

Devoir de Sciences Physiques n°1 pour le 11-09-2024

Problème n° 1 – Haut-parleur électrodynamique

CCP PC 2016

Problème à remettre à votre camarade prévu dans DMscope pour une correction croisée, retour de la correction croisée le 16/09 au plus tard.

Un haut-parleur électrodynamique, schématisé en figure 1, est constitué d'un châssis sur lequel est fixé le circuit magnétique. Sur cet ensemble rigide est fixé l'élément actif du haut-parleur : l'équipage mobile formé de la membrane et de la bobine mobile. La liaison avec le châssis est assurée, près du centre par le spider, pièce de toile rigidifiée par du plastique et qui joue le rôle d'un ressort et sur le pourtour par une suspension périphérique. L'ensemble de la suspension assure le rappel vers la position d'équilibre et le guidage en translation parallèlement à l'axe z/z' . Le circuit magnétique, constitué d'aimants permanents, génère un champ magnétique \vec{B} radial et d'intensité constante $B = 1,05 \text{ T}$ dans l'entrefer. La longueur totale du bobinage de la bobine mobile vaut $\ell = 3,81 \text{ m}$. La masse de l'équipage mobile vaut $m = 4,0 \text{ g}$. Voir le schéma de principe du haut-parleur à la figure 1.

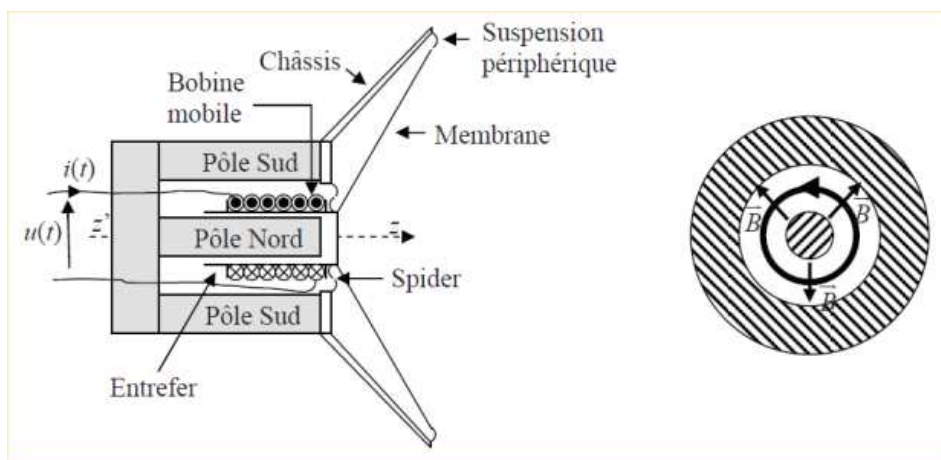


FIGURE 1 – Schéma de principe du haut-parleur électrodynamique

A. Étude temporelle du fonctionnement

1. Pourquoi qualifie-t-on le haut-parleur de convertisseur électromécanique ?

2. On applique aux bornes de la bobine une tension variable $u(t)$. La bobine est alors traversée par un courant d'intensité $i(t)$ et la membrane se déplace avec la vitesse $v(t)$. Il va alors apparaître une force électromotrice induite de fem donnée par la formule :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \int_{\text{bobine}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

où $d\vec{\ell}$ est un élément infinitésimal de longueur du bobinage¹. Déterminer l'expression de la fem induite $e(t)$.

3. Le schéma électrique équivalent de la bobine est donné en figure 2. Donner la relation qui lie $u(t)$ à $i(t)$, $\frac{di}{dt}$ et $e(t)$. Exprimer la première relation existant entre la vitesse $v(t)$ et l'intensité $i(t)$.

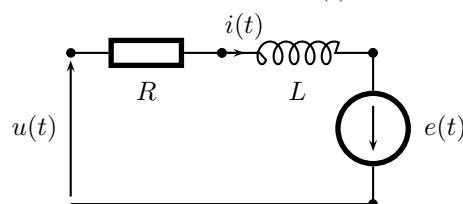


FIGURE 2 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur électrodynamique

1. La notion de flux coupé n'étant plus au programme, il n'est plus possible d'expliquer simplement à partir des notions enseignées l'origine de cette expression de la fem. On admettra donc l'expression proposée.

4. Donner l'expression de la force élémentaire de LAPLACE $d\vec{f}_L$ s'exerçant sur l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ de la bobine.

5. En prenant l'origine des z comme étant la position d'équilibre du centre d'inertie de l'équipage mobile (bobine + membrane), le principe fondamental de la Dynamique appliqué à ce système donne la relation suivante :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -i(t)\ell B \vec{e}_z - kz(t)\vec{e}_z - \lambda \vec{v}$$

Interpréter les différents termes de cette relation. En déduire une équation reliant $i(t)$ à $z(t)$ et ses dérivées. L'équation ainsi obtenue est appelée équation mécanique.

