Devoir libre de Sciences Physiques n°8 du 11-03-2024

— Solutions —

Problème nº 1 – À propos de conduction électrique

Mines MP 2011

A. Conduction dans un solide semi-conducteur

Mesure directe de la conductivité

1. Par définition de l'intensité électrique, on a $i = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Dans le problème proposé, la densité de courant volumique $\vec{j}$ est radiale. La surface correspondante est de type cylindrique. Comme il y a invariance supposée sur l'axe z, on obtient $i = j 2\pi r\varepsilon$. On en déduit que $\vec{j} = \frac{i}{2\pi r\varepsilon}\vec{e}_r$. Par la loi d'OHM, on a $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, cela permet d'écrire que le champ électrique est lui aussi radial et comme on est en statique, on sait que $\vec{E} = \frac{i}{\gamma 2\pi r\varepsilon}\vec{e}_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$. L'intégration de cette loi conduit à $V = -\frac{i}{\gamma 2\pi\varepsilon}\ln r + \mathrm{Cte}$. On peut donc exprimer la différence de potentiel demandée : $\boxed{V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{\gamma 2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}}$.

2. Il suffit de changer $+i$ en $-i$ pour tenir compte du départ du courant au point D. En notant r' les distances mises en jeu du point de vue du point D, on arrive à l'expression : $\boxed{V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{\gamma 2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2 r'_1}{r_1 r'_2}}$. Lorsqu'on se situe dans le plan médian, toutes les distances sont égales et la différence de potentiel est alors nulle.

3. On constate que dans le cas proposé, on a $r_1 = a = r'_2$, $r_2 = \ell = r'_1$ d'où $V(A) - V(D) = \frac{i}{\gamma\pi\varepsilon}\ln\frac{\ell}{a}$. On calcule aussitôt la résistance électrique : $R = \frac{1}{\gamma\pi\varepsilon}\ln\frac{\ell}{a}$ et par conséquent : $\boxed{R_0 = \frac{1}{\gamma\pi\varepsilon}}$.

4. On trouve $\boxed{R = 0,053\,\Omega}$. Cette valeur de résistance est faible par rapport au valeurs classiques, sa mesure ne doit pas être aisée !

5. Dans ce nouveau cas de figure, on observe que $r_1 = \ell = r'_2$ et que $r_2 = \ell\sqrt{2} = r'_1$. La distance ℓ n'intervient plus dans le calcul et on trouve que $\boxed{R_\parallel = \frac{1}{\gamma 2\pi\varepsilon}\ln 2}$. La valeur numérique de cette résistance est $R_\parallel = 0,005\,\Omega$.

Effet Hall

6. La relation de la dynamique appliquée à un porteur de charge mobile dans le référentiel galiléen du laboratoire nous amène à écrire que $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -f\vec{v} + q\vec{E}$ d'où en régime permanent $\vec{v} = \frac{q}{f}\vec{E}$. La densité volumique de courant est définie par $\vec{j} = nq\vec{v}$. On observe bien alors la relation linéaire entre cette densité de courant et le champ électrique : $\boxed{\vec{j} = \frac{nq^2}{f}\vec{E}}$. La coefficient de proportionnalité $\gamma = \frac{nq^2}{f}$ est la conductivité.

7. En présence du champ magnétique $\vec{B}$, il faut ajouter la force magnétique subie par la charge. La relation de la dynamique devient $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -f\vec{v} + q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$. On étudie toujours la situation particulière du régime permanent. Cela permet d'écrire que $f\vec{v} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$. En utilisant le fait que $\vec{v} = \frac{\vec{j}}{nq}$, on arrive à la nouvelle relation entre la densité volumique de courant et les champs : $\boxed{\frac{\vec{j}}{\gamma} = \vec{E} + \mathcal{R}(\vec{j}\wedge\vec{B})}$.

8. La loi de la conservation de la charge impose que $\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. L'étude s'effectue en régime permanent, on a donc $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} = 0}$. Cette relation n'est peut-être pas celle attendue par l'énoncé. Si, dans la logique de la question précédente, on opère la divergence sur la relation établie avant, on a $\mathrm{div}\,\vec{j} = \gamma\left(\mathrm{div}\,\vec{E} + \mathcal{R}\mathrm{div}\,(\vec{j}\wedge\vec{B})\right)$. D'après le formulaire fourni, on constate que $\mathrm{div}\,(\vec{j}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{j} - \vec{j}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$. On peut donc encore écrire que $\mathrm{div}\,\vec{j} = \gamma\left(\mathrm{div}\,\vec{E} + \mathcal{R}(\vec{B}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{j} - \vec{j}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{B})\right)$. Il faut dans cette étude négliger la capacité de la densité volumique de courant $\vec{j}$ à produire un champ magnétique devant le champ magnétique imposé uniforme par ailleurs. On peut donc écrire que pour le champ magnétique uniforme, on aura $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \vec{0}$. L'équation précédente devient $\mathrm{div}\,\vec{j} = \gamma\left(\mathrm{div}\,\vec{E} + \mathcal{R}\vec{B}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{j}\right)$.

