

Devoir libre de Sciences Physiques n°8 du 17-03-2025

— Solutions —

Problème n° 1 – Imagerie par résonance magnétique

X MP 2011

A. Production de champs magnétiques intenses et homogènes

1. Puisque tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, celle-ci doit être perpendiculaire à ce type de plan. La densité volumique de courant est donc nécessairement orthoradiale. Sur le plan des invariances, on peut négliger l'influence des bords et donc supposer l'invariance en z . Par la symétrie autour de l'axe Oz , on a une invariance par rotation d'angle θ . La distribution de courant est donc :

$$\vec{j} = j_\theta(r)\vec{e}_\theta.$$

2. Du fait des invariances, les composantes du champ magnétique ne vont pas dépendre de θ et de z . Comme la densité de courant est orthoradiale, un plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de cette distribution à condition, toujours, de négliger les effets de bord. Le champ magnétique est donc perpendiculaire à ce plan, il est donc orienté sur l'axe Oz , on aura $\vec{B} = B_z(r)\vec{e}_z$. Si, on ne peut pas négliger les effets de bord, alors seuls les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ qui sont des Π^- peuvent être utilisés. Le champ est donc contenu dans ces plans et, à ce moment-là, le champ s'exprime selon :

$$\vec{B} = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z.$$

3. Cette situation est à rapprocher de celle du solénoïde. Le champ magnétique sera uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur. Il évoluera de façon continue entre $r = R_1$ et $r = R_2$ à l'intérieur de la zone parcourue par les courants. Pour déterminer le champ magnétique sur l'axe, on applique le théorème d'AMPÈRE de la magnéto-statique sur un contour rectangulaire qui s'appuie sur l'axe Oz pour la longueur h et qui pour sa largeur va à l'extérieur du champ magnétique qui est nul. On a donc $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$ qui s'écrit $B_0 h = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$ car sur les côtés d'orientation \vec{e}_r , il n'y a pas de contribution puisque $B_z(r)\vec{e}_z \cdot dr\vec{e}_r = 0$. Le courant enlacé correspond au flux de \vec{j} à travers le contour rectangulaire. On trouve facilement que $i_{\text{enlacé}} = j_\theta h(R_2 - R_1)$. On peut donc écrire que :

$$B_0 = \mu_0 j_\theta (R_2 - R_1).$$

4. La puissance volumique dissipée par effet JOULE est $p_{\text{vol}} = \frac{j_\theta^2}{\sigma}$. On intègre sur le volume occupé par les courants : $P_J = \iiint p_{\text{vol}} d\tau = \iiint p_{\text{vol}} r dr d\theta dz$. On trouve $P_J = \frac{j_\theta^2}{\sigma} \pi (R_2^2 - R_1^2) L$. En remplaçant j_θ par son expression en fonction de B_0 , on arrive à

$$P_J = \frac{B_0^2}{\sigma \mu_0^2} \pi L \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}.$$

5. On calcule $\frac{dP_J}{dR_1} = \frac{B_0^2}{\sigma \mu_0^2} \pi L \frac{2R_2}{(R_2 - R_1)^2} > 0$. Cette dérivée est toujours positive, la fonction est donc toujours croissante en fonction de R_1 en sachant que R_1 est inférieure à R_2 . La puissance JOULE sera minimisée pour

$R_1 \rightarrow 0$. L'espace disponible au cœur du solénoïde devra être le plus petit possible.

6. On prend donc $R_1 = 0$ et alors $P_J = \frac{B_0^2}{\sigma \mu_0^2} \pi L$. L'application numérique donne $P_J = 56 \text{ kW}$ ce qui est loin d'être ridicule puisque la puissance d'un radiateur électrique ordinaire est de l'ordre de 1 kW. Cette puissance élevée va engendrer des contraintes importantes sur le plan technique, il faudra en particulier songer à refroidir le dispositif efficacement.

7. Si l'on ne regarde que l'expression de la puissance dissipée, celle-ci sera d'autant plus faible (toujours pour un champ B_0 donné) si R_2 est grand et donc par voie de conséquence la température aussi. Mais cela va avoir un coût sur le plan économique et sur le plan mécanique par la taille du dispositif. Si l'on envisage le refroidissement par une fluide circulant autour du solénoïde, on aura de la convection par la surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\pi R_2 L$. On constate, là encore, que plus le rayon R_2 sera élevé plus la température de régime permanent sera faible.

8. On ne peut avoir très rigoureusement $\vec{j} = j_\theta \vec{e}_\theta$ car l'enroulement des spires fait que l'on a plutôt une hélice avec une petite contribution de la densité de courant sur l'axe Oz . Pour que ce phénomène d'hélice soit le moins significatif, il faut plutôt progresser dans l'enroulement en faisant une première couche pour aller d'un bout à l'autre puis mettre la seconde couche en revenant en arrière et ainsi de suite.

9. En ce qui concerne l'uniformité du champ magnétique, il faut essayer de compenser le fait que le solénoïde est fini et donc renforcer sans doute un peu le nombre de tours en partant du centre et en allant vers les bords. La façon d'enrouler le fil est d'ailleurs incompatible avec ce second objectif. N'oublions pas que l'on peut obtenir un champ magnétique uniforme dans la configuration des bobines de HELMHOLTZ. L'évolution de la valeur du champ magnétique sur l'axe est proposé à la figure 1.

10. On a $\text{div } \vec{B} = 0$. Comme nous sommes en coordonnées cylindriques avec invariance en θ , la divergence devient $\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. L'intégration par rapport à r donne $rB_r = -\frac{r^2}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$ en supposant qu'en dehors de l'axe Oz mais à son voisinage, on peut utiliser l'expression du champ magnétique sur l'axe. La constante

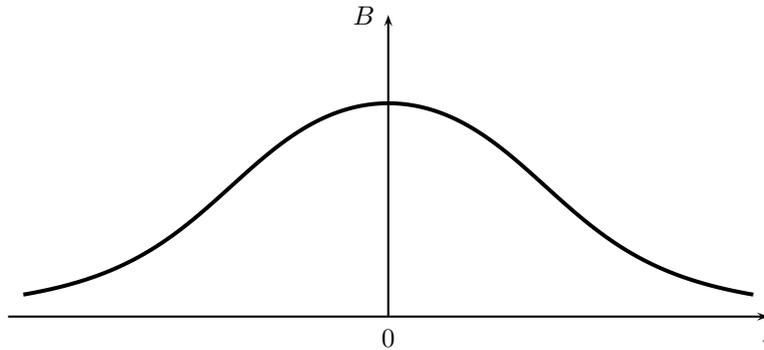


FIGURE 1 – Valeur du champ magnétique sur l’axe

d’intégration est nulle puisque pour $r = 0$, le champ magnétique reste nécessairement borné. On prouve donc que $B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$ et donc que $B_r = 0$ si le champ magnétique est uniforme sur l’axe.