B. Régime sinusoïdal forcé

La tension appliquée est supposée sinusoïdale, de fréquence f : $u(t) = U_m \cos \omega t$ avec $\omega = 2\pi f$. Nous utiliserons le formalisme complexe qui, à toute fonction sinusoïdale du type $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$ associe la fonction complexe $\underline{a} = A_m \exp j(\omega t + \varphi)$. On rappelle que j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

6. Écrire les équations mécanique et électrique en utilisant le formalisme complexe.

7. En déduire l'expression de l'impédance du haut-parleur $\underline{Z}(\omega) = \underline{u}/\underline{i}$.

8. Cette impédance $\underline{Z}(\omega)$ correspond à la mise en série de deux impédances : l'une $\underline{Z}_e(\omega)$, appelée impédance propre, qui ne contient que des termes relatifs au circuit électrique et l'autre $\underline{Z}_m(\omega)$, appelée impédance motionnelle, qui ne dépend que des caractéristiques mécaniques du système. Préciser les expressions de $\underline{Z}_e(\omega)$ et $\underline{Z}_m(\omega)$.

9. Montrer que l'admittance motionnelle \underline{Y}_m peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y}_m(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_m(\omega)} = jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_m}$$

Préciser les expressions de C_m , L_m et R_m en fonction de ℓ , B , k , m et λ . On donne $k = 1250 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\lambda = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, vérifier que $C_m = 250 \text{ } \mu\text{F}$, $L_m = 12,8 \text{ mH}$ et $R_m = 16 \text{ } \Omega$.

10. Proposer un schéma électrique équivalent de l'impédance $\underline{Z}(\omega)$ du haut-parleur dans lequel vous ferez apparaître R , L , C_m , L_m et R_m .

11. On peut également poser que l'impédance du haut-parleur se compose d'une partie réelle R_T et d'une partie imaginaire X_T telles que $\underline{Z}(\omega) = R_T + jX_T$. Montrer alors que l'expression de R_T est la suivante :

$$R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega} \right)^2}$$

12. En utilisant la courbe $R_T = f(\omega)$ de la figure 3, déterminer la valeur numérique de la résistance R et montrer que la fréquence de résonance vaut $f_0 = 89 \text{ Hz}$. Vérifier la cohérence de la valeur de f_0 avec les données de l'énoncé.

C. Étude énergétique

Nous ferons l'hypothèse que la transformation de l'énergie mécanique des parties mobiles en énergie acoustique s'effectue sans perte.

13. Établir le bilan de puissance électrique global sous la forme :

$$u(t) i(t) = \frac{dE_{\text{magn}}}{dt} + P_J(i(t)) + P_L(v(t))$$

Préciser les expressions de E_{magn} , $P_J(i(t))$ et $P_L(v(t))$. Interpréter chacun des termes du bilan.

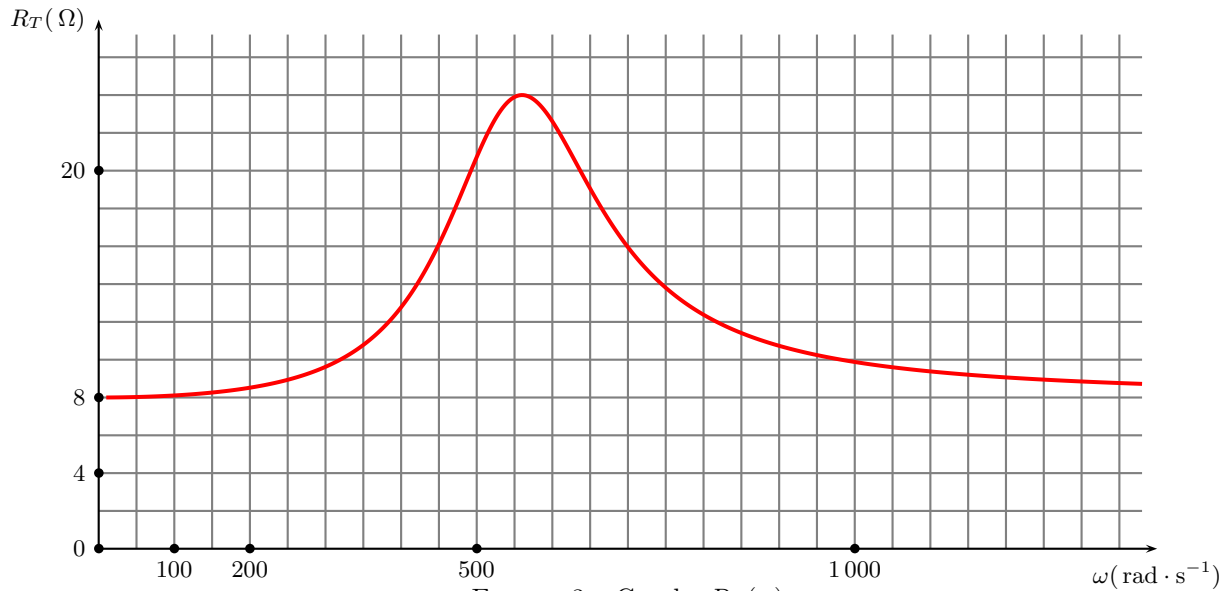
14. Établir le bilan de puissance mécanique global sous la forme :

$$\frac{dE_c(v(t))}{dt} + P_A(v(t)) + \frac{dE_{pe}(z(t))}{dt} = P_L(v(t))$$

Préciser les expressions de $E_c(v(t))$, $E_{pe}(z(t))$ et $P_A(v(t))$. Interpréter chacun des termes du bilan.