9. On a $\overrightarrow{rot}\,(\vec{j}\wedge\vec{B}) = \frac{1}{\mathcal{R}}\left(\frac{1}{\gamma}\overrightarrow{rot}\,\vec{j} - \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right)$. Nous sommes en régime permanent, on peut donc considérer par l'équation de MAXWELL-FARADAY que $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$. Cela nous permet de donner une forme plus simple à l'expression recherchée : $\overrightarrow{rot}\,(\vec{j}\wedge\vec{B}) = \frac{1}{\gamma\mathcal{R}}\overrightarrow{rot}\,\vec{j}$. Or, $\overrightarrow{rot}\,(\vec{j}\wedge\vec{B}) = \vec{j}\mathrm{div}\,\vec{B} - (\vec{j}\cdot\overrightarrow{grad}\,)\vec{B} - \vec{B}\mathrm{div}\,\vec{j} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{grad}\,)\vec{j}$. On a $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ d'après l'équation de MAXWELL-FLUX, comme nous avons vu que $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$, cela supprime deux termes du calcul précédent. Or, les hypothèses faites sur l'uniformité du champ magnétique font que

$(\vec{j}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{B}=\vec{0}$. Il reste donc $\overrightarrow{rot}\,(\vec{j}\wedge\vec{B})=(\vec{B}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{j}$. Or $\vec{B}\cdot\overrightarrow{grad}=B\frac{\partial}{\partial z}$ et comme la densité volumique de courant est supposée indépendante de z, on peut conclure que $\boxed{\overrightarrow{rot}\,(\vec{j}\wedge\vec{B})=\frac{1}{\gamma\mathcal{R}}\overrightarrow{rot}\,\vec{j}=\vec{0}}$.

10. Dans l'équation établie avant $\operatorname{div}\vec{j}=\gamma\left(\operatorname{div}\vec{E}+\mathcal{R}\vec{B}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{j}\right)$, on a donc $\operatorname{div}\vec{j}=0$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{j}=\vec{0}$. On peut en déduire que $\operatorname{div}\vec{E}=0$. En évoquant l'équation de Maxwell-Gauss $\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on constate donc que $\boxed{\rho=0}$.

11. Les points P et Q sont dans le plan médian. Nous savons que la différence de potentiel est alors nulle pour la contribution classique vue au début du problème. La seule contribution qui va compter est celle du champ électrique de Hall qui est transverse. Nous avons vu avant que $\vec{E}=\frac{\vec{j}}{\gamma}-\mathcal{R}(\vec{j}\wedge\vec{B})$ et par conséquent, on retrouve l'expression du champ électrique de Hall : $\vec{E}_H=-\mathcal{R}(\vec{j}\wedge\vec{B})$. Le fait d'être situé dans le plan médian est important sur le plan des symétries car ce plan constitue un plan d'antisymétrie pour la densité volumique de courant. Dans ce plan, on a $j_x\neq 0$ et surtout $j_y=0$. Par définition de l'intensité, on a $i=\iint j_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\varepsilon\int j_x\mathrm{d}y$. Le champ de Hall est $\vec{E}_H=\mathcal{R}Bj_x\vec{e}_y$. La différence de potentiel est donc $u=\int_{y=-\ell/2}^{y=\ell/2}E_H\mathrm{d}y$. On a donc $u=\mathcal{R}B\int_{y=-\ell/2}^{y=\ell/2}j_x\mathrm{d}y=\frac{\mathcal{R}B}{\varepsilon}i$. Ceci nous permet de trouver la résistance perpendiculaire : $\boxed{R_\perp=\frac{\mathcal{R}B}{\varepsilon}}$.

12. La mesure de cette résistance peut servir à la $\boxed{\text{mesure d'un champ magnétique}}$, c'est en quelque sorte le principe de la sonde à effet Hall dans laquelle, on impose un courant i et on mesure la tension u précédente.

B. Conduction dans un plasma à basse fréquence

Courant électrique dans un plasma

13. L'approximation $\overrightarrow{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ est souvent dénommée par le sigle qu'on lui associe à savoir l'$\boxed{\text{ARQS}}$ pour approximation des régimes quasi-stationnaires qui consiste à négliger le terme $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ devant $\vec{j}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère.

