

Devoir de Sciences Physiques n°1 du 13-09-2023

— Solutions —

Problème n° 1 – Matériaux piézoélectriques

Centrale TSI 2020

A. Utilisation en capteur de forces

Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

1. L'amplificateur opérationnel est idéal et en régime linéaire : $i_+ = i_- = 0$ et $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$. Comme le courant est nul sur l'entrée, la tension aux bornes de la résistance R_1 est nulle. On a donc $V_+ = V_e$. On note i l'intensité qui traverse les deux résistances orientées de la sortie de l'amplificateur vers la masse. On a donc $V_- = e_1 + R_3 i$. Par application de la loi des mailles, on a $V_s = e_1 + (R_2 + R_3)i$. On peut grâce à ces deux relations exprimer la tension $V_- = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$. Comme l'amplificateur idéal est en régime linéaire, on a $\varepsilon = 0$ comme cela a été dit avant. On peut donc en conclure que $V_e = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$.

2. On trouve $V_e = 0,95 \text{ V}$.

3. On a $F = \frac{C V_e}{K} = 0,76 \text{ N}$.

Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

4. On commence par former des impédances équivalentes à R_1 et C_1 en série $Z_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}$ et à R_2 et C_2 en parallèle $Z_2 = \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}$. Comme $V_+ = 0$ puisque l'entrée + est reliée à la masse, on peut voir que Z_1 est soumise à la tension V_e et que Z_2 l'est à la tension V_s . On applique la loi des nœuds à l'entrée - de l'amplificateur opérationnel. La somme des courants qui arrivent à ce nœud est nulle : $\frac{V_e}{Z_1} + \frac{V_s}{Z_2} + 0 = 0$. On peut en déduire la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée : $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_2}{Z_1}$. On a $\underline{H}(j\omega) = -\frac{R_2}{(1+jR_2C_2\omega)(R_1 + \frac{1}{jR_1C_1\omega})}$. Après calcul et mise en forme comme voulue par l'énoncé, on arrive bien à $\underline{H}(j\omega) = -\frac{A}{1+j(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega})}$ à condition de poser $A = \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$, $\omega_1 = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$.

5. On constate facilement que la limite de $\underline{H}(j\omega)$ est 0 lorsque $\omega \rightarrow 0$ et aussi lorsque $\omega \rightarrow \infty$. On a clairement affaire à un filtre **passes-bande**.

6. On a $|\underline{H}|(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega})^2}}$. Comme la pulsation n'intervient qu'au dénominateur, le gain sera maximal lorsque le dénominateur sera le plus petit possible. Compte tenu de sa forme, cela se produit lorsque $\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0$. La pulsation de résonance est donc : $\omega_r = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

7. Pour vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase, on utilise un **oscilloscope** en reliant sa masse à celle du circuit et la voie 1 à l'entrée et la voie 2 à la sortie par exemple. On peut utiliser l'oscilloscope en mode temporel, l'axe des temps est l'axe horizontal sur l'écran de l'oscilloscope ou bien en mode XY, c'est-à-dire que l'on représente une voie sur l'axe vertical et l'autre sur l'axe horizontal. On doit observer ce qui représenté à la figure 1. Si l'entrée est décrite par $V_e = V_{em} \cos \omega_r t$ alors la sortie l'est par $V_s = A V_{em} \cos(\omega_r t + \pi) = -A V_{em} \cos \omega_r t$. On a alors $V_s = -A V_e$ ce qui donne une droite décroissante dans le mode XY.