15. Déduire des deux relations précédentes que :

$$u(t) i(t) = \frac{dE_{\text{magn}}}{dt} + P_J(i(t)) + \frac{dE_M(t)}{dt} + P_A(v(t))$$



16. On étudie une évolution périodique. Montrer que la puissance moyenne $\langle P_S(t) \rangle$ fournie par l'alimentation électrique est reliée à la valeur moyenne du courant au carré consommé par le haut-parleur $\langle i^2(t) \rangle$ et à la valeur moyenne de la vitesse au carré de l'équipage mobile $\langle v^2(t) \rangle$ par la relation :

$$\langle P_S(t) \rangle = R \langle i^2(t) \rangle + \lambda \langle v^2(t) \rangle$$

Lequel de ces termes correspond à la puissance utile moyenne $\langle P_u(t) \rangle$? En déduire l'expression du rendement η .

17. La tension $u(t)$ appliquée aux bornes du haut-parleur est une tension alternative sinusoïdale, de valeur efficace U_{eff} . La bobine est alors traversée par un courant $i(t)$ alternatif sinusoïdal d'intensité efficace I_{eff} . On rappelle que le haut-parleur peut se modéliser comme indiqué à la figure 4. Montrer que le rendement η défini à la question précédente a pour expression :

$$\eta = \frac{R_T - R}{R_T}$$

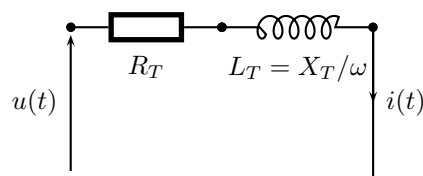
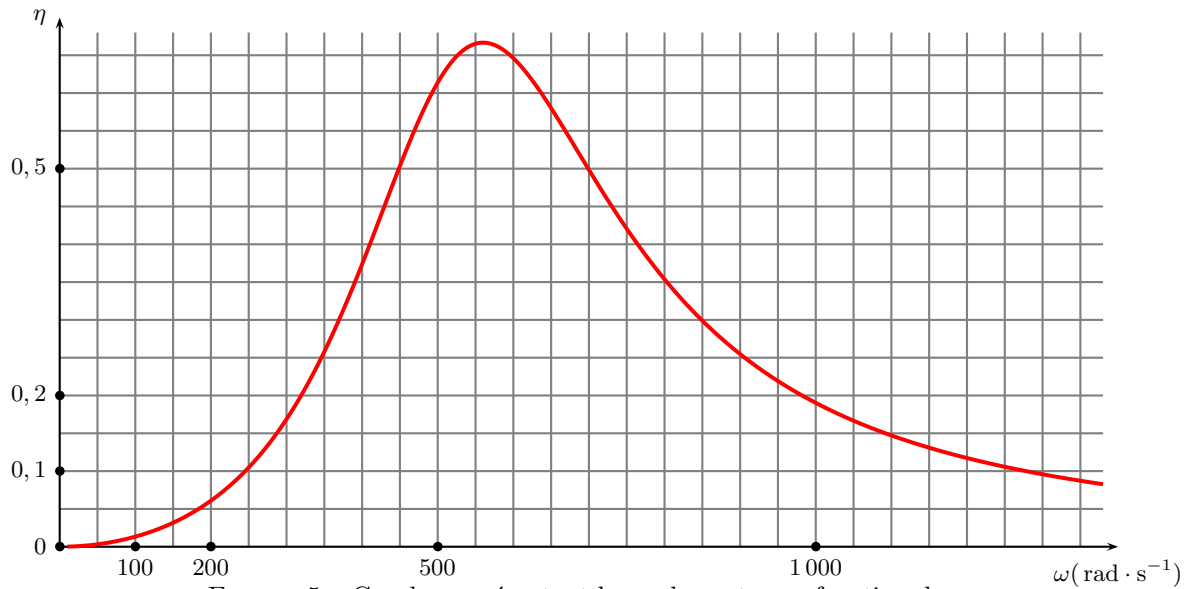


FIGURE 4 – Modélisation du haut-parleur

18. On donne la représentation, à la figure 5, du rendement η en fonction de la pulsation ω . Pour quelle fréquence le rendement est-il maximal ? Est-ce en accord avec les valeurs numériques précédentes ? Justifier votre réponse.