Vitesse, courant et forces

14. On a $\boxed{m_p/m_e=1\,835}$, une valeur de 10^3 était sans doute acceptée par le jury.

15. La vitesse $\vec{V}$ est la $\boxed{\text{vitesse du barycentre}}$ puisque la définition de G impose $(m_e+m_p)\vec{OG}=m_p\vec{OM}_p+m_e\vec{OM}_e$. En dérivant par rapport au temps, on retrouve bien l'expression fournie. Par définition de la densité volumique de courant qui somme les contributions des protons et des électrons, on a $\vec{j}=n_0e(\vec{v}_p-\vec{v}_e)$. Dans cette expression, on peut isoler $\vec{v}_e$ que l'on exprime dans la définition de $\vec{V}$. On obtient ensuite les expressions suivantes des vitesses : $\vec{v}_p=\vec{V}+\frac{m_e}{m_e+m_p}\frac{\vec{j}}{n_0e}$ et $\vec{v}_e=\vec{V}-\frac{m_p}{m_e+m_p}\frac{\vec{j}}{n_0e}$. Une approximation $m_p\gg m_e$ est justifiée. Cela conduit à écrire que $\vec{v}_p\simeq\vec{V}$ et $\vec{v}_e\simeq\vec{V}-\frac{\vec{j}}{n_0e}$.

16. Le bilan des forces sur les électrons donne $\mathrm{d}\vec{F}_e=\left[\vec{f}_v-n_0e(\vec{E}+\vec{v}_e\wedge\vec{B})\right]\mathrm{d}\mathcal{V}$. Avec l'expression de la vitesse vue avant $\vec{v}_e=\vec{V}-\frac{\vec{j}}{n_0e}$, on peut aboutir à $\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_e=\left[\vec{f}_v-n_0e(\vec{E}+\vec{V}\wedge\vec{B})+\vec{j}\wedge\vec{B}\right]\mathrm{d}\mathcal{V}}$.

17. Pour les protons, il faut prendre l'action réciproque de la force $\vec{f}_v$ qu'ils exercent sur les électrons. Compte tenu du fait que $\vec{v}_p=\vec{V}$, on arrive à l'expression $\mathrm{d}\vec{F}_p=\left[-\vec{f}_v+n_0e(\vec{E}+\vec{V}\wedge\vec{B})\right]\mathrm{d}\mathcal{V}$. Lorsque l'on effectue le bilan des forces sur l'ensemble des porteurs de charge, on obtient $\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_p+\mathrm{d}\vec{F}_e=(\vec{j}\wedge\vec{B})\mathrm{d}\mathcal{V}}$. Cette force porte le nom de force de Laplace.

Modèle collisionnel pour le plasma

18. Le système des deux particules est isolé, il ne subit aucune force extérieure. En appliquant la relation de la dynamique, on montrer que l'accélération de son barycentre G est nulle. La vitesse de G notée $\vec{V}$ est donc la même avant et après le choc. Sous forme scalaire, cette loi de conservation donne $m_pv_p-m_ev_e=-m_pw_p+m_ew_e$. La seconde loi de conservation est la conservation de l'énergie mécanique qui est la conséquence du fait que le système ne subit pas de force extérieure non conservative et d'ailleurs dans notre cas pas de force du tout. Les vitesses données sont celles des particules à grande distance du choc à des moments où il n'existe plus d'interaction entre elles et donc où plus aucune énergie potentielle intérieure peut être évoquée. De la conservation de l'énergie mécanique, on déduit donc la conservation de l'énergie cinétique. En multipliant par 2 l'équation, on arrive à $m_pv_p^2+m_ev_e^2=m_pw_p^2+m_ew_e^2$. Ces deux équations doivent être rassemblées sous la forme $m_p(v_p+w_p)=m_e(v_e+w_e)$ et $m_p(w_p^2-v_p^2)=m_e(v_e^2-w_e^2)$. En effectuant un rapport membre à membre, on arrive à la relation $\boxed{v_p+v_e=w_p+w_e}$.

19. De la question précédente, on tire $w_e=v_p+v_e-w_p$. Avec $\frac{m_p}{m_e}(v_p+w_p)=v_e+w_e$, on peut isoler w_p en fonction de v_p et v_e. Cela donne $w_p=-\frac{m_p-m_e}{m_p+m_e}v_p+\frac{2m_e}{m_p+m_e}v_e$, ce qui permet ensuite de donner $w_e=$

$\frac{m_p-m_e}{m_p+m_e}v_e + \frac{2m_p}{m_p+m_e}v_p$. On arrive ainsi à pouvoir calculer $m_e(w_e+v_e) = 2\frac{m_e m_p}{m_p+m_e}(v_p+v_e)$ ce qui correspond à la forme demandée avec $\boxed{\alpha = 2}$.