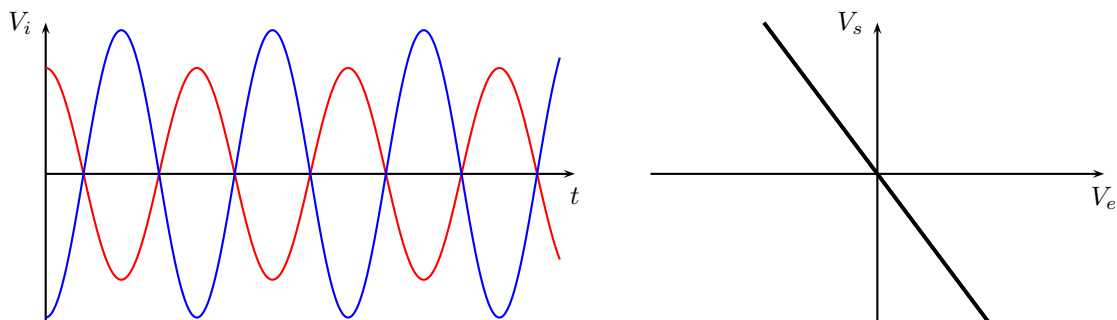


FIGURE 1 – Mode temporel et mode XY

8. Pour que les deux signaux soient en opposition de phase, il faut que $\omega = \omega_r$ car nous avons alors $\underline{H} = -A$ avec $A > 0$. Comme \underline{H} est un réel négatif, la phase est bien de π entre la tension de sortie et la tension d'entrée. La fréquence est donc : $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} = 318 \text{ Hz}$.

B. Utilisation d'un matériau piézoélectrique dans un airbag

Principe d'un accéléromètre

9. La masse m subit son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ perpendiculaire à l'axe Ox , une composante normale de contact $\vec{N} = N\vec{e}_z$ avec $N > 0$. Comme l'énoncé ne signale pas l'existence de frottements secs de COULOMB, on ne prendra pas en compte de composante tangentielle. Le ressort exerce sur m la force $-k(x - L_0)\vec{e}_x$, l'amortisseur la force $-\alpha\vec{V}$ et la force d'inertie d'entraînement due au caractère non galiléen du référentiel constitué par la voiture : $\vec{f}_{i,ent} = ma\vec{e}_x$.

10. Le principe fondamental de la Dynamique, projeté sur l'axe Ox , permet d'écrire que $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\frac{dx}{dt} - k(x - L_0) + ma$. En posant $X = x - L_0$, on arrive à l'équation différentielle $\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dX}{dt} + \frac{k}{m}X = a$. On a donc $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$. On peut conclure en écrivant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$.

Résolution

11. Comme $x = L_0$, on a $X(t < 0) = 0$.

12. On pose $Q = \frac{1}{2}$. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $r^2 + 2\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 = (r + \omega_0)^2$. $r = -\omega_0$ est une racine double. On se trouve dans le cas du régime critique. La solution de l'équation homogène est de la forme $x_h = (At + B)\exp -\omega_0 t$. La solution particulière est triviale $x_p = \frac{a}{\omega_0^2}$. Par linéarité de l'équation différentielle, on obtient la forme suivante pour la solution : $x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} + (At + B)\exp -\omega_0 t$. Pour déterminer les constantes d'intégration A et B , on utilise les conditions initiales qui portent, ici, sur la position et la vitesse. Avant le freinage, on avait $X(t = 0) = 0$ et $\dot{X}(t = 0) = 0$. La condition sur la position permet d'écrire que $\frac{a}{\omega_0^2} + B = 0$ d'où $B = -\frac{a}{\omega_0^2}$. Commençons par calculer l'expression générale de la vitesse : $\frac{dX}{dt} = A\exp -\omega_0 t - (At + B)\omega_0 \exp -\omega_0 t$. À $t = 0$, l'expression précédente permet d'écrire que $A = B\omega_0$. On peut donc terminer la détermination de l'expression de la position de la masse relativement à sa position d'équilibre : $X(t) = \frac{a}{\omega_0^2}[1 - (1 + \omega_0 t)\exp -\omega_0 t]$. Si le régime transitoire est supposé terminé, cela veut dire que

$X(t_0) = \frac{a}{\omega_0^2} = \frac{ma}{k}$. Lorsque le freinage est terminé, l'équation différentielle est $\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$. Lorsque $t \rightarrow \infty$, la solution correspond au second membre, on a donc évidemment $X_{t \rightarrow \infty} = 0$. Si l'on veut déterminer - ce qui n'était pas demandé - la solution $X(t)$ pour cette nouvelle phase, on utilise la même forme de solution que précédemment (au second membre près...) et on utilise les conditions à la date $t = t_0$ pour lesquelles on a $X(t_0) = \frac{a}{\omega_0^2}$ et $\dot{x}(t_0) = 0$. On arrive alors à la forme $X(t \geq t_0) = \frac{a}{\omega_0^2}[1 + \omega_0(t - t_0)]\exp -\omega_0(t - t_0)$.