19. Dans quelle gamme de fréquences, l'utilisation du haut-parleur est-elle intéressante ? Rappeler l'intervalle de fréquences dans lequel l'oreille humaine entend les sons.

20. Expliquer pourquoi les enceintes acoustiques comportent plusieurs haut-parleurs.



Problème n° 2 – Rebonds d’une balle sur une surface en mouvement périodique X MP 2024

Cette étude comprend deux parties, chacune pouvant être abordée de façon indépendante. La première est consacrée à la modélisation viscoélastique d’un solide durant un choc. La seconde s’intéresse aux conditions de synchronisation des rebonds d’une balle sur une surface plane en mouvement vertical harmonique.

A. Une modélisation du comportement viscoélastique d’un solide lors d’un choc contre une surface rigide

Le modèle adopté du solide est représenté sur la figure 6. Il comprend un élément indéformable (M), auquel est affectée la masse totale m du solide, en liaison avec un pied (P) par l’intermédiaire d’un élément élastique et d’un élément amortisseur agissant parallèlement. Ces derniers sont supposés sans masse et se comporter linéairement vis-à-vis du déplacement (ou déformation) s . La surface (S), fixe dans le référentiel d’étude $\mathcal{R}(O, x)$ (supposé galiléen), est supposée indéformable.

Nous notons k (qui a la dimension d’une force sur une longueur) la raideur de l’élément élastique et λ (qui a la dimension d’une force sur une vitesse) le coefficient d’amortissement ($k > 0$ et $\lambda > 0$). Sur la figure 6-(a), le solide n’est pas en contact avec la surface, il se déplace à la vitesse $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$ ($V_0 = \text{Cste} > 0$) dans sa direction. La figure 6-(a) représente la situation lors du choc. La distance d définit l’origine du déplacement s du solide (c’est la longueur du solide non déformé). L’action de la pesanteur n’est pas prise en compte dans cette modélisation.

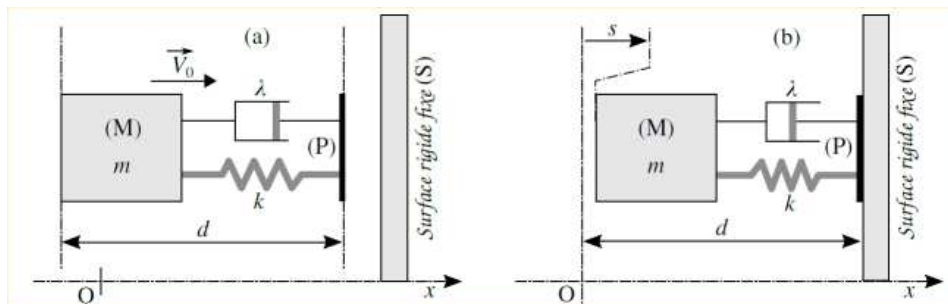


FIGURE 6 – Modélisation viscoélastique d’un solide : (a) Solide non déformé en progression à vitesse constante $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$ en direction de la surface rigide fixe (S); (b) Déformation du solide durant la phase de son contact avec la surface (S). Cette déformation est paramétrée par l’abscisse s .

Nous posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{2\sqrt{km}}$. Nous supposons que $\alpha < 1$.

1. Établir l'expression de la dépendance temporelle $s = s(t)$ du déplacement de l'élément (M) au cours du choc. On indiquera l'intervalle de temps I_c sur lequel cette dépendance doit être considérée². On fera intervenir les constantes ω_0 , α et V_0 .

2. Nous notons $\vec{V}_1 = V_1 \vec{e}_x$ la vitesse du solide après la phase de rebond sur la surface rigide. Établir que le coefficient de restitution en vitesse r , défini par le rapport $r = -V_1/V_0$, s'exprime selon la relation suivante :

$$r = \exp\left(-\frac{\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

Commenter cette expression. Expliquer pourquoi r ne dépend pas de la vitesse initiale V_0 .

Il s'agit d'accéder à la valeur du coefficient de restitution en vitesse r caractérisant les rebonds d'une balle de tennis de table sur une surface rigide horizontale et immobile. À cette fin, on effectue un lâché vertical, dans le champ de pesanteur, de la balle depuis une hauteur initiale h_0 . On détecte les impacts à l'aide d'un microphone.

La figure 7 représente la dépendance du temps de vol $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, relatif au rebond n ($n \geq 1$), de la balle entre ses impacts n (instant t_n) et $n + 1$ (instant t_{n+1}) contre la surface. La hauteur h_0 est choisie de telle manière qu'elle n'induit pas de retournement de la convexité (flambage) de la surface-enveloppe de la balle, au cours du choc. Par ailleurs, nous nous plaçons sur un intervalle de temps tel que l'on peut négliger la durée du choc devant chacun des temps de vol considérés.