20. L'expression de la force de frottements parait fondée puisqu'elle est proportionnelle à la masse volumique correspondant aux nombres de particules. De plus, la durée $\boxed{\tau \text{ apparaît au dénominateur}}$, plus la durée d'une collision sera brève, plus la force sera importante. Enfin la différence des vitesses sera fondamentale pour quantifier le choc puisque l'on comprend de façon intuitive que c'est bien la vitesse relative qui va compter dans un tel événement.

21. On rappelle que la densité volumique de courant est $\vec{j} = n_0 e(\vec{v}_p - \vec{v}_e)$. La relation de la dynamique appliquée aux électrons donne $n_0 m_e \mathrm{d}\mathcal{V}\frac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t} = \left[\vec{f}_v - n_0 e(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B}) + \vec{j}\wedge\vec{B}\right]\mathrm{d}\mathcal{V}$. On se place en régime permanent $\frac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ et on utilise l'expression de de la force donnée à la question précédente. Cela permet effectivement d'obtenir la relation $\vec{j} = \gamma\left[\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B} - \frac{1}{n_0 e}\vec{j}\wedge\vec{B}\right]$ avec $\boxed{\gamma = \frac{n_0 e^2\tau}{m_e}}$.

Ondes magnétohydrodynamiques dans un plasma

22. On sait que $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Ici $\vec{B} = B_0\vec{e}_z + \vec{b}$. Dans ces conditions, on obtient aussitôt $\operatorname{div}\vec{b} = 0$. Comme $\vec{b}$ est de forme OPPS avec $\vec{k} = k\vec{e}_z$, on calcule la divergence à l'aide de l'opérateur nabla et on arrive à $\boxed{\operatorname{div}\vec{b} = -i\vec{k}\cdot\vec{b} = 0}$. Cette relation prouve donc que $\vec{b}$ est perpendiculaire à l'axe de propagation $\vec{e}_z$ comme il se doit pour une onde transversale. On a de plus, $\overrightarrow{rot}\,\vec{b} = \mu_0\vec{j} = -i\vec{k}\wedge\vec{b}$. La densité volumique de courant est donc $\vec{j} = -\frac{i}{\mu_0}(\vec{k}\wedge\vec{b})$.

23. On utilise la relation de la dynamique proposée en régime ondulatoire, c'est-à-dire avec la correspondance $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$. Il vient $n_0 m_p i\omega\vec{V} = -\frac{i}{\mu_0}(\vec{k}\wedge\vec{b})\wedge B_0\vec{e}_z$ en négligeant le champ $\vec{b}$ pour se limiter aux termes du premier ordre en $\vec{b}$ comme demandé. On développe le produit vectoriel en tenant compte du fait que $\vec{b}\perp\vec{e}_z$. On arrive à la relation $\vec{V} = \beta\vec{b}$ avec le facteur $\boxed{\beta = -\frac{kB_0}{\mu_0\rho_m\omega}}$. La relation précédente prouve bien le caractère OPPS de la vitesse des protons puisque $\vec{b}$ est de forme OPPS.

24. La relation de Maxwell-Faraday est $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\vec{b}}{\partial t}$. Cette relation devient dans le cadre des OPPS : $-i\vec{k}\wedge\vec{E} = -i\omega\vec{b}$. Or, $\vec{E} = -\vec{V}\wedge\vec{B} = -\vec{V}\wedge(B_0\vec{e}_z + \vec{b})$. On obtient la relation $\left[\vec{V}\wedge(B_0\vec{e}_z+\vec{b})\right]\wedge\vec{k} = \omega\vec{b}$. On développe le double produit vectoriel en tenant compte du fait que $\vec{V}\cdot\vec{k} = 0$. Cela permet d'écrire que $-B_0 k\vec{V} = \omega\vec{b}$ que l'on écrit $\vec{V} = -\frac{\omega}{B_0 k}\vec{b}$. Nous avons donc obtenu 2 relations entre $\vec{V}$ et $\vec{b}$, en les comparant on trouve que $\frac{\omega}{B_0 k} = \frac{kB_0}{\mu_0\omega\rho_m}$. Cette équation prend la forme d'une relation de dispersion très classique $k^2 = \frac{\omega^2}{\mu_0\rho_m}B_0^2$. Elle montre que les ondes d'Alfvén obéissent à une équation de propagation de D'Alembert de la forme $\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2} = \frac{1}{cA^2}\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial t^2}$ avec $\boxed{c_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_m}}}$. L'expression de la vitesse peut être écrite selon $\rho_m c_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0}$. c_A est donc bien une vitesse puisque l'on reconnaît dans l'expression précédente deux énergies volumiques en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, l'énergie magnétique étant $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ et l'énergie cinétique volumique de la forme $\frac{1}{2}\rho_m c_A^2$.