Utilisation du matériau piézoélectrique

Cas numéro 1 : Freinage brutal

13. La vitesse passe de $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à 0, l'accélération (décélération) moyenne est $a_{moy} = \left| \frac{\Delta V}{\Delta t} \right| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Cette valeur correspond à peu près à l'accélération de la pesanteur.

Cas numéro 2 : Arrêt suite à un choc

14. On trouve dans le cas du choc $a'_{moy} = 167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Cette valeur est très élevée, c'est plus de quinze fois la pesanteur.

15. La force est dans chaque cas : $F_{i,ent} = 2,8 \times 10^{-2} \text{ N}$ et $F'_{i,ent} = 0,47 \text{ N}$.

16. On trouve $V_e = \chi F = 0,17 \text{ V}$ et $V'_e = 2,82 \text{ V}$. Ces valeurs sont assez faciles à mesurer même si, pour la première, il faut prévoir que le signal sera plus bruité que pour la seconde.

17. Le régime critique est celui qui permet d'atteindre le plus rapidement le régime permanent. C'est donc celui qui permet la détermination la plus rapide de l'accélération. C'est important pour déclencher rapidement l'air-bag par exemple. De plus avec un régime pseudo-périodique, on aura forcément des dépassements lors des oscillations de la valeur de l'accélération du régime permanent et on pourrait très bien atteindre une valeur qui déclenche l'air-bag lors d'un freinage important mais sans accident.

Détecteur de tension

18. L'amplificateur linéaire intégré est monté en suiveur. En effet, puisque $\varepsilon = 0$, on a $V_- = V_+ = V_e$. La rétroaction entre l'entrée – et la sortie étant réalisée avec un simple fil supposé de résistance nulle, on retrouve la tension V_e en sortie pour alimenter le circuit composé de la diode et de la résistance R . C'est l'alimentation $\pm 15\text{ V}$ qui assure le courant i qui va traverser R et la diode. La diode devient lumineuse pour $u = U_d = 1,9\text{ V}$, on peut déjà constater que l'état éteint ou allumé de la diode correspond bien au fonctionnement souhaité à savoir discerner le choc brutal et le freinage. Par contre, il faut régler la valeur de la résistance R pour rester dans le domaine de fonctionnement de la diode qui ne doit pas dissiper une puissance supérieure à $P_d = 100\text{ mW}$. La loi des mailles donne $V_e = Ri + U_d$ avec $V_e = 2,8\text{ V}$ et $U_d = 1,9\text{ V}$ pour le choc brutal. On en déduit que $Ri = 0,9\text{ V}$. Or, dans le pire des cas on doit avoir $P_d = U_d i_{max}$. On en déduit que $i_{max} = 52\text{ mA}$. Il faut donc choisir une résistance $R > \frac{V_e - U_d}{i_{max}}$ ce qui donne $R > 18\Omega$. En prenant $R = 100\Omega$, on a une bonne marge pour ne pas griller la LED.

C. Microgénérateur piézoélectrique

19. Le terme $M \frac{d^2 z}{dt^2}$ représente le produit de la masse par l'accélération du centre d'inertie de la poutre. On peut encore dire qu'il s'agit de $\frac{d\vec{p}}{dt}$.

20. $-kz$ correspond à l'élasticité de la poutre, sa capacité à s'allonger ou se contracter dans le cadre d'une loi linéaire de type ressort. $-\alpha \frac{dz}{dt}$ correspond à un terme dissipatif d'énergie, cela est à mettre en rapport avec l'énergie dissipée à l'intérieure de la poutre lorsqu'elle se déforme.

21. En passant en complexe, on arrive rapidement à $[(k - M\omega^2) + j\alpha\omega]Z_m = F_0$. Cela nous permet d'exprimer l'amplitude complexe du mouvement vertical de la poutre : $Z_m = \frac{F_0}{j\alpha\omega_0}$ puisque l'on se place à la pulsation $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

22. Nous venons de voir que $Z_m = -j \frac{F_0}{\alpha\omega_0}$. On a donc un déphasage de $-\pi/2$ et comme $\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sin \omega_0 t$, on en déduit que : $z(t) = \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \sin \omega_0 t$.