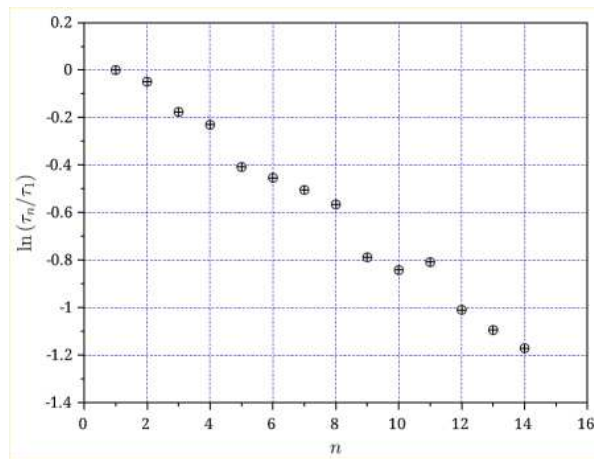


FIGURE 7 – Durée $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ du rebond n (≥ 1) entre les impacts n et $n + 1$ de la balle contre la surface, en fonction de n (représentation dans le système de coordonnées linéaire-logarithmique).

3. Exprimer, dans le cadre du modèle adopté (illustré sur la figure 6), la dépendance de la variable $\ln(\tau_n/\tau_1)$ en fonction du coefficient r et de n . Ce modèle paraît-il en accord avec les résultats présentés sur la figure 7 (pour la gamme de vitesses d'impact considérée) ? Estimer, à partir de ce tracé, la valeur du coefficient de restitution en vitesse r .

B. Synchronisation des rebonds d'une balle sur une surface en mouvement vertical oscillant

Nous nous proposons d'étudier les rebonds d'une balle de tennis de table sur une surface rigide qui oscille verticalement, de façon sinusoïdale. En pratique, cette surface est fixée sur la partie mobile (noyau) d'un pot vibrant³. Ce dernier est commandé en courant par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance commandé par un générateur de tension sinusoïdale⁴. Le paramétrage du système constitué de la surface rigide (S) oscillant verticalement et de la balle (B) est représenté sur la figure 8.

Nous notons :

- $\mathcal{R} = \mathcal{R}(O, z)$, le référentiel d'étude, supposé galiléen (ce n'est plus celui utilisé dans la première partie) ;
- $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, l'accélération de la pesanteur ;

2. L'énoncé est équivoque sur la définition de la durée I_c en lien avec la question suivante. On cherchera la durée I_c nécessaire pour que l'objet retrouve sa taille initiale d .

3. Un pot vibrant possède une structure analogue à celle d'un haut-parleur électrodynamique.

4. Afin d'assurer la stabilité des rebonds dans le plan horizontal, la balle peut être guidée par un tube en plexiglass. On peut également utiliser une surface (S) présentant une légère concavité.

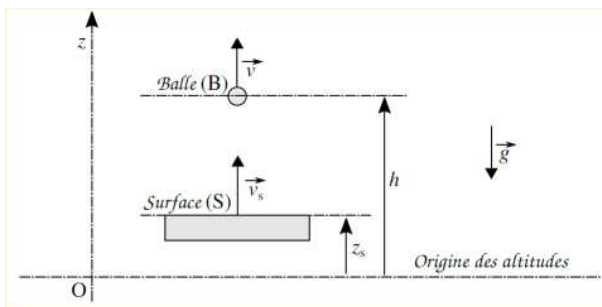


FIGURE 8 – Système constitué de la surface rigide (S) en mouvement vertical ($z_s = z_s(t)$) et de la balle (B) en mouvement balistique ($h = h(t)$) dans le champ de \vec{g} .

- m , la masse de la balle ;
- z_s et $\vec{v}_s = v_s \vec{e}_z$ ($v = \dot{h}$), respectivement l'altitude et la vitesse de la balle ;
- $\vec{v}^- = v^- \vec{e}_z$ ($v^- < 0$) et $\vec{v}^+ = v^+ \vec{e}_z$, respectivement les vitesses de la balle immédiatement avant et après un choc contre la surface ;
- r ($r \in]0, 1[$), le coefficient de restitution en vitesse caractérisant le choc entre la balle (B) et la surface rigide (S) ($r = -v^+/v^-$ dans le cas particulier où $v_s = 0$). Ce coefficient est supposé indépendant de la vitesse d'impact.

Nous considérons que les chocs entre la surface et la balle sont instantanés et, par ailleurs, qu'ils ne perturbent pas le mouvement de la surface⁵. L'évolution temporelle $z_s = z_s(t)$ de son altitude est donc imposée par la différence de potentiel délivrée par le générateur, indépendamment de l'action qu'exerce la balle sur la surface lors d'un choc.

4. Établir que la vitesse v^+ de la balle s'exprime selon la relation suivante :

$$v^+ = -rv^- + (1 + r)v_s(t_i)$$

où t_i est l'instant de l'impact balle-surface considéré.