25. On trouve $\boxed{c_A = 3,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$. Cette vitesse est assez lente pour des ondes mais la masse volumique du mercure élevée l'explique. Dans des plasmas nettement plus dilués comme l'ionosphère, la célérité relève plus du domaine de l'électromagnétisme que de celui de la mécanique.

Problème n° 2 – L'atmosphère : une cavité électromagnétique naturelle

Centrale TSI 2011

A. Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC

1. On a $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et par conséquent la loi des mailles $Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u = 0$ devient $LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0$. On peut introduire le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 pour réécrire cette équation différentielle selon : $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0}$. L'équation caractéristique est alors $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions dépendent du discriminant $\Delta = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$. Lorsque $\Delta > 0$, les deux racines sont réelles et le régime est apériodique surcritique. Lorsque $\Delta = 0$, il y a une racine double et le régime est dit critique. Enfin, lorsque $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Le régime d'amortissement est donc pseudo-périodique lorsque $Q > \frac{1}{2}$.

2. On se place dans le cas pseudo-périodique. La solution est de la forme $u(t) = \exp -\frac{\omega_0 t}{2Q}\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ avec une pseudo-période $T = 2\pi/\omega$ où $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et un temps caractéristique d'amortissement $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Dans un tel circuit RLC, on doit observer la continuité de la tension aux bornes du condensateur et donc $u(t=0^-) = u(t=0^+) = u_0$ mais aussi celle de l'intensité traversant la bobine. Comme l'interrupteur était ouvert, l'intensité est donc continue est nulle à la date $t=0$. Or, $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, par conséquent la seconde condition initiale et de continuité à appliquer est $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$. Avec la forme de solution initiale, on en déduit que $A = u_0$ de façon immédiate. Ensuite, on calcule $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp -\frac{\omega_0 t}{2Q}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)\exp -\frac{\omega_0 t}{2Q}$. Cela nous permet d'écrire que $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega = 0$ et, par conséquent, $B = \frac{u_0}{\sqrt{4Q^2-1}}$. On obtient finalement : $\boxed{u(t) = u_0 \exp -\frac{\omega_0 t}{2Q}\left(\cos\omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\omega t\right)}$.

3. En fait, le circuit est modifié de la façon suivante : à la place d'avoir le condensateur C, on a une association de C, C_0 et R_0 en parallèle. Les deux condensateurs sont équivalents à un seul condensateur de capacité $C + C_0$. L'intensité i qui circule dans la bobine suit la loi des nœuds pour donner $i = \frac{u}{R_0} + (C + C_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Si on remplace dans la loi des mailles vue au début du problème, on obtient aussitôt l'équation différentielle proposée par l'énoncé : $\boxed{L(C+C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_0} + R(C+C_0)\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0}$.

4. Dans le cas du circuit sans oscilloscope, on avait l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = 0$. Écrivons la nouvelle équation différentielle sous une forme analogue. Cela donne : $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}^2} + \left(\frac{1}{R(C+C_0)} + \frac{R}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1+R/R_0}{1+C_0/C}\frac{u}{LC} = 0$. On voit donc que pour que l'oscilloscope n'ait pas d'influence, il faut que $C_0 \ll C$, $R \ll R_0$ mais aussi que $\frac{1}{R_0 C} \ll \frac{R}{L}$ ce qui correspond à $\boxed{R_0 \gg \frac{L}{RC}}$. En TP, on utilise couramment $C = 1\,\mu\mathrm{F} \gg 11\,\mathrm{pF}$, $R = 1\,\mathrm{k}\Omega \ll 1\,\mathrm{M}\Omega$ et une bobine pour laquelle $L \simeq 0,05\,\mathrm{H}$. On constate alors que $\frac{L}{RC} \simeq 50\,\Omega \ll R_0$. Les conditions d'utilisation de l'oscilloscope sont telles que l'on peut négliger son influence.

