'intérieur de l'onde stationnaire est régie par une équation similaire à l'équation présentée dans la question précédente. Donner l'expression de l'indice de réfraction  $n(x)$  correspondant. On parle alors de réseau d'indice. Quel est le pas  $\Lambda$  de ce réseau d'indice? L'évaluer numériquement. Donner l'expression de l'amplitude  $n_1$  de modulation de l'indice en fonction de  $V_0$  et de  $E_i$ .

7. On écrit l'équation de propagation de l'onde de matière à l'intérieur de l'onde stationnaire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_i^2 \varphi = 4k_i K \cos k_r(x - x_M) \varphi$$

Exprimer  $K$  en fonction de  $n_1$  et  $\lambda_{DB}$ .

### Résolution de l'équation de propagation

Le faisceau lumineux qui crée l'onde stationnaire est limité transversalement par un diaphragme de rayon  $R = 5 \text{ mm}$ . Le réseau lumineux sur lequel vont se diffracter les ondes atomiques a donc une épaisseur  $D = 2R$ , voir la figure 3. Deux fentes très fines, de largeur  $\simeq 10 \mu\text{m}$ , sont placées le long du jet supersonique, de manière à sélectionner très précisément l'angle d'incidence  $\theta_i$  des atomes sur le réseau lumineux (l'orientation de l'angle  $\theta_i$  est précisé sur la figure 3. Dans ces conditions, on montre que seules deux ondes planes se propagent simultanément dans le réseau lumineux : l'onde incidente  $\varphi_i(\vec{r})$  d'amplitude  $\beta_i(z)$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ , et l'onde diffractée  $\varphi_d(\vec{r})$  d'amplitude  $\beta_d(z)$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_d = \vec{k}_i + q\vec{k}_r$  où  $q = \pm 1$  et où  $\vec{k}_r = k_r \vec{e}_x$  caractérise la périodicité du réseau lumineux et est choisi de même sens que le vecteur d'onde  $\vec{k}_L$  de l'onde laser incidente sur le miroir (M). On considère dans la suite le cas  $q = -1$ .

8. Montrer que la conservation de l'énergie cinétique de l'atome, entre son entrée dans le réseau et sa sortie dans l'ordre  $q = -1$  de diffraction, implique une certaine relation que l'on explicitera entre l'angle d'incidence  $\theta_i$ , le pas  $\Lambda$  du réseau et la longueur d'onde de DE BROGLIE  $\lambda_{DB}$  de l'atome.

9. Évaluer numériquement l'angle d'incidence, noté  $\theta_B$ , qui satisfait cette relation.

10. Quel angle fait le faisceau diffracté avec l'axe  $\vec{e}_z$  dans ces conditions? Faire un schéma illustrant la disposition relative des traits du réseau et des vecteurs d'onde  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_d$ .

On cherche les solutions de l'équation de propagation de la question 7. sous la forme :

$$\beta_i(z) \exp i\vec{k}_i \cdot \vec{r} + \beta_d(z) \exp i\vec{k}_d \cdot \vec{r}$$

11. Que représente physiquement chacun des deux termes de cette solution ?

On peut démontrer que les amplitudes  $\beta_i(z)$  et  $\beta_d(z)$  vérifient deux équations différentielle couplées suivantes, où  $k_{iz} = \vec{k}_i \cdot \vec{e}_z$  :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \beta_i}{dz^2} + 2ik_{iz} \frac{d\beta_i}{dz} = 2k_i K \exp(-ik_r x_M) \beta_d \\ \frac{d^2 \beta_d}{dz^2} + 2ik_{iz} \frac{d\beta_d}{dz} = 2k_i K \exp(ik_r x_M) \beta_i \end{cases}$$

**12.** On impose les conditions aux limites  $\beta_i(z=0) = \beta_0$  et  $\beta_d(z=0) = 0$ . En préciser la signification physique. Que représente  $\beta_0$  ?