Condition de synchronisation

Il s'agit de déterminer à quelle condition les rebonds de la balle (B), sur la surface (S) oscillant verticalement de façon sinusoïdale, sont synchronisés sur le mouvement de cette dernière. La figure 9 donne une illustration, dans un cas quelconque, des évolutions temporelles $z_s = z_s(t)$ et $h = h(t)$ des altitudes respectives de la surface en mouvement et de la balle, centrées sur le rebond n .

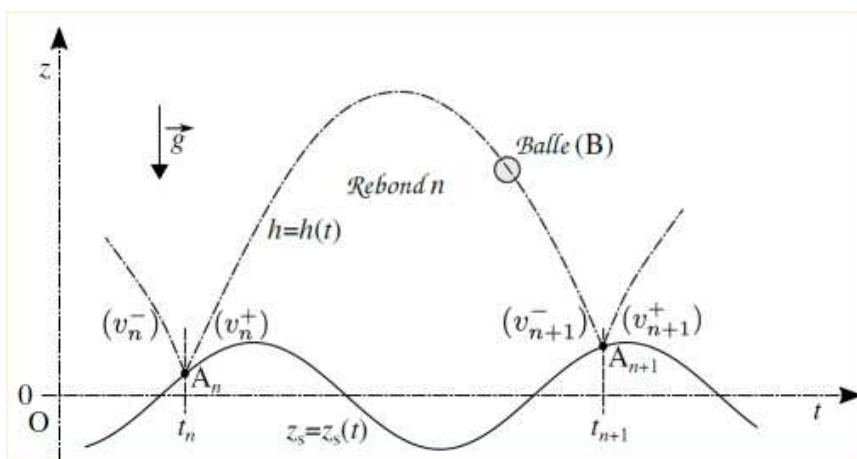


FIGURE 9 – Rebond n , de l'impact A_n à l'impact A_{n+1} , de la balle (B) sur la surface (S) oscillant verticalement et sinusoïdalement (la situation de rebond est quelconque).

Nous notons :

- t_n , l'instant correspondant à l'impact A_n numéro n ;

5. La masse de l'ensemble mobile constitué de la surface et du noyau du pot vibrant est très supérieure à celle de la balle.

- $\vec{v}_n^- = v_n^- \vec{e}_z$ ($v_n^- < 0$) et $\vec{v}_n^+ = v_n^+ \vec{e}_z$, respectivement les vitesses de la balle immédiatement avant et après l'impact n ;
- $z_s(t) = a \sin \omega t$ ($a = \text{Cste} > 0$, $\omega = \text{Cste} > 0$), l'évolution temporelle de l'altitude de la surface ;
- $\phi = \omega t$; $\phi_n = \omega t_n$; $T = 2\pi/\omega$; $\Gamma = a\omega^2/g$.

5. Nous nous plaçons dans une situation générale telle que celle illustrée sur la figure 9 (c'est-à-dire que les rebonds ne sont pas nécessairement synchronisés). Nous considérons un rebond n , de l'impact $A_n(t_n)$ à l'impact $A_{n+1}(t_{n+1})$. Nous notons $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ le temps de vol de la balle durant ce rebond. Exprimer les dépendances suivantes :

- La vitesse v_n^+ en fonction de v_n^- , ϕ_n et des paramètres r , a et ω ;
- L'altitude $z_s(t_{n+1})$ en fonction de $z_s(t_n)$, v_n^+ , τ_n et g ;
- La vitesse v_{n+1}^- en fonction de v_n^+ , τ_n et g ;
- La vitesse v_{n+1}^+ en fonction de v_n^+ , τ_n , ϕ_{n+1} et des paramètres g , r , a et ω .

Ces relations générales seront utilisées dans la suite de cette étude.

6. Nous supposons que les rebonds de la balle sont synchronisés sur le mouvement sinusoïdal de la surface. Établir alors que le cosinus de la phase ϕ_n des impacts vérifie l'égalité suivante :

$$\cos \phi_n = \frac{1-r}{1+r} \times \frac{\pi}{\Gamma}$$

Donner l'expression correspondante de la vitesse v_n^+ en fonction des constantes g et ω .

7. Analyser la relation précédente. On envisagera, en particulier, la situation limite pour laquelle $r \rightarrow 1^-$.

8. La figure 10 représente l'évolution temporelle de l'altitude $z_s = a \sin \omega t$ de la surface (S). En correspondance est également représentée celle du signal délivré par le microphone détectant le son produit par les chocs de la balle contre la surface. Ce signal prend la forme d'une série d'impulsions. Étant représenté en unité arbitraire, son échelle n'est pas indiquée sur la figure. La valeur de la pulsation, correspondant à ces résultats, est $\omega = 2\pi \times 25 \simeq 157 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