5. À partir de la forme de la solution $u(t)$ trouvée auparavant, on arrive à $\frac{u(t)}{u(t+mT)} = \exp\frac{\omega_0 mT}{2Q}$. Le décrément logarithmique est donc $d_m = m\frac{\omega_0 T}{2Q}$. En utilisant, l'expression de $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, on arrive à l'expression suivante : $\boxed{d_m = m\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$.

6. Il faut choisir un signal créneau de période beaucoup plus grande (et donc de fréquence beaucoup plus petite) que celle correspondant à ω. Ainsi, dans chaque phase du créneau, les oscillations ont le temps de s'amortir et le régime permanent sera atteint qu'il corresponde à celui de la charge du condensateur ou bien à celui de sa décharge. Sur le graphique proposé, on peut lire une pseudo-période $T = 30\,\mu\mathrm{s}$. Pour $m = 6$, l'amplitude n'est plus que de $0,2\,\mathrm{V}$ alors qu'elle était de $4,0\,\mathrm{V}$ au départ. On a donc $d_m = \ln\frac{4,0}{0,2} \simeq 3$. À partir de cette valeur, on en déduit que $\boxed{Q \simeq 6,3}$.

7. L'énergie $\mathcal{E}$ stockée dans le circuit est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$. Comme il n'y a pas de dispositif qui dissipe de l'énergie, elle est constante. Sa valeur peut donc être évaluée à la date $t = 0$ pour laquelle $i = 0$ et $u = u_0$. On en déduit que $< \mathcal{E} >= \frac{1}{2}Cu_0^2$. On étudie le système réel qui dissipe de l'énergie par une méthode perturbative. Après une période, l'amplitude des oscillations est devenue $u_0' = u_0\exp -\frac{\omega_0 T}{2Q}$. Comme, on fait l'hypothèse que $Q \gg 1$, on peut écrire que $\omega_0 T \simeq 2\pi$. On en déduit que $u_0' = u_0 \exp -\frac{\pi}{Q}$. Au départ l'énergie est $\mathcal{E}_{t=0} = \frac{1}{2}Cu_0^2$, après une période T, elle est $\mathcal{E}_{t=T} = \frac{1}{2}Cu_0^2\exp -\frac{2\pi}{Q}$. L'énergie dissipée par effet JOULE est donc la différence $W_J = \mathcal{E}_{t=0} - \mathcal{E}_{t=T} =< \mathcal{E} > (1 - \exp -\frac{2\pi}{Q})$. En effectuant un développement limité de l'exponentielle, on arrive à l'expression attendue : $\boxed{W_J = \frac{2\pi}{Q} < \mathcal{E} >}$.

B. Ondes de Schumann

8. L'approximation d'une cavité *dépliée* est justifiée dès que $\boxed{h \ll R_T}$, ce qui est le cas puisque $h = 100\,\mathrm{km}$ et $R_T = 6\,400\,\mathrm{km}$.

9. L'onde est qualifiée d'électromagnétique car les propriétés du milieu de propagation modifiées sont le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$. Elle est dite plane car $\forall t$, l'onde est la même en tout point de l'espace vérifiant $\boxed{x = \mathrm{Cte}}$. Elle est progressive car le terme $\omega_n t - k_n x$ traduit le fait que l'onde se déplace sur l'axe Ox en sens croissant. Enfin, elle est monochromatique car elle ne comporte qu'une seule fréquence associée à la pulsation $\omega_n = 2\pi f_n$.

10. Les équations de MAXWELL vérifiées par $\vec{B}_n^+(x,t)$ et $\vec{E}_n^+(x,t)$ dans le vide sont : $\mathrm{div}\,\vec{E}_n^+ = 0$, $\overrightarrow{rot}\,\vec{E}_n^+ = -\frac{\partial\vec{B}_n^+}{\partial t}$, $\mathrm{div}\,\vec{B}_n^+ = 0$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{B}_n^+ = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}_n^+}{\partial t}$. D'après le formulaire, on a $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{B}_n^+ = \overrightarrow{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{B}_n^+ - \Delta\vec{B}_n^+ = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}_n^+}{\partial t^2}$ qui conduit à l'équation de D'ALEMBERT : $\boxed{\Delta\vec{B}_n^+ = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}_n^+}{\partial t^2}}$. Avec la forme proposée pour le champ magnétique, on peut écrire que $\Delta\vec{B}_n^+ = \frac{\partial^2\vec{B}_n^+}{\partial x^2} = -k_n^2\vec{B}_n^+$ et comme $\frac{\partial^2\vec{B}_n^+}{\partial t^2} = -\omega_n^2\vec{B}_n^+$, on obtient la relation classique de dispersion : $k_n^2 = \frac{\omega_n^2}{c^2}$.