B. Utilisation de supraconducteurs

11. L’équation du mouvement d’un électron dans le référentiel galiléen du laboratoire donne $m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E}$.

12. La densité volumique de courant est $\vec{j} = -ne\vec{v}_e$. On a immédiatement la relation : $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}$.

13. Dans l’approximation des régimes quasi-stationnaires, on a $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. On prend à nouveau le rotationnel de cette relation et on obtient $-\Delta \vec{B} = \mu_0 \text{rot } \vec{j}$ puisque $\text{rot } \text{rot } \vec{B} = \text{grad } \text{div } \vec{B} - \Delta \vec{B}$. En dérivant par rapport au temps cette expression, on arrive $\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{rot } \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \mu_0 \frac{ne^2}{m_e} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On obtient bien la relation $\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } (\text{rot } \vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}) = \vec{0}$ en posant $\lambda = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 ne^2}}$.

14. On trouve : $\lambda = 53 \text{ nm}$.

15. Le champ dans le vide impose, par continuité, la direction de \vec{B} selon \vec{e}_z . L’équation différentielle devient alors $\frac{d^2 B_z}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2} B_z$. La solution est de la forme $B_z(x) = \alpha \exp \frac{x}{\lambda} + \beta \exp -\frac{x}{\lambda}$. Comme il n’est pas acceptable que B_z diverge lorsque $x \rightarrow \infty$, on a forcément $\alpha = 0$. La continuité du champ en $x = 0$ impose alors $\beta = B_0$. On a donc : $\vec{B} = B_0 \exp -\frac{x}{\lambda} \vec{e}_z$. Le champ magnétique décroît très vite dans le supraconducteur sur une longueur caractéristique λ .

16. Ici, $\text{rot } \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x \wedge B_z(x) \vec{e}_z$. Avec la loi de MAXWELL-AMPÈRE, on obtient rapidement : $\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \exp -\frac{x}{\lambda} \vec{e}_y$.

C. Moments magnétiques et aimantation

17. Nous savons que $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$. L’énergie est minimale lorsque le moment magnétique est aligné dans le sens du champ magnétique et maximale lorsqu’il est dans le sens contraire : $U_{max} = -U_{min}$ avec $U_{max} = \mu B_0$. On trouve : $U_{max} = 2,1 \times 10^{-26} \text{ J}$.

18. Cette loi est la loi statistique de BOLTZMANN à l’équilibre thermique. Elle est rencontrée, par exemple, dans l’étude de l’évolution de la pression en fonction de l’altitude dans une atmosphère isotherme. La direction la plus probable est celle qui correspond à la valeur de l’énergie la plus petite possible $U_{min} = -\mu B_0$. Le moment magnétique est aligné dans le même sens que le champ, c’est sa position d’équilibre stable.

19. L’angle solide élémentaire est $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. La valeur de l’énergie potentielle d’interaction entre le moment dipolaire et le champ est $U = -\mu B_0 \cos \theta$.

20. Nous avons déjà vu que l’ordre de grandeur de U est 10^{-26} J . En prenant $T = 300 \text{ K}$ comme température ambiante, on trouve que $k_B T \simeq 10^{-21} \text{ J}$. Cette valeur est nettement supérieure à celle d’interaction magnétique, l’approximation est justifiée (sauf lorsque $\theta \simeq \frac{\pi}{2} \dots$).

21. L’aimantation de l’échantillon est $\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$. Comme N est très grand devant 1, il est parfaitement justifié de considérer que les lois statistiques s’appliquent. On écrit donc que $\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$. On peut donc écrire que $\vec{M} \simeq N \langle \vec{\mu} \rangle$.

22. On obtient alors $dp = \frac{1}{Z} \left(1 - \frac{U}{k_B T}\right) d^2\Omega$ et par conséquent $Z = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{U}{k_B T}\right) d^2\Omega$. On a $\langle \vec{\mu} \rangle = \iint \vec{\mu} dp$ avec $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_r$. On projette le moment magnétique sur les axes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on obtient $\vec{\mu} = \mu \cos \theta \vec{e}_z + \mu \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \mu \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y$. Le calcul du moment magnétique moyen fait intervenir 3 intégrales. En fait,

seule celle sur \vec{e}_z va être non nulle. Ceci est la conséquence du fait que l'interaction entre le moment magnétique et le champ magnétique est indépendante de φ . On peut l'observer aussi par le calcul puisque $\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + \frac{\mu B_0 \cos \theta}{k_B T}) \sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi = 0$. C'est exactement la même chose pour l'autre intégrale en $\sin \varphi$. On a donc $\vec{\mu} = \vec{e}_z \frac{\mu}{Z} \int_0^\pi (1 + \frac{\mu B_0 \cos \theta}{k_B T}) \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$. Dans l'intégrale en θ , le terme créé par 1 fait intervenir comme primitive $\frac{1}{2} \sin^2 \theta$ qui va s'annuler sur les bornes 0 et π . Le second terme amène $[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta]_0^\pi = \frac{2}{3}$. En terminant le calcul, on obtient provisoirement $\vec{\mu} = \vec{e}_z \frac{4\pi \mu^2 B_0}{Z 3 k_B T}$. Il faut encore calculer Z . Le calcul se conduit de la même façon qu'avant $Z = 2\pi \int_0^\pi (1 + \frac{\mu B_0 \cos \theta}{k_B T}) \sin \theta d\theta$. On progresse avec $Z = 2\pi \left([-\cos \theta]_0^\pi + \frac{\mu B_0}{k_B T} [\frac{1}{2} \sin^2 \theta]_0^\pi \right)$. On trouve donc que $Z = 4\pi$. Finalement, on arrive bien à l'expression $\vec{M} = \frac{C}{T} \vec{B}_0$ à condition de poser : $C = \frac{N \mu^2}{3 k_B}$.

23. Le couple exercé par le champ magnétique \vec{B}_0 sur le dipôle magnétique est $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$.

24. Si l'on applique le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen du laboratoire, on arrive à $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \wedge B_0$. Avec la relation $\vec{S} = \frac{\vec{\mu}}{\gamma}$, on obtient $\frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$. Cette dernière relation peut encore s'écrire $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = (-\gamma \vec{B}_0) \wedge \vec{\mu}$ qui exprime bien que $\vec{\mu}$ est un vecteur tournant à la vitesse de rotation $\vec{\omega}_0 = -\gamma B_0 \vec{e}_z$. L'application numérique demandée conduit à $\omega_0 = \gamma B_0 = \frac{\mu B_0}{S} = \frac{2\mu B_0}{\hbar}$ avec $\omega_0 = 3,8 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

25. La relation de la dynamique est $m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$. Comme précédemment, on fait apparaître un vecteur rotation est la réécrivant selon $\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{e\vec{B}_0}{m_p} \right) \wedge \vec{v}$. On a donc : $\omega_p = \frac{eB_0}{m_p}$ avec $\omega_p = 1,4 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse de rotation encore appelée pulsation cyclotron, est du même ordre de grandeur que la pulsation de LARMOR quoique légèrement inférieure.

