Devoir de Sciences Physiques n°2 pour le 30-09-2024

Problème n° 1 – Détermination de la constante de Boltzmann par spectroscopie acoustique dans un résonateur sphérique *Adapté ENS Ulm PSI 2021*

Le nouveau système international d'unités (SI) est entré en vigueur depuis le 20 mai 2019. Son principal but a été de rédéfinir l'unité de masse jusqu'alors définie par un étalon. Pour ce faire, la valeur de la constante de PLANCK h a été fixée. D'autres unités ont aussi vu leur définition modifiée. C'est le cas de la température. Jusqu'alors définie en fixant la valeur de la température du point triple de l'eau, elle est maintenant définie en fixant la valeur de la constante de BOLTZMANN k_B : $k_B = 1,380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.

Plusieurs expériences ont été réalisées afin de déterminer le plus précisément la valeur que l'on a fixée. Nous allons détailler une de ces expériences.

Valeurs numériques :

Constante de BOLTZMANN	$k_B = 1,380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
Constante d'AVOGADRO	$\mathcal{N}_A = 6,022\,140\,76 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Constante universelle des gaz parfaits	$R = \mathcal{N}_A k_b = 8,314\,462\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,82 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$
Unité de masse atomique	$m_u = 1,660\,5 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Notations :

$\chi_S = -\dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right\|_S$	coefficient de compressibilité isentropique
$\chi_T = -\dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right\|_T$	coefficient de compressibilité isotherme
m	masse de l'atome constituant un gaz
c_P et c_V	capacités thermiques massiques isobare et isochore
$\overline{C}_P$ et $\overline{C}_V$	capacités thermiques molaires isobare et isochore
$\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = \dfrac{5}{3}$	coefficient de LAPLACE ou indice adiabatique pour un gaz parfait monoatomique

Notations complexes :

Soit un signal sinusoïdal d'expression mathématique $a(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, on lui associe une grandeur complexe $\underline{a}(t) = A\exp -(\omega t + \phi) = \underline{A}\exp -i\omega t$ telle que $a(t) = \Re\underline{a}(t)$. La quantité $\underline{A}$ est l'amplitude complexe du signal.

Propriétés de l'argon :

L'argon est l'élément chimique de numéro atomique $Z = 18$ et de symbole Ar. Il fait partie de la famille des gaz nobles, également appelés *gaz rares*, qui regroupe également l'hélium, le néon, le krypton, le xénon et le radon. L'argon possède plusieurs isotopes dans les proportions données ci-dessous :

Isotopes	Abondance	Masse molaire ($\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$)
$^{40}\mathrm{Ar}$	$99,603\,5\%$	$39,962$
$^{38}\mathrm{Ar}$	$0,062\,9\%$	$37,963$
$^{36}\mathrm{Ar}$	$0,333\,6\%$	$35,968$
Total : M_{Ar}		$39,948$

A. Introduction

Le but de l'expérience est de mesurer la vitesse du son dans un gaz dont on contrôle les paramètres thermostatiques (pression et température). La mesure de la vitesse s'effectue en mesurant précisément la fréquence des modes de résonance d'une cavité acoustique sphérique de rayon R_c.

Dans ce problème, les valeurs numériques choisies sont celles de l'expérience qui a été réalisée en 2012 au Conservatoire National des Arts et Métiers et au Laboratoire National de Métrologie et d'Essai. Le gaz utilisé est l'argon. Le rayon R_c de la cavité est d'environ 5 cm. L'expérience est effectuée à une température proche de 0 °C.

Les paramètres thermostatiques principaux sont les valeurs moyenne de la pression statique P_0, de la température T_0 ainsi que de la masse volumique ρ_0. Ce sont les valeurs de références lorsqu'il n'y a pas d'onde acoustique. Les

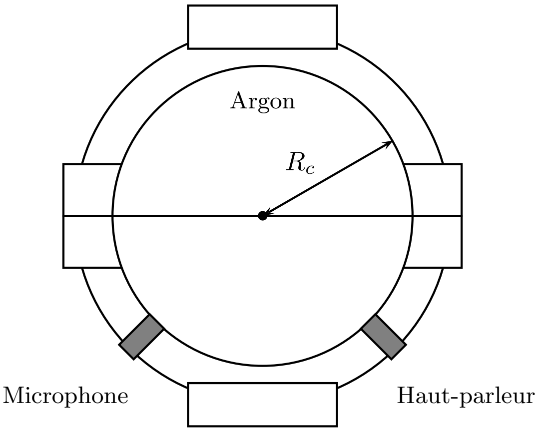

FIGURE 1 – Schéma de la cavité acoustique. Le haut-parleur crée une onde acoustique dans la cavité dont l'amplitude est mesurée par le microphone

modifications de ces paramètres sont toujours considérées comme faibles devant les paramètres thermostatiques lorsque l'onde acoustique existe. On parle alors d'*approximation acoustique*.