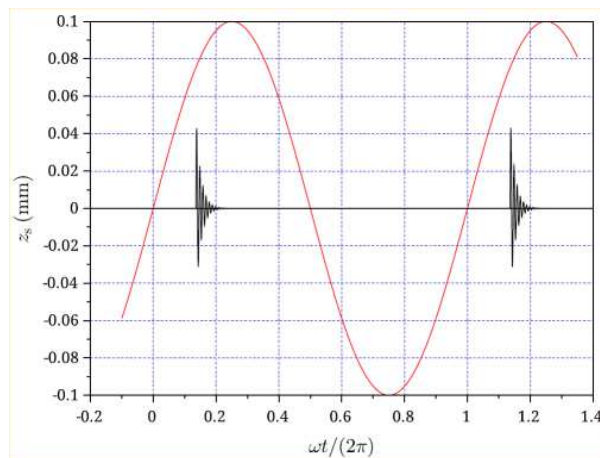


FIGURE 10 – Évolution temporelle de l'altitude $z_s = a \sin \omega t$ de la surface (S) et celle du signal de détection des chocs de la balle contre cette dernière ($\omega = 2\pi \times 25 \simeq 157 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Sur l'intervalle de temps considéré, ce signal fait apparaître deux impulsions correspondant, chacune, à un choc.

Estimer, à partir de ces données, la valeur du coefficient de restitution en vitesse r . Afin de faciliter les calculs numériques, on tirera parti des indications suivantes : la valeur de r est proche de l'unité et celle de ϕ_n proche de $\pi/4$.

Condition de stabilité

Nous nous proposons d'analyser la stabilité de la situation de synchronisation des rebonds sur la période T des oscillations harmoniques de la surface. Pour cela, nous supposons que l'instant d'impact et la vitesse de la balle immédiatement après cet instant s'écartent légèrement de la condition de synchronisation. La figure 11, centrée sur le rebond n , illustre cette situation.

Les variables (t'_n, v_n', \dots) auxquelles est affecté le signe ' se rapportent à la situation pour laquelle les rebonds sont légèrement désynchronisés par rapport au mouvement périodique de la surface. Les autres (t_n, v_n^+, \dots) correspondent à la situation de synchronisme étudiée auparavant.

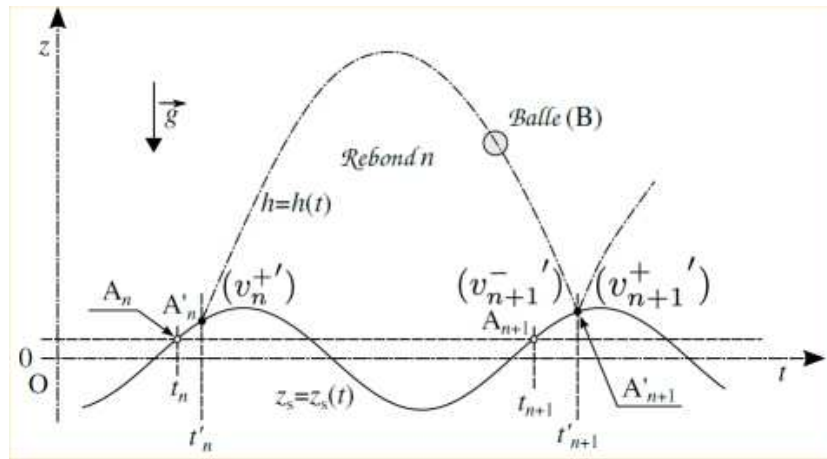


FIGURE 11 – Rebond n , de l'impact A'_n à l'impact A'_{n+1} , de la balle (B) sur la surface (S) oscillant verticalement et sinusoïdalement : situation s'écartant légèrement de la condition de synchronisme correspondant à la suite (A_n) des impacts.

9. Nous considérons le rebond n de la balle entre les impacts A'_n et A'_{n+1} . Établir la relation liant les phases $\phi'_{n+1} = \omega t'_{n+1}$ et $\phi'_n = \omega t'_n$. Cette relation fait intervenir v_n^+ et les constantes g , a et ω .

10. Pour le rebond n , exprimer la vitesse v_{n+1}^+ en fonction de v_n^+ , ϕ'_{n+1} , ϕ'_n et des paramètres r , g , a et ω .

Afin d'étudier la stabilité de la situation pour laquelle les rebonds sont synchronisés, nous considérons que chaque impact A'_n reste voisin de correspondant synchronisé A_n . Écrivons alors les variables ϕ'_n et v_n^+ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi'_n = \phi_n + 2\pi\varepsilon_n & \text{où } |\varepsilon_n| \ll 1 \\ v_n^+ = v_n^+(1 + \eta_n) & \text{où } |\eta_n| \ll 1 \end{cases}$$

Il s'agit d'étudier les propriétés des suites (ε_n) et (η_n) . Dans cette étude perturbative, toutes les fonctions et équations seront développées au voisinage de la situation du synchronisme (ϕ_n, v_n^+) en se limitant au premier ordre vis-à-vis des termes d'écart ε_n et η_n . Dans ces conditions, le développement des relations obtenues en réponse aux deux questions précédentes conduit aux relations de récurrence linéaires suivantes :