D. Résonance magnétique

26. Pour un proton de moment magnétique $\vec{\mu}$ et de moment cinétique $\vec{S} = \frac{1}{\gamma} \vec{\mu}$, le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$. On moyenne sur l'ensemble des moments magnétiques et compte tenu de $\vec{M} = N\vec{\mu}$, on obtient bien l'équation demandée $\frac{d\vec{M}}{dt} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t)) \wedge \vec{M}$ en posant $\vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1(t)$.

27. Le changement de référentiel impose d'utiliser la relation $\frac{d\vec{M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{M}$. On arrive donc à l'équation différentielle $\frac{d\vec{M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t) - \vec{\omega}) \wedge \vec{M}$.

28. Il faut développer l'équation différentielle précédente dans une base associée au référentiel \mathcal{R}' à savoir $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ sachant que le champ magnétique \vec{B}_1 est tournant dans \mathcal{R} mais d'orientation fixe selon \vec{u}_X dans \mathcal{R}' . On pose $\vec{M} = M_X \vec{u}_X + M_Y \vec{u}_Y + M_Z \vec{u}_Z$ et comme $\vec{\omega}_0$ et $\vec{\omega}$ sont d'orientation selon \vec{u}_Z , on arrive aux trois équations différentielles suivantes : $\frac{dM_X}{dt} = (\omega - \omega_0) M_Y$, $\frac{dM_Y}{dt} = (\omega_0 - \omega) M_X + \gamma B_1 M_Z$ et $\frac{dM_Z}{dt} = -\gamma B_1 M_Y$. Si l'on dérive la seconde équation et qu'ensuite, on injecte la première et la troisième équation différentielle, on obtient l'équation l'équation d'évolution de M_Y de la forme suivante : $\frac{d^2 M_Y}{dt^2} + [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 B_1^2] M_Y = 0$. M_Y possède des solutions sinusoïdales et donc bornées. Si l'on étudie le cas particulier où $|\omega_0 - \omega| \gg \omega_1$, alors le système différentielle devient $\frac{dM_X}{dt} = (\omega - \omega_0) M_Y$, $\frac{dM_Y}{dt} = (\omega_0 - \omega) M_X$ et $\frac{dM_Z}{dt} = 0$. M_X et M_Y sont bornés et répondent tous les deux à une solution sinusoïdale de pulsation $\omega_0 - \omega$ mais dans le cas étudié, ils sont tous les deux nuls à la date $t = 0$, en pratique faibles. Ils ne peuvent que rester faibles par la suite. Selon la troisième équation, $\frac{dM_Z}{dt} = 0$, le moment magnétique reste constant sur cet axe. Le système différentiel illustre bien une rotation autour de l'axe $OZ = Oz$. Si on est proche de la résonance, à savoir $\omega_0 - \omega \simeq 0$, on a alors $\frac{dM_X}{dt} = 0$, $\frac{dM_Y}{dt} = \gamma B_1 M_Z$ et $\frac{dM_Z}{dt} = -\gamma B_1 M_Y$. Ce système différentiel montre que les solutions sont sinusoïdales, et surtout, il traduit une rotation autour de l'axe Ox . Avec les conditions initiales où $M_Y = 0$, on aura donc une rotation du moment magnétique initialement sur $OZ = Oz$ autour de Ox .

29. Compte tenu de ce que l'on vient de voir avant, le moment magnétique $\vec{M} = M \vec{u}_Z$ à $t = 0$ va tourner pour aller s'orienter sur l'axe OY après un quart de période et continuer sa rotation ainsi. Le sens de la rotation est bien celui décrit avant car le vecteur rotation est $\vec{\omega}_1 = -\gamma B_1 \vec{u}_X$. Cette description est valable dans \mathcal{R}' , pour le référentiel \mathcal{R} il faut composer cette rotation d'une rotation supplémentaire à la vitesse $\omega = \omega_0$ autour de l'axe Oz . La trajectoire suivie par l'extrémité du moment magnétique \vec{M} est une sorte d'hélice.

30. On a trouvé $\omega_0 = 3,8 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et donc $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 60 \text{ MHz}$. C'est le domaine des ondes radioélectriques.

31. Le vecteur de POYNTING est défini par $\vec{\Pi} = \vec{E}_1 \wedge \frac{\vec{B}_1}{\mu_0}$. Pour une onde plane progressive dans le vide, nous savons que $\vec{B}_1 = \frac{1}{c} (\vec{u}_1 \wedge \vec{E}_1)$. En n'oubliant pas de prendre la valeur moyenne temporelle du vecteur de POYNTING, on arrive à $E_1 = c B_1 = 9 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\langle \Pi \rangle = \frac{c B_1^2}{2\mu_0} = 10^5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Cette puissance surfacique

peut paraître élevée mais il ne faut pas oublier que ce résultat correspondra plus à une onde laser qu'à celui d'une onde émise par une source plus traditionnelle.

32. Comme nous l'avons dit précédemment, la rotation d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ correspond à un quart de période pour $\omega_1 = \gamma B_1$. Nous avons donc $\tau = \frac{\pi}{2\gamma B_1}$. Avec $\gamma = \frac{2\mu}{h} = 2,55 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$, on trouve $\tau = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$.

Lorsqu'ensuite le champ magnétique \vec{B}_1 est remis à zéro, on a alors $\frac{dM_Y}{dt} = \frac{dM_Z}{dt} = 0$. De plus, comme nous avons $\omega = \omega_0$, on avait $\frac{dM_X}{dt} = 0$. Ces trois équations prouvent bien qu'au-delà de $t = \tau$, le moment magnétique est bien constant. L'orientation de ce moment magnétique constant est selon $+\vec{u}_Y$ à cause du quart de tour effectué et du sens de la rotation.

33. L'aimantation de l'échantillon pour $t \gg \tau$ dans \mathcal{R}' va **tendre vers 0** car les moments magnétiques vont tourner de façon aléatoire.