1. Écrire la relation reliant P_0, T_0, ρ_0 et la constante de BOLTZMANN pour un gaz parfait. Montrer, toujours pour un gaz parfait, que :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_S = \frac{1}{\gamma P_0}$$

B. Équation acoustique

Nous allons dériver les équations acoustiques à une dimension. On note $u(x,t)$ le déplacement particulaire à la position x. On note $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ la pression. On notre $\rho(x,t)$ la densité.

On considère une tranche de section S et de largeur dx à la position (au repos) x. Cette tranche de masse constante (que l'on notera dm) se trouve au cours du temps entre les positions $u(x,t)$ et $u(x+\mathrm{d}x,t)$. On pourra introduire le volume dV de cette tranche. La compressibilité du fluide fait que, légèrement comprimé puis lâché, le fluide se détend et inversement, comme un ressort. Voir la figure 2.

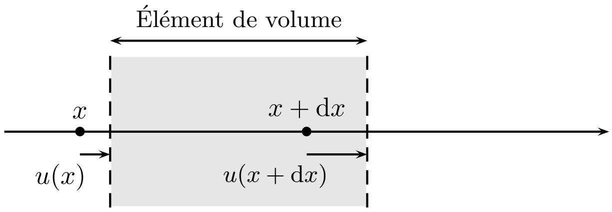

FIGURE 2 – Schéma de la tranche de fluide perturbée par l'onde acoustique

2. On suppose que la compression se fait à entropie constante. Calculer le lien entre p et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. On introduira le coefficient de compressibilité isentropique χ_S.

3. On introduit le champ des vitesses $v(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Démontrer, dans le cadre de l'approximation acoustique, que :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

4. Démontrer que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Quel nom porte cette équation ?

5. Donner l'expression de la célérité c d'une onde sonore dans ce milieu.

On suppose le gaz parfait, de coefficient de LAPLACE γ.

6. En utilisant la loi de LAPLACE, montrer que la célérité c peut s'écrire sous la forme :

$$c = \sqrt{\frac{k_B T_0 \gamma}{m}}$$

où m est la masse de l'atome constituant le gaz. Faire l'application numérique pour l'argon à température ambiante (25 °C).

7. Le but de l'expérience que l'on va décrire par la suite est de mesurer précisément c afin de déterminer k_B. Pourquoi, dans cette expérience, utilise-t-on un gaz mono-atomique tel que l'argon ?

C. Mode stationnaire d'une cavité

Cavité linéaire

On considère une cavité linéaire, de longueur L (les parois sont en $x = 0$ et $x = L$). On suppose dans un premier temps que les murs ont une impédance acoustique infinie. L'impédance acoustique est définie comme le rapport de $p(x,t)$ et de $v(x,t)$.

8. Écrire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ sur le champ des vitesses $v(x,t)$. Pour quelles pulsations ω existe-t-il des solutions stationnaires pour $v(x,t)$?

On note ω_n la n-ième résonance (en partant de ω_1 plus petite pulsation de résonance non nulle).

9. Faire l'application numérique de ω_1 pour une cavité de longueur $L = 10\,\text{cm}$. Donner la fréquence associée.

Il est possible de réaliser l'expérience à une dimension dans un tube appelé tube de KUNDT. Cependant, les effets du bord du tube modifient l'équation et limitent la précision de l'expérience. C'est pour cette raison que l'on utilise une cavité sphérique.

Cavité sphérique

Nous rappelons que, à trois dimensions, l'équation de D'ALEMBERT s'écrit :

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) p(\vec{r},t) = 0$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien. Cette équation se démontre en généralisant l'étude réalisée à une dimension. En particulier, l'équation (1) devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, p = 0$$

On rappelle qu'en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

ou bien

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

En coordonnées sphériques, on cherche une solution à symétrie sphérique, c'est-à-dire sous la forme $p(r,\theta,\phi,t) = p(r,t)$.