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{1+r}{2}\eta_n$$

$$\eta_{n+1} = -(2\pi(1-r)\tan\phi_n)\varepsilon_n + (r^2 - \pi(1-r^2)\tan\phi_n)\eta_n \quad (\tan\phi_n = \text{Cste})$$

Afin de rendre ces relations plus aisément maniables, nous les écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = A\varepsilon_n + B\eta_n & \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ \eta_{n+1} = C\varepsilon_n + D\eta_n & \text{où } (C, D) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Par ailleurs, nous les étendons aux suites complexes $(\underline{\varepsilon}_n)$ et $(\underline{\eta}_n)$ telles que $\varepsilon_n = \Re(\underline{\varepsilon}_n)$ et $\eta_n = \Im(\underline{\eta}_n)$.

11. Former la relation de récurrence ne portant que sur des termes de la suite $(\underline{\varepsilon}_n)$, liant $\underline{\varepsilon}_{n+2}$, $\underline{\varepsilon}_{n+1}$ et $\underline{\varepsilon}_n$. On conservera les paramètres A , B , C et D sans expliciter leur dépendance vis-à-vis des paramètres r et $\tan\phi_n$.

Nous recherchons les solutions générales de cette suite récurrente linéaire du deuxième ordre sous la forme suivante :

$$\underline{\varepsilon}_n = K \mu^n \quad \text{où } K = \text{Cste} \in \mathbb{C} \quad \text{et } \mu = \text{Cste} \in \mathbb{C}$$

12. Indiquer à quelle condition générale, portant sur la raison μ , la suite $(\underline{\varepsilon}_n)$ converge vers 0.

13. Établir que la raison μ vérifie l'équation algébrique suivante :

$$\mu^2 - 2Qr\mu + r^2 = 0$$

On exprimera le produit $2Qr$ en fonction des constantes r et $\tan \phi_n$

14. Nous nous plaçons dans le cas où $Q \in \mathcal{D}_1 = [-1, +1]$. Exprimer, en fonction de r et Q , les solutions μ_+ et μ_- de l'équation précédente. Analyser le comportement correspondant de la suite (ε_n) . Préciser quelle en est la conséquence sur la stabilité de la situation de synchronisation des rebonds, dans ce cas.

15. Nous envisageons le cas où $Q \in \mathcal{D}_2 =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Exprimer, en fonction de r et Q , les nouvelles solutions μ_+ et μ_- . Représenter l'allure graphique de la dépendance de chacune d'elles vis-à-vis du paramètre Q .

16. En s'appuyant sur l'allure des représentations graphiques des dépendances $\mu_+ = \mu_+(Q)$ et $\mu_- = \mu_-(Q)$, déterminer la condition de stabilité des rebonds synchronisés, sur le domaine \mathcal{D}_2 . On fera porter cette condition sur le produit $2Qr$.

17. Établir que la condition de stabilité de la situation pour laquelle les rebonds sont synchronisés, sur la réunion des deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , prend la forme suivante :

$$0 < \tan \phi_n < F(r) \quad \text{où} \quad F(r) = \frac{2(1+r^2)}{\pi(1-r^2)} \quad (0 \leq r < 1)$$

Interpréter ce résultat. On s'interrogera, en particulier, sur la signification attribuable à l'inégalité de gauche, puis à celle de droite au vu de la dépendance de la fonction F vis-à-vis du coefficient r .

18. La double inégalité précédente adjointe à l'expression de $\cos \phi_n$ vue avant, conduit à la condition suivante portant sur le paramètre Γ :

$$\Gamma_{\min} = \pi \left(\frac{1-r}{1+r} \right) < \Gamma < \Gamma_{\max} = \pi \left(\frac{1-r}{1+r} \right) \sqrt{1+F^2} \quad (0 \leq r < 1; \Gamma = a\omega^2/g)$$

Elle définit à quelle condition il est possible d'observer des rebonds synchronisés sur la période T du mouvement oscillant de la surface. Dans cette situation, le mouvement de la balle est donc également périodique, et de même période T . Représenter, dans le plan $(X = g/\omega^2, Y = a)$, le domaine de stabilité correspondant. Interpréter qualitativement l'existence d'un encadrement du paramètre Γ .

Pour approfondir cette étude : Lorsque le paramètre Γ franchit la frontière Γ_{\max} , mais tout en restant en deçà d'un nouveau seuil $\Gamma_{\max,2}$, il apparaît que deux rebonds deviennent nécessaires pour définir un motif périodique du mouvement de la balle. C'est le phénomène de doublement de période (le mouvement de la balle est périodique, de période $2T$). Les phases ϕ_n d'impact prennent des valeurs qui s'alternent régulièrement de part et d'autre d'une phase moyenne (modulo 2π). Au delà de $\Gamma_{\max,2}$, il apparaît un nouveau doublement de période (le mouvement de la balle est périodique, de période $4T$) et ainsi de suite, jusqu'au chaos où le mouvement de la balle perd toute régularité.