34. Pour $\delta\omega = 0$, c'est-à-dire à la résonance, la réponse est aisée puisque entre T_E et $T_E + 2\tau$, on a une demi-période de rotation. Le moment magnétique va donc se retrouver sur une orientation $-\vec{u}_Y$. Ensuite le moment magnétique conserve cette même orientation puisque nous avons démontré que le moment magnétique était alors constant. Pour $\delta\omega \neq 0$, les choses sont un peu plus complexes. Considérons un volume élémentaire dV pour lequel on a un champ magnétique non uniforme et donc pour lequel $\delta\omega \neq 0$. Ce volume possède un moment magnétique élémentaire que nous noterons \vec{m} par souci de simplification des notations. À la date $t = \tau$, la situation initiale est $m_X = 0$, $m_Y = m_0$ et $m_Z = 0$. Après cette date où \vec{B}_1 a été coupé, les composantes du moment magnétique suivent les équations différentielles $\frac{dm_X}{dt} = \delta\omega m_Y$ et $\frac{dm_Y}{dt} = -\delta\omega m_X$. Cela correspond à la même équation différentielle $\frac{d^2 m_{X,Y}}{dt^2} + \delta\omega^2 m_{X,Y} = 0$. Pour $t \geq \tau$, on trouve facilement que $m_X = m_0 \sin \delta\omega(t - \tau)$ et $m_Y = m_0 \cos \delta\omega(t - \tau)$. En appliquant ces formules à la date $t = T_E$, on obtient $m_X = m_0 \sin \delta\omega(T_E - \tau)$ et $m_Y = m_0 \cos \delta\omega(T_E - \tau)$. Pour passer à la date $t = T_E + 2\tau$, il faut exprimer à la fois l'écoulement du temps et la rotation de π du moment magnétique sur OY . On a donc pour cette date $m_X = m_0 \sin \delta\omega(T_E + \tau)$ et $m_Y = -m_0 \cos \delta\omega(T_E + \tau)$. L'énoncé nous indique que $\tau \ll T_E$, par la suite, on négligera la durée τ dans les expressions manipulées. On peut écrire qu'à la date $t = T_E$ (par approximation de $T_E + 2\tau$), la situation des moments magnétiques est $m_X = m_0 \sin \delta\omega T_E$ et $m_Y = -m_0 \cos \delta\omega T_E$. Au-delà de cette date, le champ magnétique \vec{B}_1 est de nouveau coupé. Les solutions sinusoïdales peuvent s'écrire sous la forme $m_X = \alpha \cos \delta\omega(t - T_E) + \beta \sin \delta\omega(t - T_E)$ et $m_Y = \alpha' \cos \delta\omega(t - T_E) + \beta' \sin \delta\omega(t - T_E)$. À la date $t = T_E$ la valeur des moments magnétiques entraîne $\alpha = m_0 \sin \delta\omega T_E$ et $\alpha' = -m_0 \cos \delta\omega T_E$. Pour déterminer les deux autres constantes d'intégration, il faut utiliser les conditions initiales sur les dérivées premières sachant que $\frac{dm_X}{dt} = \delta\omega m_Y$ et $\frac{dm_Y}{dt} = -\delta\omega m_X$. On a $\frac{dm_X}{dt}|_{T_E} = \delta\omega\beta = \delta\omega m_Y|_{T_E} = \delta\omega\alpha'$. Cette équation conduit à $\beta = \alpha'$. En pratiquant le même calcul pour l'autre composante, on trouve facilement que $\beta' = -\alpha$. Grâce à ses résultats, on montre que $m_X = m_0 [\sin \delta\omega T_E \cos \delta\omega(t - T_E) - \cos \delta\omega T_E \sin \delta\omega(t - T_E)]$ et $m_Y = -m_0 [\cos \delta\omega T_E \cos \delta\omega(t - T_E) + \sin \delta\omega T_E \sin \delta\omega(t - T_E)]$. Ces deux expressions se simplifient énormément avec l'écriture : $m_X = -m_0 \sin \delta\omega(t - 2T_E)$ et $m_Y = -m_0 \cos \delta\omega(t - 2T_E)$. Avec ces deux expressions, on constate qu'à la date $t = 2T_E$, on a $m_X = 0$ et $m_Y = -m_0$. Finalement, le résultat est le même pour $\delta\omega = 0$ et pour $\delta\omega \neq 0$: à la date $t = 2T_E$, on a **$M_X = 0$ et $M_Y = -M_0$** . Ceci permet de bien comprendre l'intérêt de la technique dite de l'écho de spin, les moments magnétiques individuels sont à nouveau organisés de façon cohérente pour créer une aimantation macroscopique décelable.

35. La constante de temps τ est très petite devant T_1 et T_2 . Il est logique de négliger le processus de relaxation lors de l'interaction entre les moments magnétiques et le champ magnétique \vec{B}_1 . D'après l'équation différentielle, M_X a pour solution $M_X = M_{X0} \exp -\frac{t}{T_2}$. Mais comme $M_{X0} = 0$, on a **$M_X = 0$** $\forall t$. De la même façon on montre facilement que **$M_Y = M_0 \exp -\frac{t}{T_2}$** . On notera qu'ici la date évoquée t correspond en fait à $t - \tau$. Pour M_Z , il est évident que **$M_Z = M_0(1 - \exp -\frac{t}{T_1})$** . Les courbes sont représentées sur le graphique 2.

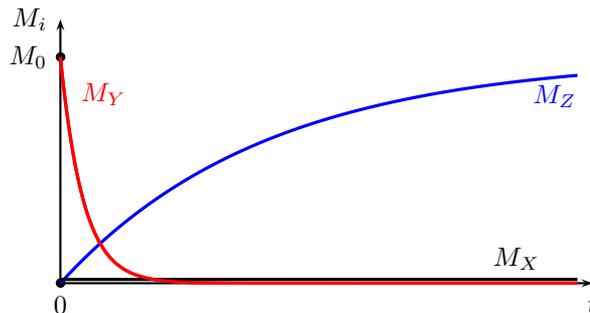


FIGURE 2 – Relaxations des moments magnétiques

36. Il faut choisir la durée T_E comme étant intermédiaire entre les ordres de grandeurs de τ et de T_2 . Comme

$\tau = 0, 2$ ms et $T_2 = 0, 1$ s, on pourra prendre $T_E = 10$ ms.