10. Quelle équation vérifie la grandeur $p(r,t)$?

11. On cherche une solution de pulsation ω. Démontrer que, en notation complexe, il existe deux solutions $\underline{p}_+$ et $\underline{p}_-$ telles que :

$$\underline{p}_+ = a_+ \frac{\exp i(kr - \omega t)}{r} \qquad \text{et} \qquad \underline{p}_- = a_- \frac{\exp i(-kr - \omega t)}{r}$$

où l'on exprimera k en fonction de ω.

12. Quelles sont les interprétations physiques respectives des solutions $\underline{p}_+$ et $\underline{p}_-$?

13. Calculer le champ des vitesses $\underline{\vec{v}}_+(\vec{r},t)$ associé à $\underline{p}_+$ et $\underline{\vec{v}}_-(\vec{r},t)$ associé à $\underline{p}_-$.

On rappelle que dans un milieu de densité ρ_0, la densité d'énergie acoustique est la somme entre la densité d'énergie cinétique et la densité d'énergie potentielle de pression et vaut :

$$e_{ac} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2} + \frac{1}{2}\rho_0 v^2$$

Cette énergie vérifie l'équation de conservation :

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial e_{ac}}{\partial t} = 0$$

où $\vec{j} = p\vec{v}$ est le vecteur intensité acoustique instantanée.

On considère la solution acoustique $\underline{p}(r,t) = \underline{p}_+(r,t) + \underline{p}_-(r,t)$ en considérant que a_+ et a_- sont des nombres complexes.

14. Calculer le flux moyen de $\vec{j}$ à travers une sphère de rayon r_0 très petit devant c/ω. Pourquoi ce flux doit-il être en moyenne nul ? En déduire que $|a_+| = |a_-|$.

Le calcul du flux d'énergie ne nous permet pas de connaître la relation entre les phases de a_+ et a_-.

15. Calculer le terme dominant de la vitesse en $r \to 0$ et démontrer que la condition $a_+ = -a_-$ est nécessaire pour que celui-ci s'annule.

16. En écrivant la condition aux limites sur la paroi de la sphère, écrire la condition de résonance pour une onde stationnaire (on supposera que la paroi est d'impédance infinie). Mettre cette équation sous la forme :

$$\tan x = x$$

où x est une quantité adimensionnée dépendant de r, ω et c.

17. En utilisant une représentation graphique de l'équation précédente, montrer qu'il existe un nombre infini et discret de solutions ω_n avec $n \in \mathbb{N}^*$ (correspondant à une solution x_n). Donner une borne inférieure et supérieure à chaque solution.

18. Calculer les coefficients C_1, C_0 et C_{-1} du développement limité :

$$x_n \simeq C_1 n + C_0 + C_{-1}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

valable lorsque $n \to \infty$.

19. Il n'existe pas de solution analytique simple de cette équation. Décrire en quelques lignes un algorithme permettant de calculer numériquement la solution x_n. Voici les premières valeurs de x_n :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$4,493$	$7,725$	$10,904$	$14,066$	$17,220$	$20,371$	$23,519$	$26,666$

D. Cavité avec pertes

Dans cette partie, nous revenons à l'étude d'une cavité à une dimension.

Pour obtenir l'équation de D'Alembert de propagation des ondes acoustiques, nous n'avons pas pris en compte des mécanismes de dissipation qui peuvent intervenir au cours de la propagation. En particulier la viscosité ou la conduction thermique vont réduire l'amplitude de l'onde. Une approche phénoménologique de l'absorption consiste à introduire un délai entre le changement de pression et le changement de densité, en écrivant pour cela une équation d'état modifiée reliant $p(x,t)$ à $\rho(x,t)$:

$$p = c^2\left((\rho - \rho_0) + \tau_r \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)$$

où τ_r est un temps de relaxation.

20. Démontrer la nouvelle équation de propagation pour la densité :

$$\Delta\rho + \tau_r\frac{\partial\Delta\rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$$

On pourra effectuer la démonstration à une dimension puis on généralisera à la forme ci-dessus à trois dimensions. On utilisera l'équation locale de conservation de la masse dans l'approximation acoustique donne la relation $\rho_0\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

On se place dans un régime sinusoïdal forcé à la fréquence ω. De plus, on suppose que $\omega\tau_r \ll 1$.