23. Nous savons que $v_z = \frac{dz}{dt}$, on arrive aisément à $v_z = \frac{F_0}{\alpha} \cos \omega_0 t$.

24. La capacité C_0 correspond à la capacité du quartz piézoélectrique à faire apparaître des charges opposées sur les deux faces concernées par la pression exercée.

25. β est en $\text{N} \cdot \text{V}^{-1}$. Si l'on multiplie par une vitesse et une force (N), on obtient une puissance en watt (W). En électricité $P = ui$, donc en divisant une puissance par une tension, on obtient bien une intensité : βv_z est en A.

26. On écrit la loi des nœuds dans le circuit proposé : $\beta v_z = C_0 \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}$. On passe cette équation en complexes dans l'espace des pulsations : $\beta \frac{F_0}{\alpha} = (jC_0\omega_0 + \frac{1}{R})V_m$. On peut donc conclure sur : $V_m = \frac{R \frac{\beta F_0}{\alpha}}{1 + jRC_0\omega_0}$.

27. La puissance moyenne récupérée P par la résistance d'utilisation est $P = \frac{V_{eff}^2}{R}$ où V_{eff} est la tension efficace correspondant à la tension sinusoïdale d'amplitude complexe V_m . On sait que l'on a $V_{eff} = \frac{|V_m|}{\sqrt{2}}$. La

puissance dissipée est donc : $P = \frac{R \frac{\beta^2 F_0^2}{\alpha^2}}{2(1 + R^2 C_0^2 \omega_0^2)}$.

Problème n° 2 – Fluctuations de courant

Ulm PC 2012

A. Mesure des fluctuations du courant électrique

1. La source de courant est idéale si le courant qu'elle délivre est indépendant de la tension à ses bornes. Dans le modèle de NORTON cela correspond à une résistance en parallèle de la source de courant de valeur infinie. L'amplificateur est idéal si son gain μ défini par $s(t) = \mu(V_+ - V_-)$ est infini. Il faut aussi que les impédances d'entrée sur l'entrée inverseuse et sur l'entrée non inverseuse soient infinies. Les conséquences de ce modèle sont $i_+ = i_- = 0$ et $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$.

2. On observe sur le montage proposé qu'il n'y a qu'une rétroaction sur l'entrée inverseuse. Comme il n'y a pas de rétroaction sur l'entrée non inverseuse, il y a toutes les chances que l'AO ne soit pas en saturation. Il faut quand même veiller à ce qu'il ne sature pas en courant de sortie en ne le faisant pas débiter dans une impédance trop faible.

3. On note $Z_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} = \frac{1+jR_1C_1\omega}{jC_1\omega}$ correspondant à l'association série de R_1 et de C_1 . On note aussi $Z_2 = \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}$ pour l'association en parallèle de R_2 et C_2 . On applique le théorème de MILLMAN au niveau de l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel : $V_- = \frac{s/Z_2 + e/Z_1}{1/Z_2 + 1/Z_1}$. Comme l'amplificateur opérationnel est idéal et en régime linéaire, on a $V_- = V_+ = 0$. La fonction de transfert est la fonction classique d'un inverseur : $\underline{H} = -\frac{Z_2}{Z_1}$. Après calcul, on trouve $\underline{H} = \frac{-R_2/R_1}{(1+1/(jR_1C_1\omega))(1+jR_2C_2\omega)}$. On peut donc identifier le gain et les pulsations caractéristiques : $g = -R_2/R_1$ et $\omega_{c1} = 1/(R_1C_1)$ et $\omega_{c2} = 1/(R_2C_2)$. Si on étudie les comportements aux limites, on a $\underline{H} \rightarrow 0$ pour $\omega \rightarrow 0$ mais aussi pour $\omega \rightarrow \infty$. Le filtre est par conséquent un passe-bande.

4. Si $\omega_{c1} \ll \omega_{c2}$, cela signifie que $R_1C_1 \gg R_2C_2$ et par conséquent, on aura $|g| \ll \frac{C_1}{C_2}$.