Problème n° 2 – Interférométrie atomique

Centrale PC 2017

A. Diffraction du jet atomique par une onde stationnaire

Ondes stationnaires

1. Le champ électrique incident sur le plan conducteur parfait situé en $x = x_M$ est tangentiel. Dans le conducteur parfait, le champ électrique est nul. Le champ réfléchi sera nécessairement tangentiel lui aussi pour pouvoir assurer la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} . Il est beaucoup plus simple d'effectuer les calculs en complexes. On commence par poser $\vec{E}_+ = \vec{e}_y E_0 \exp i(\omega_L t - k_L x)$. Le champ réfléchi sera de la forme $\vec{E}_- = \vec{E}_r \exp i(\omega_L t + k_L x)$ où \vec{E}_r est une amplitude complexe (et vectorielle). On se place en x_M , on a donc la condition $\vec{E}_r \exp i(\omega_L t + k_L x_M) + \vec{e}_y E_0 \exp i(\omega_L t - k_L x_M) = \vec{0}$. On en déduit que $\vec{E}_r = -\vec{e}_y E_0 \exp -2ik_L x_M$. Le champ électrique de l'onde réfléchie est donc $\vec{E}_- = -\vec{e}_y E_0 \exp i(\omega_L t + k_L(x - 2x_M))$. Il faut maintenant superposer les deux champs pour obtenir le champ total existant dans le vide. On se doute à l'avance que l'on va obtenir un champ électrique d'une onde stationnaire. On a donc $\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \exp i(\omega_L t - k_L x_M) [\exp i - k_L(x - x_M) - \exp ik_L(x - x_M)]$. Or, on a $[\exp i - k_L(x - x_M) - \exp ik_L(x - x_M)] = -2i \sin k_L(x - x_M)$. En reportant le déphasage lié à $-i = \exp -i\frac{\pi}{2}$ sur la partie temporelle de la forme du champ électrique. On obtient l'expression $\vec{E} = \vec{e}_y 2E_0 \sin k_L(x - x_M) \sin(\omega_L t - k_L x_M)$. Cela permet de déterminer la forme de l'amplitude de l'onde stationnaire demandée : $E(x) = 2E_0 \sin k_L(x - x_M)$.

Notion de potentiel lumineux

2. On a $V = -\frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \alpha \vec{E}^2 = \frac{d^2}{2\hbar\delta_L} \vec{E}^2$. On en déduit que $\langle V(x, t) \rangle_t = \frac{d^2}{4\hbar\delta_L} E(x)^2$. On peut donc écrire que $W(x) = \frac{d^2 E_0^2}{\hbar\delta_L} \sin^2 k_L(x - x_M)$. D'après le formulaire fourni, on peut aisément voir que $\cos 2k_L(x - x_M) - 1 = -2 \sin^2 k_L(x - x_M)$. Cela permet d'arriver à l'expression de la moyenne temporelle du potentiel lumineux sous la forme préconisée : $W(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 E_0^2}{\hbar\delta_L} (1 - \cos 2k_L(x - x_M))$. On peut donc identifier les grandeurs posées par l'énoncé : $V_0 = -\frac{d^2 E_0^2}{\hbar\delta_L}$ où l'on sera attentif au fait que le signe de V_0 dépend de la position de la pulsation du laser par rapport à la pulsation de résonance atomique puisque $\delta_L = \omega_L - \omega_0$. On a aussi : $k_r = 2k_L$. Cela est logique puisque d'une façon très générale, la périodicité spatiale d'une onde stationnaire est la moitié de la périodicité spatiale, c'est-à-dire de la longueur d'onde, de l'onde progressive à l'origine de l'onde stationnaire.

Équation de propagation de l'onde de matière

3. La longueur d'onde de DE BROGLIE est : $\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = 5,4 \times 10^{-11}$ m.

4. D'après la relation d'EINSTEIN, on a $\vec{p} = m\vec{v} = \hbar\vec{k}_i$. L'énergie associée qui se résume à l'énergie cinétique est donc $E_i = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$. On peut donc en conclure que $E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$. On trouve : $E_i = 1,3 \times 10^{-20}$ J = 0,08 eV.

5. L'équation de propagation d'un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}(x, z, t)$ se propageant dans le vide est l'équation de D'ALEMBERT qui s'écrit $\Delta \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}$. Si on étudie une onde monochromatique, on a alors $\Delta \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mathcal{E}}$. Or, dans le vide, la relation de dispersion définit le vecteur d'onde dans le vide par $k_v^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Si on transpose dans le milieu matériel transparent, on obtient alors un second membre faisant intervenir l'indice selon : $\Delta \vec{\mathcal{E}} = -\frac{n^2(x)\omega^2}{c^2} \vec{\mathcal{E}} = -n^2(x)k_v^2 \vec{\mathcal{E}}$. Comme le champ électrique ne dépend pas de y , le laplacien se réduit à deux dérivations, celle par rapport à x et celle par rapport à z . On obtient donc bien l'équation : $\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2} + n^2(x)k_v^2 \vec{\mathcal{E}} = 0$.

6. On réécrit l'équation de SCHRÖDINGER pour avoir $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{2mE_i}{\hbar^2} (1 - \frac{W(x)}{E_i}) \varphi = 0$. Comme on l'a vu avant, on a $E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$. On peut donc écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde selon $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_i^2 (1 - \frac{W(x)}{E_i}) \varphi = 0$. On peut donc, par analogie, poser $n^2(x) = 1 - \frac{W(x)}{E_i}$. On a donc $n^2(x) = 1 + \frac{V_0}{2E_i} (1 - \cos k_r(x - x_M))$. L'énoncé indique que l'on peut considérer $V_0 \ll E_i$, on passe donc à l'indice $n(x)$ en prenant la racine positive tout en effectuant un développement limité. On arrive alors à $n(x) = 1 + \frac{V_0}{4E_i} (1 - \cos k_r(x - x_M))$. Le pas de ce réseau correspond à la périodicité spatiale de $\cos k_r(x - x_M)$. On a donc $\Lambda = \frac{2\pi}{k_r} = \frac{\pi}{k_L} = \frac{\lambda_L}{2}$. On a donc $\Lambda = 336$ nm. L'indice n_1 provoquant la modulation est $n_1 = \frac{|V_0|}{4E_i}$.

7. On transforme un peu l'équation précédente pour faire passer le terme en cosinus de l'autre côté de l'égalité. On obtient $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 + \frac{V_0}{2E_i}) k_i^2 \varphi = k_i \frac{V_0 k_i}{2E_i} \cos k_r(x - x_M) \varphi$. Pour obtenir la forme proposée, il faut négliger

$\frac{V_0}{2E_i}$ devant 1. On pose donc $4K = \frac{V_0 k_i}{2E_i}$. Or, nous avons vu à la question précédente que $\frac{V_0}{2E_i} = 2n_1$. On obtient alors : $K = \frac{\pi n_1}{\lambda_{DB}}$.