21. Dans le cas à une dimension, on suppose que l'équation possède des solutions de la forme $\underline{\rho}(x,t) = \rho_0 + \underline{R}_0 \exp i(kx - \omega t)$. Démontrer que dans la limite $\omega\tau_r \ll 1$; deux valeurs de k sont possibles, qui sont au premier ordre en $\omega\tau_r$:

$$k = \pm\frac{\omega}{c}\left(1 + i\frac{\omega\tau_r}{2}\right)$$

22. Tracer schématiquement, l'amplitude pour $x > 0$ et $t = 0$ d'une onde se propageant vers les $x > 0$ et pour $\underline{R}_0$ réel. Quelles sont les deux échelles caractéristiques de longueur présentes sur ce graphe ? On prendra $\omega\tau_r$ de l'ordre de $0,1$.

23. Toujours au premier ordre en $\omega\tau_r$, calculer $\underline{v}(x,t)$ et $\underline{p}(x,t)$. Calculer l'impédance complexe :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{v}(x,t)}$$

24. Tracer schématiquement $\underline{v}(x,t)$ et $\underline{p}(x,t)$ pour une onde se propageant vers les $x > 0$ et pour $\underline{R}_0$ réel. Comment se traduit graphiquement le fait que $\underline{Z}$ possède une partie imaginaire non nulle ?

L'objectif est de calculer la fréquence de résonance d'une cavité linéaire avec pertes. À cause des pertes, il va falloir injecter en permanence une onde acoustique dans le milieu. Pour cela, une membrane vibrante est placée en$x = 0$. Elle crée une onde de pression se propageant vers les $x > 0$ et d'amplitude p_0. Dans la cavité, l'onde sera sous la forme :

$$\underline{p} = a_+ \exp i(kx - \omega t) + a_- \exp i(-kx - \omega t)$$

25. En utilisant la condition de réflexion parfaite sur la paroi en $x = L$, calculer a_- en fonction de a_+.

26. L'onde d'amplitude a_+ est la somme de l'onde d'amplitude p_0 et de l'onde a_- réfléchie. En utilisant cette relation, calculer l'amplitude a_+ en fonction de p_0 et des autres paramètres du problème.

On suppose que la vitesse du fluide en $x = 0$ est donnée par $v_0 \cos\omega t$. On souhaite calculer les variations d'intensité en fonction de la fréquence ω. On admet que l'intensité dans la cavité est proportionnelle à $|a_+|^2$.

27. Calculer donc $|a_+|^2$ en fonction de v_0^2, k et L. Vérifier que l'on peut considérer que les maximums d'intensité sont toujours aux mêmes valeurs ω_n.

Le principe de l'expérience est d'effectuer une mesure des fréquences de résonance pour en déduire la constante de BOLTZMANN $k_B = 1,380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.

Problème n° 2 – Caractérisation d'une lame de verre *CCP MP 2015*

Problème à remettre à votre camarade prévu dans DMscope pour une correction croisée, retour de la correction croisée le 04/10 au plus tard.

L'objectif est de déterminer les caractéristiques d'une lamelle de verre d'épaisseur e et d'indice n par deux méthodes. Ce problème comporte cinq parties. La première aborde l'étude de la lame de verre. Les deuxième, troisième et quatrième parties cherchent à déterminer n et e par une méthode d'optique géométrique. La cinquième partie traite d'une méthode interférentielle.

A. Lame de verre

Une lame transparente est caractérisée par son épaisseur e et l'indice n du milieu qui la compose. On cherche à caractériser ce dioptre dans le cadre de l'Optique géométrique.

1. Donner un ordre de grandeur de l'indice du verre.

2. Rappeler les relations de SNELL-DESCARTES à la réfraction.

3. Effectuer un rapide tracé de rayon sur la figure 6 (voir document réponse) afin de trouver graphiquement la position de A' image de A par la lame [1].

4. Effectuer, de même, un rapide tracé de rayon sur la figure 6 (voir document réponse) avec un point objet A virtuel.

5. Montrer, par des considérations géométriques, que la relation de conjugaison qui relie A et A' est donnée dans les conditions de GAUSS par :

$$\overline{AA'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

1. Cette position n'est pas unique, elle dépend de l'angle d'incidence ce que l'énoncé original du sujet ne mentionnait pas. L'image est unique seulement dans les conditions de GAUSS.