**13.** On suppose que les amplitudes des deux ondes sont lentement variables à l'échelle de  $\lambda_{DB}$ . Justifier que cela permet de négliger les dérivées secondes dans le système d'équations couplées ci-dessus.

**14.** En déduire que l'amplitude  $\beta_i(z)$  satisfait à une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \nu^2 f = 0$$

Expliciter la constante positive  $\nu$  en fonction de  $K$  et de  $\cos \theta_i$ .

**15.** Résoudre cette équation différentielle en utilisant les conditions aux limites précisées à la question **12.**

**16.** En déduire l'expression de  $\beta_d(z)$  et celles des ondes planes  $\varphi_i(\vec{r})$  et  $\varphi_d(\vec{r})$  en sortie d'onde stationnaire, c'est-à-dire pour  $z = D$ . Commenter ces solutions. L'approximation des amplitudes lentement variables vous semble-t-elle justifiée ici ?

On introduit les coefficients de transmission  $\alpha(q=0)$  et de diffraction à l'ordre  $q = -1$ ,  $\alpha(q = -1)$  tels que les ondes  $\varphi_i(\vec{r})$  et  $\varphi_d(\vec{r})$  s'écrivent dans la zone  $z > D$  :

$$\varphi_i(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(0) \exp i\vec{k}_i \cdot \vec{r} \quad \text{et} \quad \varphi_d(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(-1) \exp i\vec{k}_d \cdot \vec{r}$$

**17.** Montrer que :

$$\alpha(0) = \cos \nu D \quad \text{et} \quad \alpha(-1) = -i \sin \nu D \exp i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_M$$

où  $\vec{r}_M$  désigne la position du miroir ( $M$ ).

**18.** En déduire l'expression de l'efficacité de la diffraction  $\eta$ . Quelle valeur maximale peut-elle atteindre en théorie ?

### Puissance laser

**19.** Rappeler l'expression de l'éclairement (flux du vecteur de POYNTING à travers une surface unité) associé à une onde lumineuse dont le champ électrique s'écrit  $E_0 \cos(\omega_L t - k_L x) \vec{e}_y$ .

**20.** En déduire l'expression de la valeur la plus faible de la puissance  $P$  du laser qui permet d'atteindre l'efficacité de diffraction maximale dans l'ordre  $q = -1$ . Évaluer cette puissance numériquement pour un laser décalé en fréquence par rapport à la raie atomique la plus proche de la quantité  $\delta_L = -2\pi \times 2,8$  GHz. L'hypothèse  $V_0 \ll E_i$  vous semble-t-elle valable ?

**21.** Quelle est la puissance laser minimum nécessaire pour atteindre une efficacité de diffraction de 50% ?

**22.** Sur quel(s) autre(s) paramètre(s) peut-on jouer en pratique pour atteindre l'efficacité de diffraction maximale ?

On montrerait de la même façon que, dans la situation symétrique décrite par la figure 4 dans laquelle la composante de  $\vec{k}_i$  selon  $\vec{e}_x$  est négative :  $k_{ix} = \vec{k}_i \cdot \vec{e}_x = k_i \sin \theta_i$ , les ondes transmises  $\varphi_i$  (correspond à  $q = 0$ ) et diffractée  $\varphi_d$  (correspondant alors à  $q = 1$ ) s'écrivent dans la zone  $z > D$  :

$$\varphi_i(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(0) \exp i\vec{k}_i \cdot \vec{r} \quad \text{et} \quad \varphi_d(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(1) \exp i\vec{k}_d \cdot \vec{r}$$

avec  $\alpha(1) = -i \sin \nu D \exp -i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_M$ .