Résolution de l'équation de propagation

8. Nous avons vu que l'énergie incidente était $E_i = \frac{\hbar^2 \vec{k}_i^2}{2m}$ pour l'onde incidente. Pour l'onde diffractée, on a $E_d = \frac{\hbar^2 \vec{k}_d^2}{2m}$. Si l'énergie est conservée, alors $E_i = E_d$ impose que $\vec{k}_i^2 = \vec{k}_d^2$. Or, nous avons $\vec{k}_d = \vec{k}_i - \vec{k}_r$. On en déduit l'égalité $\vec{k}_i^2 = \vec{k}_i^2 + \vec{k}_r^2 - 2\vec{k}_i \cdot \vec{k}_r$. On a donc $\vec{k}_r^2 = 2\vec{k}_i \cdot \vec{k}_r = 2k_i(\cos \theta_i \vec{e}_z + \sin \theta_i \vec{e}_x) \cdot k_r \vec{e}_x$. On trouve que $k_r^2 = 2k_i k_r \sin \theta_i$. Cela conduit à la relation $k_r = 2k_i \sin \theta_i$. Comme les vecteurs d'onde sont tels que $k_r = \frac{2\pi}{\Lambda}$ et $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_{DB}}$. On en déduit que $\lambda_{DB} = 2\Lambda \sin \theta_i$. Cette loi est l'équivalent de la loi de BRAGG vue avec la diffraction des ondes lumineuses par un réseau optique. Ici, on a $\lambda_{DB} = \lambda_L \sin \theta_i$.

9. L'angle θ_B est donc tel que $\sin \theta_B = \frac{\lambda_{DB}}{\lambda_L}$. On trouve la valeur $\theta_B = 8 \times 10^{-5} \text{ rad}$. On peut constater que l'angle θ_B est très petit.

10. Pour trouver l'angle que fait le faisceau diffracté avec l'axe \vec{e}_z , on effectue le produit scalaire $\vec{k}_d \cdot \vec{e}_z = k_d \cos \theta_d = \vec{k}_i \cdot \vec{e}_z - k_r \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z$. On trouve que $\vec{k}_d \cdot \vec{e}_z = k_d \cos \theta_d = k_i \cos \theta_i$. Comme par conservation de l'énergie, on a vu que $k_d = k_i$, on en déduit que $\cos \theta_d = \cos \theta_i$. Il y a donc deux solutions : $\theta_d = \theta_i$ et $\theta_d = -\theta_i$. Compte tenu de la relation vectorielle $\vec{k}_d = \vec{k}_i - \vec{k}_r$, la solution $\theta_d = \theta_i$ ne va pas. On a forcément $\theta_d = -\theta_i$. Ainsi \vec{k}_i et \vec{k}_d constitue les deux côtés égaux d'un triangle isocèle dont le troisième côté est \vec{k}_r .

11. On a deux ondes planes se propageant dans les directions fixées par les vecteurs d'onde \vec{k}_i et \vec{k}_d .

12. Les conditions aux limites $\beta_i(z=0) = \beta_0$ et $\beta_d(z=0) = 0$ signifient d'une part que juste avant d'aborder l'onde stationnaire lumineuse qui sert de réseau de diffraction, on a uniquement l'onde incidente d'amplitude β_0 et qu'il n'y a pas d'onde diffractée puisque $\beta_d(z=0) = 0$.

13. On note L la longueur caractéristique de l'évolution en z des coefficients β_i et β_d . On peut donc écrire que $\frac{d\beta}{dz} \simeq \frac{\beta}{L}$ et $\frac{d^2\beta}{dz^2} \simeq \frac{\beta}{L^2}$. Dans le système précédent $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_{DB}}$, par conséquent comparer le terme en dérivée seconde et celui en dérivée première revient à comparer $\frac{\beta}{L^2}$ à $\frac{\beta}{\lambda_{DB}L}$. Comme les variations de β sont lentes à l'échelle de la longueur d'onde de DE BROGLIE, on a $L \ll \lambda_{DB}$. On peut donc écrire que $\frac{\beta}{L^2} \ll \frac{\beta}{\lambda_{DB}L}$ et par conséquent $\frac{d^2\beta}{dz^2} \ll k_i \frac{d\beta}{dz}$ en raisonnant sur des quantités positives. On peut donc bien négliger les dérivées secondes dans le système différentiel proposé.

14. Après simplification des deux équations différentielles, on obtient d'une part $i \cos \theta_i \frac{d\beta_i}{dz} = K \exp -ik_r x_M \beta_d$ et $i \cos \theta_i \frac{d\beta_d}{dz} = K \exp ik_r x_M \beta_i$. Le découplage du système est assez simple en dérivant la première équation par rapport à z . On obtient $i \cos \theta_i \frac{d^2\beta_i}{dz^2} = K \exp -ik_r x_M \frac{d\beta_d}{dz} = \frac{K^2}{i \cos \theta_i} \beta_i$. On obtient ainsi l'équation différentielle $\frac{d^2\beta_i}{dz^2} + \frac{K^2}{\cos^2 \theta_i} \beta_i = 0$. Cela revient à poser une pulsation spatiale propre : $\nu = \frac{K}{\cos \theta_i}$.

15. L'équation précédente est une équation d'oscillateur harmonique. On obtient donc $\beta_i = A \cos \nu z + B \sin \nu z$. En $z = 0$, on a $\beta_i = \beta_0 = A$. De plus, en dérivant, on arrive à $\frac{d\beta_i}{dz} = -\beta_0 \nu \sin \nu z + B \nu \cos \nu z$. Or, en $z = 0$, on a $\frac{d\beta_i}{dz} \Big|_{z=0} = 0$ car $\beta_d(z=0) = 0$. On peut donc conclure que $B = 0$ et donc que : $\beta_i = \beta_0 \cos \nu z$.

16. Pour trouver l'amplitude de l'onde diffractée, on utilise $\beta_d = i \frac{\cos \theta_i}{K} \exp ik_r x_M \frac{d\beta_i}{dz}$. Avec $\frac{\cos \theta_i}{K} = \frac{1}{\nu}$, on arrive à $\beta_d = -i \beta_0 \sin \nu z \exp ik_r x_M$. La sortie de l'onde stationnaire s'effectue en $z = D$. Les ondes incidentes et diffractées sont $\varphi_i(\vec{r}) = \beta_0 \cos \nu D \exp i\vec{k}_i \cdot \vec{r}$ et $\varphi_d(\vec{r}) = -i \beta_0 \sin \nu D \exp i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_M \exp i\vec{k}_d \cdot \vec{r}$. On peut voir que les modules des amplitudes des deux ondes évoluent en $\cos \nu D$ et $\sin \nu D$, cela veut dire que si une onde est maximale par exemple $\cos \nu D = 1$ alors $\sin \nu D = 0$ l'autre n'existe pas et réciproquement. La longueur caractéristique d'évolution de β_i et de β_d est donnée par la période spatiale de $\cos \nu D$. On a donc $L = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi \cos \theta_i}{K}$. Or, d'après ce qui a été vu avant, on a $K = \frac{2\pi n_1}{\lambda_{DB}}$. On a donc $L = \frac{\cos \theta_i}{n_1} \lambda_{DB}$. or, $n_1 = \frac{V_0}{4E_i} \ll 1$. On a donc bien $L \gg \lambda_{DB}$. L'hypothèse d'une amplitude lentement variable pour β_i et β_d est parfaitement justifiée.