B. Viseur

On étudie un viseur à frontale fixe (figure 3) constitué par :

— un objectif $\mathcal{L}_2$ de centre O_2, de distance focale $f'_2 = 50\,\text{mm}$
— un réticule gradué R_{oc}
— un oculaire modélisé par une lentille convergente $\mathcal{L}_1$ de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = 50\,\text{mm}$

On règle la lunette afin d'avoir, pour objectif, un grandissement transversal $\gamma_{ob} = \left(\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)_{ob} = -2$.

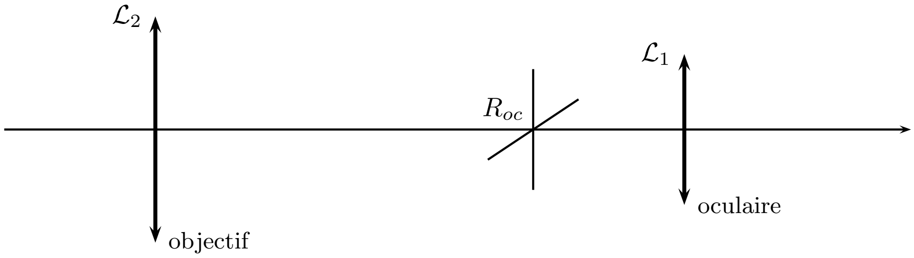

FIGURE 3 – Schéma d'un viseur à frontale fixe

6. Comment règle-t-on l'oculaire par rapport au réticule ?

7. Préciser la position $\overline{F_2A}$ de l'object visé par rapport à l'objectif en fonction de γ_{ob} et f'_2. Faire l'application numérique.

8. Déterminer l'encombrement $\overline{O_2O_1}$ de la lunette en fonction de f'_1, γ_{ob} et f'_2. Effectuer l'application numérique.

9. Valider vos résultats par un tracé de rayons justifiés sur la figure 7 (voir document réponse). Compléter la figure avec la présence du réticule R_{oc} et de la lentille $\mathcal{L}_1$.

10. Citer une application de ce type de viseur.

C. Description du dispositif expérimental

On complète le dispositif de lunette à, frontale fixe précédent par :

— un miroir plan $\mathcal{M}_0$ et orthogonal à l'axe optique
— une lame semi-réfléchissante $\mathcal{L}_s$ centrée sur L_s et inclinée à 45° : $\overline{O_2L_s} = 50\,\text{mm}$
— un miroir plan $\mathcal{M}_i$ centré sur M_i et incliné à 45° : $\overline{L_sM_i} = 100\,\text{mm}$
— une lentille $\mathcal{L}_3$ convergente de distance focale $f'_3 = 150\,\text{mm}$
— un objet constitué d'un réticule mobile R dont la position est mesurable

L'ensemble $(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ forme un système afocal, voir la figure 4.