5. En développant le calcul de la fonction de transfert, on a $\underline{H} = \frac{g}{1 + \frac{\omega_{c1}}{\omega_{c2}} + j(\frac{\omega}{\omega_{c2}} - \frac{\omega_{c1}}{\omega})}$. La valeur maximale de $|\underline{H}|$ s'obtient pour $\omega_m = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$ et vaut $|\underline{H}|_m = \frac{|g|}{1 + \frac{\omega_{c1}}{\omega_{c2}}}$. Pour la condition $\omega_{c1} \ll \omega_{c2}$, on a bien $|\underline{H}|_m = |g|$.

6. L'allure du diagramme de BODE représentant le gain en décibel $G_{dB} = 10 \log |\underline{H}|^2$ en fonction de $\log \omega/\omega_m = \log x$ est représenté sur le graphique de la figure 2.

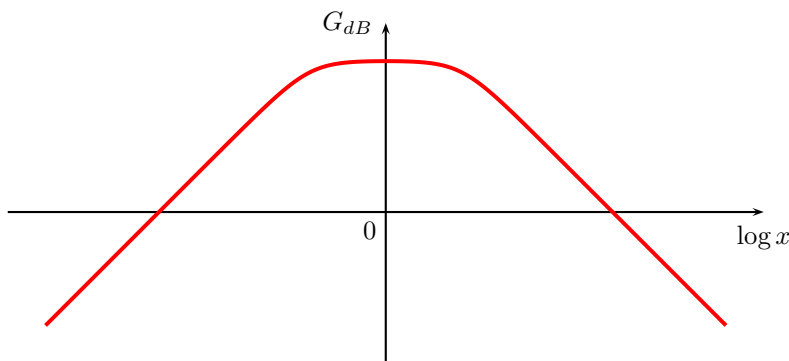


FIGURE 2 – Diagramme de BODE de \underline{H} pour $\omega_{c2} = 100\omega_{c1}$ et $|g| > 1$

7. On constate que la tension $e(t)$ se situe à la fois aux bornes de Z_1 et de R . Le courant qui descend dans R est donc $e(t)/R$. Dans ces conditions, on peut voir que le courant $\underline{I} - \frac{e}{R} + \underline{\delta i}$ traverse l'impédance Z_1 . On en déduit alors que $\underline{e} = Z_1(\underline{I} - \underline{\delta i} + \frac{e}{R})$. On a $\underline{e} = \frac{RZ_1}{R+Z_1}(\underline{I} + \underline{\delta i})$. On trouve que la tension d'entrée est donnée par

$$\underline{e} = \frac{1+jR_1C_1\omega}{1+j(R+R_1)C_1\omega} R(\underline{I} + \underline{\delta i}).$$

8. On a $\underline{I}(\omega) = 0$ $\forall n \neq 0$ et $I(n=0) = I$ puisque $\omega = 0$ correspond à un courant continu de période infinie.

9. $i_{n=0} = 0$ correspond à la valeur moyenne de $\delta i(t)$. Elle est nulle d'après les hypothèses. On peut d'ailleurs le voir en appliquant la formule de l'analyse de FOURIER $i_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta i(t) \exp -j\frac{2\pi}{T}nt dt$ qui donne bien pour $n = 0$, $i_{n=0} = \frac{1}{T} \int_0^T \delta i(t) dt = \overline{\delta i(t)} = 0$.

10. Pour l'harmonique de rang n , on obtient $\underline{e}_n = \frac{1+jR_1C_1\omega_n}{1+j(R+R_1)C_1\omega_n} R\underline{i}_n$ puisque $\underline{I}(\omega_n) = 0$.

11. Dans l'expression précédente, on peut constater que si $R_1 \gg R$ alors, l'expression se simplifie et ne dépend

plus des caractéristiques du montage amplificateur. On a alors $\underline{\epsilon}_n = Ri_n$.

12. La réponse en sortie est linéaire avec l'entrée ce qui fait que $\underline{s}_n = \underline{H}(\omega_n) Ri_n$ puisque $\underline{\epsilon}_n = Ri_n$.