17. Avec la forme posée par l'énoncé, il est évident que $\alpha(0) = \cos \nu D$ et que $\alpha(-1) = -i \sin \nu D \exp i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_M$.

18. L'efficacité de la diffraction η sera définie sur l'énergie qui correspond à l'onde diffractée rapportée à celle de l'onde incidente. L'énergie est au carré de l'amplitude des ondes. Si l'on prend comme référence l'énergie proportionnelle à β_0^2 pour l'onde incidente juste avant d'entrer dans la zone de l'onde stationnaire, on a pour l'onde diffractée une énergie proportionnelle à $\beta_0^2 \sin^2 \nu D$. L'efficacité est alors : $\eta = \sin^2 \nu D$. La valeur maximale de l'énergie diffractée est obtenue pour $\nu D = (2p + 1) \frac{\pi}{2}$.

Puissance laser

19. L'onde plane monochromatique se propageant dans le vide possède un champ électrique $\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \cos(\omega_L t - k_L x)$. Le champ magnétique est donné par la relation de structure $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E} = \vec{e}_z \frac{E_0}{c} \cos(\omega_L t - k_L x)$. Par conséquent, le vecteur de POYNTING est $\vec{\Pi} = \vec{e}_x \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega_L t - k_L x)$. Raisonner sur la grandeur instantanée du flux surfacique n'est pas très intéressant, c'est la valeur moyenne qui a plus de sens. On a donc $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{e}_x \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$. Son flux à travers une surface est $\Phi = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot dS \vec{e}_x = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$. L'éclairement sera noté \mathcal{E}_c . Puisqu'il s'agit du flux moyen rapporté à l'unité de surface, on a : $\mathcal{E}_c = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$.

20. Pour minimiser la puissance du laser, il faut choisir l'entier le plus petit dans la relation $\nu D = (2p + 1) \frac{\pi}{2}$. On choisit bien évidemment $p = 0$. En effet, on a donc $\nu = \frac{2\pi n_1}{\cos \theta_i \lambda_{DB}}$ avec $\cos \theta_i \simeq 1$ tant l'angle θ_i est petit. La condition est donc $\frac{2\pi n_1}{\lambda_{DB}} D = (2p + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Nous avons $n_1 = \frac{V_0}{4E_i}$ et $V_0 = \frac{d^2 E_0^2}{\hbar \delta_L}$. On voit donc bien que pour minimiser la puissance du laser et donc de E_0^2 , il faut bien prendre $p = 0$. On a donc $E_{0,min}^2 = -\frac{\lambda_{DB} E_i \hbar \delta_L}{d^2 D}$. On obtient ensuite l'éclairement minimal $\mathcal{E}_{c,min} = -\frac{h^2 \nu \delta_L}{\mu_0 c 8\pi d^2 D}$. Il ne faut pas oublier que la question du signe ne se pose pas car on raisonne depuis le début avec $\delta_L < 0$. La section du laser est $\pi \frac{D^2}{4}$, on en déduit la puissance minimale du laser $P_{L,min} = -\frac{h^2 \nu \delta_L D}{32\mu_0 c d^2}$. On trouve : $P_{L,min} = 5,7 \text{ mW}$. Nous avons déjà calculé $E_i = 1,3 \times 10^{-20} \text{ J}$, il faut encore calculer V_0 . On a $V_0 = -\frac{d^2 E_{0,min}^2}{\hbar \delta_L} = \frac{\lambda_{DB} E_i}{D}$. On en déduit que $\frac{V_0}{E_i} = \frac{\lambda_{DB}}{D} = 5,4 \times 10^{-9} \ll 1$. Négliger V_0 devant E_i est parfaitement justifié.

21. Pour atteindre une efficacité de diffraction de 50%, il faut que $\sin^2 \nu' D = \frac{1}{2}$. On a donc $\sin \nu' D = \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'angle correspondant est donc de 45° alors qu'il était de 90° dans le cas précédent. On a donc $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{2}$. Comme ν est proportionnel à n_1 qui est lui-même proportionnel à $E_{0,min}^2$. La puissance du laser doit donc être divisée par 2. On a $P'_{L,min} = 2,85 \text{ mW}$.

22. Pour atteindre l'efficacité de diffraction maximale, on peut jouer sur D mais aussi sur E_i et δ_L .

B. Interféromètre de Mach-Zehnder

Signal de sortie de l'interféromètre

23. On peut voir sur la figure proposée par l'énoncé que les trois ondes stationnaires lumineuses se comportent soit comme des miroirs pour l'onde de matière soit comme des dispositifs transparents. C'est comme des **lames semi-réfléchissantes** que l'on a pu voir dans des interféromètres de MICHELSON ou de MACH-ZEHNDER. On peut aussi revenir sur ce qui a été dit, à savoir que chaque onde stationnaire lumineuse est assimilable à un réseau optique de périodicité $\Lambda = \frac{\lambda}{2}$.

24. Pour établir l'expression de l'onde haute et de l'onde basse, il faut traiter une par une les actions des trois ondes stationnaires en prenant garde à l'incidence initiale qui correspond à une situation $\theta_i < 0$ et lors des passages dans les zones d'ondes stationnaires des valeurs de $q \in \{-1, 0, 1\}$. On a donc $\varphi_h = \beta_0 \alpha_1 (+1) \exp i \vec{k}_d \cdot \vec{AB}_h \alpha_2 (-1) \exp i \vec{k}_i \cdot \vec{B}_h \vec{C} \alpha_3 (0) \exp i \vec{k}_i \cdot \vec{CD}$. Pour l'onde basse, on obtient $\varphi_b = \beta_0 \alpha_1 (0) \exp i \vec{k}_i \cdot \vec{AB}_b \alpha_2 (+1) \exp i \vec{k}_d \cdot \vec{B}_b \vec{C} \alpha_3 (-1) \exp i \vec{k}_i \cdot \vec{CD}$. Dans cette question, c'est surtout la différence de phase des ondes qui compte plutôt que l'expression des phases de chacune. Or, d'après la figure, on voit que $\vec{AB}_h = \vec{BbC}$ et que $\vec{AB}_b = \vec{B}_h \vec{C}$. On voit que les phases qui apparaissent dans les exponentielles ci-dessus sont donc égales. On aurait pu le dire dès le départ en raisonnant comme en Optique avec la notion de chemin optique et de différence de marche. Le déphasage entre les deux ondes se crée dans les facteurs $\alpha_i(q)$. On peut constater que les amplitudes des deux ondes sont identiques $a_h = a_b = \beta_0 \cos \nu D \sin^2 \nu D$. La phase sur l'onde passant par le haut est $\phi_h = \exp i \vec{k}_r \cdot (\vec{r}_{M1} - \vec{r}_{M2})$ et celle sur l'onde passant par le chemin bas est $\phi_b = \exp i \vec{k}_r \cdot (\vec{r}_{M2} - \vec{r}_{M3})$.