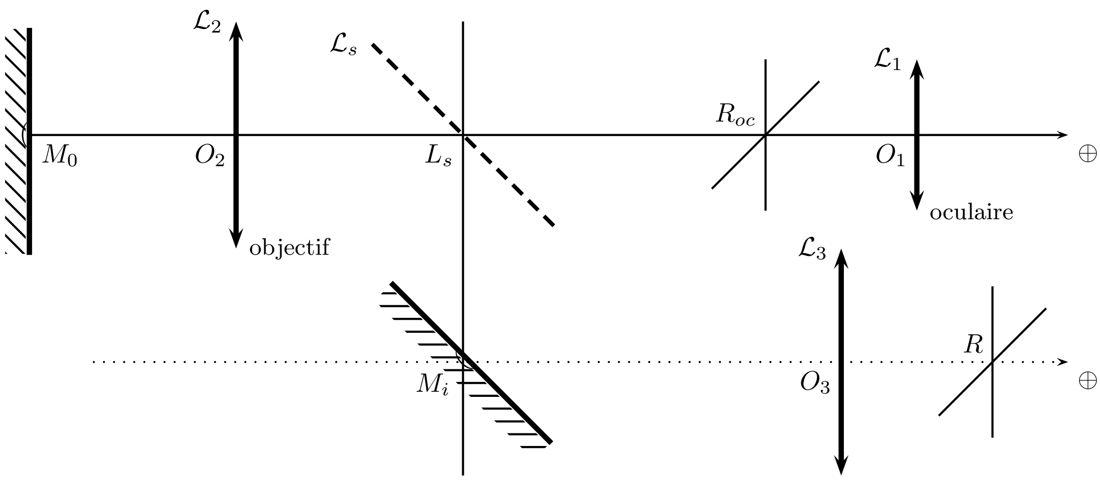

FIGURE 4 – Schéma du dispositif expérimental

Analyse du système additionnel

11. Tracer symboliquement sur la figure 8 (voir document réponse) le trajet de la lumière issue de R et émergeant de l'oculaire.

12. L'association de la lentille $\mathcal{L}_2$ avec la lame semi-réfléchissante $\mathcal{L}_s$, le miroir $\mathcal{M}_i$ et de la lentille $\mathcal{L}_3$ forme un système afocal. Définir la notion de système afocal. Quelle doit être la distance $\overline{M_iO_3}$ en fonction de f_3', f_2', $\overline{O_2L_s}$ et $\overline{L_sM_i}$ afin de réaliser cette condition ? Faire l'application numérique.

13. On note R' l'image de R par l'ensemble du système additionnel constitué par :

$$R \curvearrowright \mathcal{L}_3 \curvearrowright \mathcal{M}_i \curvearrowright \mathcal{L}_s \curvearrowright \mathcal{L}_2 \curvearrowright R'$$

On sera attentif à l'algébrisation de l'axe optique et au sens effectif de propagation de la lumière. Établir, en fonction de f_2' et f_3', la relation liant la position $\overline{F_3'R}$ de l'objet par rapport au foyer image de $\mathcal{L}_3$ à celle de son image R' donnée par $\overline{F_2R'}$.

14. On place l'objet R tel que $\overline{O_3R} = 150\,\text{mm}$, comme sur la figure 4. Où se trouve son image $\overline{O_2R'}$ par le système $(\mathcal{L}_3, \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_2)$? Quel est son grandissement transversal ?

On utilise une méthode d'autocollimation à l'aide du miroir plan $\mathcal{M}_0$, placé devant l'objectif à la distance $\overline{O_2M_0} = \overline{O_2F_2} = -50\,\text{mm}$. Attention : la lunette est réglée en frontale fixe comme dans la deuxième partie.

On éclaire le réticule R par rapport à la question précédente. Il donne une nouvelle image R' par le système optique $(\mathcal{L}_3, \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_2)$. R' sert alors d'objet au système (miroir $\mathcal{M}_0$, lunette de visée). On obtient une image R'' que l'on désire superposer à R_{oc}. On observe à travers l'oculaire l'image nette de deux réticules ((R_{oc} et R'').

15. Déterminer la position particulière d_0 du réticule R telle que $d_0 = \overline{F_3'R}$. Exprimer ce résultat en fonction de[2] $\overline{F_2A}$, f_2' et f_3'.

16. On éloigne le miroir $\mathcal{M}_0$ de l'objectif d'une distance e. Sa position M_{01} est telle que $\overline{O_2M_{01}} = \overline{O_2F_2} - e$. Afin de préserver une image nette à travers l'oculaire, on doit déplacer d'une valeur ε_1 le réticule R. La nouvelle position du réticule R est d_1 telle que $d_1 = \overline{F_3'R_1} = d_0 + \varepsilon_1$. Déterminer le déplacement ε_1 en fonction de e, f_2' et f_3'.

17. Quel est l'intérêt du système étudié ? Que dire du rapport entre les échelles sur les deux réticules ?

D. Application à la caractérisation d'une lame

Le miroir $\mathcal{M}_0$ et le réticule R sont placés initialement de telle sorte que : $\overline{O_2M_0} = \overline{O_2F_2} = -50\,\text{mm}$, $d_0 = \overline{F_3'R}$. De par le retour inverse de la lumière, on obtient le schéma suivant :

$$R_{oc} \,/\mathcal{L}_2 \curvearrowright A_1 \,/\mathcal{M}_0 \curvearrowright A_2 \,/\mathcal{L}_2 \curvearrowright A_3 \,/\mathcal{L}_s \curvearrowright A_4 \,/\mathcal{M}_i \curvearrowright A_5 \,/\mathcal{L}_3 \curvearrowright R$$

On intercale la lame d'indice n d'épaisseur e entre le miroir $\mathcal{M}_0$ et l'objectif $\mathcal{L}_2$.