11. L'approximation d'une cavité dépliée exige aussi que la circonférence terrestre soit égale à un multiple entier de la longueur d'onde λ_n : $2\pi R_T = n\lambda_n$. Cette relation traduit le fait que si l'on place $x = 0$ quelque part et qu'on fait le tour de la Terre, il faut qu'en revenant en $x = 0$ après avoir parcouru le périmètre $2\pi R_T$, on retrouve la même valeur du champ magnétique. Par conséquent, on doit écrire que $k_n 2\pi R_T = n2\pi$ ce qui correspond à la relation proposée. Les fréquences sont donc données par $\boxed{f_n = n\frac{c}{2\pi R_T}}$. On trouve $f_1 = 7,5\,\text{Hz}$, $f_2 = 14,9\,\text{Hz}$ et $f_3 = 22,4\,\text{Hz}$. Les mesures effectuées ayant une incertitude de $0,5\,\text{Hz}$, on peut en déduire que pour f_1 l'accord est très satisfaisant et qu'il l'est un peu moins pour les deux autres fréquences.

12. Pour déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}_n^+(x,t)$, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\,\vec{B}_n^+ = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x \wedge B_n^+\vec{e}_y = k_n B_{0n}\sin(\omega_n t - k_n x)\vec{e}_z = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_n^+}{\partial t}$. On intègre par rapport au temps sans prendre en compte une constante d'intégration qui correspondrait à un champ électrostatique inexistant dans notre cas et on obtient : $\boxed{\vec{E}_n^+ = -B_{0n}c\cos(\omega_n t - k_n x)\vec{e}_z}$ grâce à $k_n = \frac{\omega_n}{c}$.

13. Le champ magnétique est donc $\boxed{\vec{B}_n^- = B_{0n}\cos(\omega_n t + k_n x)\vec{e}_y}$, on en déduit le champ électrique par la même méthode qu'avant ou bien en utilisant le fait que c'est une onde plane et $\vec{B}_n^- = \frac{1}{\omega_n}(\vec{k_n^-} \wedge \vec{E}_n^-)$. Cela conduit à $\vec{E}_n^- = B_{0n}c\cos(\omega_n t + k_n x)\vec{e}_z$.

14. Pour déterminer les champs résultants des deux ondes, on utilise à nouveau le formulaire et on obtient immédiatement $B_n(x,t) = 2B_{0n}\cos\omega_n t\cos k_n x\,\vec{e}_y$ et $\vec{E}_n(x,t) = -2cB_{0n}\sin\omega_n t\sin k_n x\,\vec{e}_z$. On affaire à une $\boxed{\text{onde stationnaire}}$ avec des ventres de champ électrique pour x tels que $k_n x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ qui correspondent aux nœuds de champ magnétique et réciproquement des nœuds de champ électrique correspondant à des ventres de champ magnétique pour x tels $k_n x = n\pi$.

15. Les relations de passage sont $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$ et $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$. Dans le cas de la cavité étudiée ici, on a $\vec{n}_{12} = \pm\vec{e}_z$, on constate que $\vec{E}_n$ est normal à chaque surface $z = 0$ et $z = h$, ce champ est donc à l'origine de charges surfaciques. Pour $\vec{B}_n$ le raisonnement est le même car on observe qu'il est tangent aux deux surfaces en question. Il est important de rappeler que l'énoncé fait l'hypothèse que la Terre et l'ionosphère sont considérés comme des conducteurs parfaits et donc que les champs électrique et magnétique en leur sein sont nuls. Plaçons-nous en $z = 0$ de normale $\vec{n}_{12} = +\vec{e}_z$ avec 1 pour la Terre et 2 pour la cavité, on a donc $\vec{B}_n(z=0) - \vec{0} = \mu_0\vec{j}_{sn}(z=0) \wedge \vec{e}_z$. Cette relation nous permet de trouver le courant surfacique en $z = 0$ et comme en $z = h$, il n'y a qu'un changement de sens de la normale, le courant y sera opposé au précédent. On peut conclure en écrivant que : $\boxed{\vec{j}_{sn}(z=0) = -\frac{2B_{0n}}{\mu_0}\cos\omega_n t\cos k_n x\,\vec{e}_x = -\vec{j}_{sn}(z=h)}$.