25. Le nombre d'atomes détectés en moyenne et par unité de temps correspond à l'intensité en Optique. Comme il s'agit d'une interférence à deux ondes déphasées de $\phi_0 = \phi_h - \phi_b$, on a logiquement la formule de FRESNEL : $I = I_0 (1 + \cos \phi_0)$ avec $\phi_0 = \vec{k}_r \cdot (\vec{r}_{M1} - 2\vec{r}_{M2} + \vec{r}_{M3})$. On peut exprimer cette phase avec les abscisses des différents miroirs : $\phi_0 = k_r (x_{M1} - 2x_{M2} + x_{M3})$.

26. Lorsqu'on déplace le miroir ($M3$) le long de l'axe \vec{e}_x , on change la valeur de x_{M3} . On va passer successivement d'une frange brillante à une frange sombre. L'interfrange i_3 correspond à la périodicité spatiale de la phase ϕ_0 par rapport à x_{M3} . On a $i_3 = \frac{2\pi}{k_r} = \Lambda = \frac{\lambda_L}{2}$.

27. Si c'est le miroir ($M2$) que l'on déplace le long de l'axe \vec{e}_x , la périodicité spatiale est **moitié** à cause du coefficient 2 devant x_{M2} dans l'expression de la phase ϕ_0 . On a donc $i_2 = \frac{2\pi}{2k_r} = \frac{\Lambda}{2} = \frac{\lambda_L}{4}$. On peut en profiter pour faire remarquer que si l'on déplace le miroir $M1$ alors l'interfrange perçu sera le même pour $M3$: $i = i_3$.

Application à la mesure d'une vitesse de rotation

28. Chaque abscisse d'un miroir correspond à une date donnée pour le moment où l'onde de matière traverse l'onde stationnaire. On a donc $\phi_0 = k_r(x_1(t_1) - 2x_2(t_2) + x_3(t_3))$.

29. Comme la distance sur l'axe Oz séparant les miroirs est toujours $L = vT$, on peut effectuer un développement limité pour écrire que $x_1(t_1) = x_1(t_2 - T) = x_{M1}(t_2) - v_{1x}T$. De la même façon, $x_3(t_3) = x_3(t_2 + T) = x_{M3}(t_2) + v_{3x}T$. L'expression $\phi_0 = k_r(x_{M1}(t_2) + x_{M3}(t_2) - 2x_{M2}(t_2)) + (v_{3x} - v_{1x})T$. $\delta x(t_2)$ représente la position moyenne des miroirs à la date t_2 . Si l'on suppose ensuite que $\delta x(t_2) = 0$, on en déduit que $x_{M2} = \frac{x_{M1} + x_{M3}}{2}$. C'est bien une position moyenne qui montre qu'une rotation autour de M_2y sera sentie par le dispositif.

30. On a $\Delta x = \|\overrightarrow{B_i B_h}\|$. On travaille dans le cas où $\theta_i = \theta_B$. Comme les vecteurs font le même angle θ_B par rapport à la direction Oz , on a $\Delta x = 2L \tan \theta_B = 2L\theta_B$. On trouve $\Delta x = 97 \mu\text{m}$. Les deux triangles d'angle θ_B permettent de constituer un rectangle. L'aire demandée est donc : $\mathcal{A} = \Delta x L = 5,9 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.

31. On a une rotation autour de l'axe M_2y . Le bras de longueur L allant en M_3 possède une vitesse $v_{3x} = \Omega_y L$ puisque sa longueur est L . De la même façon, le bras, toujours de longueur L allant en M_1 , possède lui au contraire du premier une vitesse $v_{1y} = -\Omega_y L$. La phase a donc pour expression $\phi_0 = k_r 2\Omega_y LT$. En utilisant le fait que $T = \frac{L}{v}$ et le fait que $k_r = 2k_L = \frac{4\pi}{\lambda_L}$, on peut écrire que $\phi_0 = \frac{8\pi L^2}{\lambda_L v} \Omega_y$. Nous avons vu que $\lambda_{DB} = \frac{h}{mv}$ d'où $\phi_0 = \frac{4\lambda_{DB} m L^2}{\lambda_L \hbar} \Omega_y$. Or, on a $\sin \theta_i \simeq \theta_i = \frac{\lambda_{DB}}{\lambda_L}$ et $\theta_i = \theta_B$. On a donc $\phi_0 = 4\theta_B L^2 \frac{m}{\hbar} \Omega_y$. On arrive bien à l'expression : $\phi_0 = \frac{2m}{\hbar} \Omega_y \mathcal{A}$.

32. On a $\mathcal{S} = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi_0)$. La sensibilité se calcule selon : $\frac{d\mathcal{S}}{d\Omega_y} = \frac{d\mathcal{S}}{d\phi_0} \frac{d\phi_0}{d\Omega_y}$. On a donc $\frac{d\mathcal{S}}{d\Omega_y} = |\sin \phi_0| \frac{Am}{\hbar}$ pour raisonner sur une valeur positive. À ce stade de la question, on ne connaît pas Ω_y , ni ϕ_0 . On se placera sans doute de façon arbitraire au maximum de sensibilité pour lequel $|\sin \phi_0| = 1$. Cela correspond à $\frac{d\mathcal{S}}{d\Omega_y} = \frac{Am}{\hbar} = 6\,500 \text{ s}$.

33. Oy étant la verticale locale, la vitesse de rotation possède une projection sur cet axe qui est $\Omega_y = \Omega \sin \lambda$ où λ est la latitude de Toulouse. On trouve $\Omega_y = 5 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ en prenant pour $\Omega = \frac{2\pi}{86\,164} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On calcule $\phi_0 = 0,65 \text{ rad}$. On peut donc en déduire que $\frac{d\mathcal{S}}{d\Omega_y} = 3\,930 \text{ s}$. Comme on peut avoir une mesure d'une variation de 1% du signal normalisé $\Delta \mathcal{S} = 0,01$, on en déduit que $\Delta \Omega_y = \frac{0,01}{3\,930} = 2,5 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le dispositif étudié permet de mesurer la vitesse de rotation de la Terre puisque celle-ci est $\Omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

34. Si l'on ralentit les atomes du jet, on diminue leur vitesse v et donc on augmente λ_{DB} . L'angle θ_b va donc augmenter et, par conséquent, la surface \mathcal{A} va, elle-aussi, augmenter. Comme on l'a vu dans l'expression de la sensibilité, cette dernière est proportionnelle à l'aire \mathcal{A} . On augmente, in fine, la sensibilité.