13. On a $\underline{s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{H}(\omega_n) Ri_n$. On peut sortir R de cette expression et passer en réel en notant φ_n la phase associée à $\underline{H}(\omega_n)$. La sortie est donc $s(t) = R \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_n) i_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n)$. Lors du calcul de la moyenne, on peut intervertir les opérations d'intégration de la forme $\frac{1}{T} \int_0^T$ et la sommation sur n . Cela revient en fait à sommer la valeur moyenne de $\cos(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n)$ sur une durée supérieure ou égale ($n = 1$) à la période T . La moyenne est donc nulle : $\overline{s(t)} = 0$. La variance est donnée par $\Delta s^2 = \overline{s^2(t)} - (\overline{s(t)})^2 = \overline{s^2(t)}$. On doit donc calculer $\Delta s^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{s^2(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{s}_n|^2$ d'après l'égalité de PARSEVAL.

14. On nous donne $|\underline{i}_n|^2 = \frac{S_{ii}}{2T}$, cela permet de voir que $|\underline{i}_n|^2$ est le même pour toutes les harmoniques. On peut en déduire que $\Delta s^2 = \frac{R^2 S_{ii}}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{H}_n|^2$. Comme la fonction de transfert est paire en $\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$, on réduit la somme pour $n > 0$. Comme le numérateur est une constante, on arrive à l'expression $\Delta s^2 = \frac{R^2 S_{ii} g^2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + (\frac{\omega_{c1} T}{2\pi n})^2)(1 + (\frac{2\pi n}{\omega_{c2} T})^2)}$. Il faut utiliser le formulaire avec $a = \frac{\omega_{c2} T}{2\pi}$ et $b = \frac{\omega_{c1} T}{2\pi}$. Comme $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$, on a alors $a \gg b$ ce qui correspond à la condition d'utilisation du formulaire. Cela donne dans un premier temps $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + (\frac{\omega_{c1} T}{2\pi n})^2)(1 + (\frac{2\pi n}{\omega_{c2} T})^2)} = \frac{\pi}{2} (\frac{T}{2\pi}) (\omega_{c2} - \omega_{c1})$, puis $\Delta s^2 = \frac{R^2 S_{ii} g^2}{4} (\omega_{c2} - \omega_{c1})$. Avec l'expression de Δf , on arrive bien à l'expression : $\Delta s^2 = (Rg)^2 S_{ii} \Delta f$.

15. On a $|\underline{i}_n|^2 = \frac{S_{ii}}{2T}$, la dimension de S_{ii} est donc $A^2 s$. Par la définition de l'intensité, on a $A s = C$ ce qui permet d'exprimer d'une autre façon la dimension de S_{ii} : $\frac{A C}{A}$. Plus la bande passante sera large, plus Δs^2 sera élevée. Avec un modèle blanc de distribution pour les fluctuations de l'intensité, c'est-à-dire un modèle où toutes les harmoniques sont d'égale amplitude, on peut s'attendre à une situation non physique. On le constate avec l'expression de la puissance associée qui est en $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R |\underline{i}_n|^2$ qui va diverger puisque la somme est infinie.

16. Pour résoudre le problème précédent, il serait plus logique de mettre, pour les fluctuations de courant, des amplitudes décroissantes avec n car il n'est pas logique que les très hautes fréquences soient fortement représentées dans le spectre.

17. D'après le graphique, on peut constater que $\Delta s^2 = aI$ où a est la pente du graphique avec $a = \frac{8 \times 10^{-8}}{8 \times 10^{-5}} = 10^{-3} V^2 A^{-1}$. On a $aI = (gR)^2 S_{ii} \Delta f$ d'où $F = \frac{S_{ii}}{2eI} = \frac{a}{2e(gR)^2 \Delta f}$. On trouve $F = 0,412$.

18. L'absence de la capacité C_1 correspond à son remplacement par un fil ce qui correspond à une capacité $C_1 \rightarrow 0$. À ce moment-là, la fonction de transfert devient $\underline{H} = -\frac{Z_2}{R_1} = \frac{g}{1 + jR_2 C_2 \omega}$. On voit alors que \underline{H} correspond à un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure ω_{c2} . Dans ces conditions, on ne va plus filtrer le continu. On aura au départ $e(\omega = 0) = RI$ et $s = ge(\omega = 0) = gRI$. Le coefficient gR vaut $3,29 \times 10^5 \Omega$. On peut très vite retrouver l'amplificateur opérationnel en saturation pour la tension de sortie. En imaginant une alimentation classique $\pm 15 V$ et un amplificateur idéal, la tension de saturation en sortie sera de $15 V$. Le courant maximal continu acceptable est donc $I_{sat} = \frac{V_{sat}}{gR} = 45,6 \mu A$. On voit sur le graphique expérimental proposé que l'intensité monte largement au-delà de cette valeur puisque qu'on atteint $I = 80 \mu A$. On a donc une possibilité de saturation.