## B. Interféromètre de Mach-Zehnder

On réalise un interféromètre de MACH-ZEHNDER à ondes de matières en utilisant trois ondes stationnaires distantes entre elles de la distance  $L$ , voir la figure 2. ces trois ondes stationnaires sont créées à partir de la même source laser de longueur d'onde  $\lambda_L = 671$  nm. On a ajusté les paramètres de l'expérience de sorte que les première et troisième ondes stationnaires ont, chacune, une efficacité de 50%, tandis que la deuxième onde stationnaire diffractée avec une efficacité de 100%. Le jet monocinétique a pour vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ . On note  $\vec{r}_{M1}$ ,  $\vec{r}_{M2}$  et  $\vec{r}_{M3}$  les positions des trois miroirs permettant de créer les ondes stationnaires. Les trois miroirs

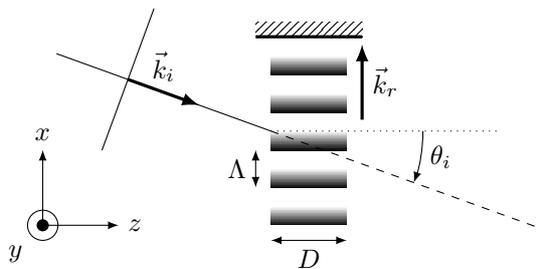


FIGURE 4 – Réseau lumineux dans lequel  $\theta_i < 0$ .

sont rigoureusement parallèles entre eux, et perpendiculaires à la direction  $Ox$ . On note  $\vec{k}_r$  le vecteur d'onde commun aux trois réseaux lumineux, en définissant son sens d'orientation selon la direction de propagation des ondes laser incidentes. Enfin, on note  $\alpha_j(q)$  les coefficients de transmission et de diffraction de l'onde atomique incidente à l'ordre  $q = 0, \pm 1$  par l'onde stationnaire  $j$ . Une fente de détection, très fine, est située en  $D$ . Elle permet, en sortie d'interféromètre, de sélectionner la voie de sortie sur laquelle on mesure l'interférence entre les ondes de matière  $\varphi_h$  et  $\varphi_b$  qui ont parcouru respectivement le bras du haut (trajet  $AB_hCD$ ) et celui du bas (trajet  $AB_bCD$ ). La fente, orientée selon  $\vec{e}_y$ , a une largeur de  $50 \mu\text{m}$  selon  $\vec{e}_x$  et une hauteur  $h_D = 2,9 \text{ mm}$  selon  $\vec{e}_y$ . On notera  $\vec{r}_A, \vec{r}_{B_b} \dots$

**Signal de sortie de l'interféromètre**

**23.** À quels composants optiques les trois ondes stationnaires sont-elles équivalentes, du point de vue de leur action sur les ondes de matière considérées dans ce problème ? Justifier votre réponse.

**24.** Exprimer  $\varphi_h$  et  $\varphi_b$  comme des produits d'amplitudes  $\alpha(q_j)$ , de  $\beta_0$  (amplitude de l'onde plane incidente en entrée de l'interféromètre) et de facteurs de phase qu'on exprimera en fonction de  $\vec{k}_r, \vec{k}_i$  et des positions des points  $A, B_h, B_b, C$  et  $D$ . On pourra noter  $\varphi_h = a_h \exp i\phi_h$  et  $\varphi_b = a_b \exp i\phi_b$  où  $a_h$  et  $a_b$  sont les amplitudes réelles et  $\phi_h$  et  $\phi_b$  les phases des deux fonctions d'onde.

**25.** En déduire que le nombre d'atomes détectés à travers la fente de détection s'écrit sous la forme :

$$I = I_0(1 + \cos \phi_0)$$

où on explicitera  $\phi_0$  en fonction de  $\vec{k}_r, \vec{r}_{M1}, \vec{r}_{M2}$  et  $\vec{r}_{M3}$ .

**26.** Expliquer précisément ce qu'on observe sur le détecteur lorsqu'on déplace le miroir ( $M3$ ) le long de l'axe  $\vec{e}_x$  ?

**27.** Observe-t-on exactement la même chose si c'est le miroir ( $M2$ ) que l'on déplace le long de l'axe  $\vec{e}_x$  ? Expliquer votre réponse.