C. Facteur de qualité de la cavité atmosphérique

16. La densité d'énergie électromagnétique est $u_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$. Comme l'extension de la boîte proposée est λ_n, on peut raisonner sur les moyennes spatiales en plus de raisonner sur les moyennes temporelles. Comme on observe aisément que la contribution de l'énergie électrique est équivalente en moyenne à celle de l'énergie magnétique et que $< \cos^2 >= \frac{1}{2} =< \sin^2 >$, on trouve que $<< u_{em} >>_{x,t}= \frac{B_{0n}^2}{\mu_0}$. Pour obtenir l'énergie stockée dans la boîte, il suffit de multiplier la densité précédente par le volume $bh\lambda_n$. On obtient : $\boxed{< \mathcal{E}_n >= \frac{B_{0n}^2}{\mu_0}bh\lambda_n}$.

17. La conductivité γ est en $\Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$, la pulsation ω en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et μ_0 en $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$. En utilisant la loi classique de l'électrocinétique qui donne la tension aux bornes d'une bobine $u = L\frac{\text{d}i}{\text{d}t}$, on peut voir facilement que $\text{H} = \Omega\cdot\text{s}$. Le produit $\mu_0\gamma\omega$ est donc en $\Omega\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} = \text{m}^2$, il est bien l'inverse d'une longueur au carré. Ainsi, δ est bien une distance, c'est l'épaisseur de peau. La puissance volumique dissipée par effet Joule est : $\boxed{p_{vol} = \frac{\vec{J}^2}{\gamma}}$.

18. On a dans la Terre $J_n = \frac{2B_{0n}}{\mu_0\delta_{tn}}\cos\omega_n t\cos k_n x$. Pour son carré en valeur moyenne temporelle et spatiale, on arrive à $< J_n^2 >= \frac{B_{0n}^2}{\mu_0^2\delta_{tn}^2}$. La puissance volumique est alors $< p_{vol} >= \frac{B_{0n}^2}{\mu_0^2\gamma_t\delta_{tn}^2}$. Il ne reste plus qu'à multiplier par le volume dans lequel les courants existent à savoir $b\lambda_n\delta_{tn}$. On obtient une puissance dissipée en moyenne $< P_{tn} >= \frac{B_{0n}^2 b\lambda_n}{\mu_0^2\gamma_t\delta_{tn}}$. Pour aboutir à l'expression de l'énergie dissipée dans la Terre pendant une période, il suffit de multiplier la puissance par la durée $\frac{2\pi}{\omega_n}$. En utilisant l'expression de l'épaisseur de peau δ_{tn}, on simplifie le résultat obtenu pour arriver à : $\boxed{W_{Jtn} = \frac{\pi B_{0n}^2}{\mu_0}b\lambda_n\delta_{tn}}$.

19. Pour l'ionosphère, il suffit de permuter les rôles des épaisseurs de peau puisque tous les autres paramètres de l'expression de l'énergie sont les mêmes. On obtient alors : $\boxed{W_{Jin} = \frac{\pi B_{0n}^2}{\mu_0} b\lambda_n \delta_{in}}$.

20. L'énergie totale W_{Jn} dissipée par effet JOULE est : $\boxed{W_{Jn} = \frac{\pi B_{0n}^2}{\mu_0} b\lambda_n (\delta_{tn} + \delta_{in})}$.

21. En reprenant la définition du facteur de qualité proposée avant, on a donc $Q_n = 2\pi \frac{<\mathcal{E}_n>}{W_{Jn}}$. On trouve : $\boxed{Q_n = \frac{2h}{\delta_{tn} + \delta_{in}}}$. Comme la conductivité électrique de la Terre est beaucoup plus grande que celle de l'ionosphère, l'épaisseur de peau de l'ionosphère sera beaucoup grande que celle de la Terre. On trouve $\delta_{i1} = 58\,\text{km}$ et $\delta_{i2} = 41\,\text{km}$ alors que pour la Terre $\delta_{t1} = 0,18\,\text{km}$ et $\delta_{t2} = 0,13\,\text{km}$. On trouve $\boxed{Q_1 = 3,4 \text{ et } Q_2 = 4,9}$. La méthode perturbative n'est pas tout à fait fondée puisqu'elle partait de l'hypothèse $Q \gg 1$ ce qui n'est pas le cas ici. Toutefois, un facteur de qualité de 3 ou 4 est déjà une bonne valeur. On peut penser que cette approche est quand même acceptable.

22. On a vu au début du problème que $\tau_n \simeq \frac{2Q_n}{\omega_n}$. Pour le mode $n = 1$, on peut donc écrire que $\tau_1 = \frac{Q_1}{\pi f_1}$. Avec les valeurs numériques que l'on a déterminées, on trouve : $\boxed{\tau_1 \simeq 0,5\,\text{s}}$. Cette durée est 50 fois plus grande que la durée moyenne qui s'écoule entre deux impacts de foudre sur Terre.