B. Modèle de Drude

19. Pour une durée dt comprise entre t et $t + dt$, on a une probabilité de choc $\frac{dt}{\tau_e}$. Il faut encore que la particule n'en ait pas subi jusqu'à la date t . La différence des probabilités est donc $P(t) - P(t + dt) = \frac{dt}{\tau_e} P(t)$. On a donc $-\frac{dP}{dt} = \frac{P}{\tau_e}$ ce qui conduit à l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} + \frac{P}{\tau_e} = 0$.

20. L'intégration donne : $P(t) = A \exp -\frac{t}{\tau_e}$. Or à la date $t = 0$, on a forcément $P(t = 0) = 1$ donc $A = 1$. La probabilité obéit à l'équation : $P(t) = \exp -\frac{t}{\tau_e}$.

21. On a $P(t) = \int_t^{+\infty} \rho(t') dt'$. On dérive par rapport au temps t et on obtient $\frac{dP}{dt} = \rho(\infty) - \rho(t)$. Comme la densité de probabilité est forcément nulle pour une durée infinie $\rho(\infty) = 0$, on obtient bien l'expression demandée : $\rho(t) = \frac{1}{\tau_e} \exp -\frac{t}{\tau_e}$.

Mesure du temps de relaxation τ_e

22. On applique la relation fondamentale de la dynamique $m_e \frac{d\vec{V}_n}{dt} = -e\vec{E}$ d'où lorsqu'on intègre cette fonction constante : $\vec{V}_n(t) = -\frac{eEt}{m_e} \vec{e}_x + \vec{V}_n(0)$.

23. On prend la moyenne de l'expression précédente : $\langle \vec{V}_n(t) \rangle = -\frac{eE}{m_e} \vec{e}_x \langle t \rangle + \langle \vec{V}_n(0) \rangle$. Comme les vitesses initiales ont une orientation totalement aléatoires, on a $\langle \vec{V}_n(0) \rangle = \vec{0}$. Il faut maintenant calculer la moyenne

$\langle t \rangle = \int_0^\infty \rho(t) t dt$. Avec la formule de la densité de probabilité, on obtient $\langle t \rangle = \frac{1}{\tau_e} \int_0^\infty t \exp -\frac{t}{\tau_e} dt$. Avec le formulaire, on obtient la valeur de cette intégrale mais on peut aussi la calculer en effectuant une intégration par partie. On trouve $\langle t \rangle = \tau_e$ d'où $\langle \vec{V}_n(t) \rangle = -\frac{eE\tau_e}{m_e} \vec{e}_x$. Comme on peut le constater, cette vitesse est indépendante de n . On peut poser $\langle \vec{V}_n(t) \rangle = \langle \vec{V} \rangle = -\frac{eE\tau_e}{m_e} \vec{e}_x$.

24. Par définition de la densité volumique de courant, on a $\vec{j}_e = -n_e e \langle \vec{V} \rangle$. On remplace par l'expression trouvée à la question précédente et on trouve la loi d'OHM : $\vec{j}_e = \sigma \vec{E}$ avec $\sigma = \frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e}$ en guise de conductivité.

25. L'intensité est définie par $i = \iint \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = j_e s$. La tension est reliée au champ électrique par $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = EL$. La résistance électrique est alors $R = \frac{U}{i} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{s}$ ce qui permet de conclure par : $R = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau_e} \frac{L}{s}$.

26. On a : $n_e = \frac{\mu_e}{M_e} \mathcal{N}_A = 5,9 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

27. On trouve $\tau_e = \frac{m_e L}{n_e e^2 s R}$. La valeur numérique est $\tau_e = 7 \times 10^{-16} \text{ s}$.