**Application à la mesure d'une vitesse de rotation**

On prend désormais en compte la rotation de la Terre sur elle-même. L'interféromètre, situé à Toulouse (latitude  $43,6^\circ$ ), est horizontal de sorte que la verticale ascendante est orientée selon  $\vec{e}_y$ . On note  $\mathcal{R}_f$  le référentiel fixe (dont les axes ne tournent pas avec la Terre) qui coïncide avec celui du laboratoire à l'instant  $t_1$  où l'atome entre dans l'interféromètre au point  $A$ . Les miroirs sont fixes dans la référentiel du laboratoire, ils sont donc en mouvement dans  $\mathcal{R}_f$ . On peut négliger leur rotation pendant le temps de passage d'un atome dans l'interféromètre, de sorte qu'on admet que le déplacement des miroirs dans le référentiel  $\mathcal{R}_f$  se limite à une translation. On note  $x_j(t)$  la position du miroir  $j \in \{1, 2, 3\}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_f$  selon l'axe  $x$  à l'instant  $t$  et  $v_{jx}(t)$  la composante de la vitesse selon ce même axe. On suppose toujours que les trois ondes stationnaires sont rigoureusement parallèles.

**28.** Exprimer la phase  $\phi_0$  en fonction des abscisses  $x_j$  des miroirs aux différents instants  $t_1, t_2$  et  $t_3$  où l'atome traverse les ondes stationnaires.

**29.** On notera  $T = L/v$  où  $v = 1060 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  est la vitesse du jet et  $L = 605 \text{ mm}$  est la distance entre les ondes stationnaires. Montrer par un développement limité au premier ordre en  $T$  que :

$$\phi_0 = k_r \delta x(t_2) + k_r T (v_{3x}(t_2) - v_{1x}(t_2))$$

où on explicitera la quantité  $\delta x(t_2)$ . Que représente physiquement le premier terme de ce développement ? On supposera dans la suite que  $\delta x(t_2) = 0$ .

**30.** Exprimer la séparation  $\Delta x = \|\overrightarrow{B_b B_h}\|$  entre les deux bras de l'interféromètre, au niveau de la deuxième onde stationnaire, en fonction de  $L, \theta_B$ , et en déduire l'aire  $\mathcal{A}$  de l'interféromètre. Évaluer numériquement ces deux quantités.

**31.** Montrer que  $\phi_0$  s'exprime sous la forme :

$$\phi_0 = \frac{2m}{\hbar} \Omega_y \mathcal{A}$$

où  $\Omega_y$  est la vitesse de rotation du référentiel du laboratoire autour de l'axe  $y$ . Cette sensibilité à la vitesse de rotation du référentiel est ce qu'on appelle l'*effet Sagnac*.

**32.** En plus de la rotation de la Terre, la plateforme sur laquelle sont accrochés les miroirs peut tourner, par exemple à cause de vibrations en rotation. Le signal de l'interféromètre est sensible à ces fluctuations de la vitesse de rotation. On positionne le miroir ( $M3$ ) de sorte que ces fluctuations induisent une variation maximale du signal normalisé :

$$\mathcal{S} = \frac{I}{2I_0} = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi_0)$$

en sortie de l'interféromètre. Exprimer la sensibilité  $\left| \frac{d\mathcal{S}}{d\Omega_y} \right|$  de l'interféromètre dans ces conditions et l'évaluer numériquement.

**33.** Évaluer numériquement  $\Omega_y$  à la latitude de Toulouse. Si on suppose que le détecteur est capable de mesurer une variation de 15% du signal normalisé, le dispositif étudié permet-il de mesurer la vitesse de rotation de la Terre ?

**34.** Quel serait l'intérêt de ralentir les atomes du jet ?

### Données

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'AVOGADRO	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de BOLTZMANN	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = k_B \mathcal{N}_A = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de PLANCK	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de PLANCK réduite	$\hbar = h/(2\pi)$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### Formulaire

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$