18. Analyser la composition du système optique à l'aide d'un schéma synoptique.

19. La position de la lame a-t-elle une influence ?

20. Montrer que le déplacement du réticule R vers une position d_2, telle que $d_2 = \overline{F_3'R''} = d_0 + \varepsilon_2$, permet de retrouver une image nette.

21. Exprimer ε_2 en fonction de e, n, f_2' et f_3'.

22. On donne $e = 0,1\,\text{mm}$ et on mesure $|\varepsilon_2| = 0,6\,\text{mm}$. Quel est l'indice n de la lame ?

E. Approche interférentielle

On désire retrouver ces résultats par une méthode interférentielle. dans un système interférentiel à deux ondes, on provoque un déphasage entre les ondes parcourant les deux voies de l'interféromètre. Ce déphasage est fonction de la différence de marche δ et de la longueur d'onde λ. Lorsque λ varie[3], on parle de *cannelures* et lorsque δ varie on parle de franges. Un faisceau de lumière éclaire la lame précédente sous une incidence i quasi-constante et proche de 45 $^\circ$, voir la figure 5.

Théorie

23. Mettre en évidence sur les figures 9a) (lame d'air) et 9b) (lame de verre) du document réponse, la différence de marche géométrique entre les deux rayons issus d'un même rayon d'incidence i et qui interfèrent sur l'écran.

24. Déterminer la différence de marche géométrique $\delta_{\text{géo}}$ pour la lame d'air en fonction de n, e et l'angle d'incidence i.

25. Dans le cas d'une lame de verre, on obtient en considérant les différentes réflexions, une différence de marche totale :

2. Le point A n'est pas défini par l'énoncé, on supposera qu'il s'agit de la position de l'image du réticule R' par le miroir $\mathcal{M}_0$...
3. Il est impropre de parler de cannelures lorsque la longueur d'onde varie. Les cannelures apparaissent lorsqu'on opère en lumière blanche, ce sont de fines raies noires dans un spectre continu.

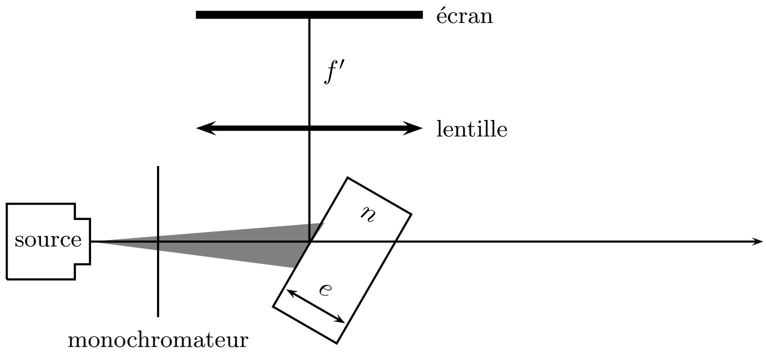

FIGURE 5 – Schéma du système optique

$$\delta = 2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

Analyser ce résultat pour $n = 1$ et commenter le facteur $\dfrac{\lambda}{2}$.

26. Donner l'expression de l'éclairement (formule de FRESNEL) pour des interférences à deux ondes cohérentes de même amplitude, en justifiant le cadre de son application. À quelles conditions les interférences sont-elles constructives ?

Expérience n°1

On se place à la longueur d'onde $\lambda = 532\,\text{nm}$ et on observe dans le plan focal image de la lentille de distance focale image $f' = 1\,\text{m}$.

27. Quelle est l'allure de la figure d'interférence ? Justifier votre réponse.

28. L'angle d'incidence étant proche de 45°, on pose $i = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$ avec $\alpha \to 0$. En différenciant l'expression de δ donnée précédemment pour $\lambda = \text{Cte}$, déterminer l'expression de la variation élémentaire $\mathrm{d}\delta$ de la différence de marche, en fonction de e, n et de la variation élémentaire de $\mathrm{d}\alpha$ de α.

29. Rappeler la définition littérale de l'interfrange.

30. Montrer que l'interfrange moyen Δx vérifie la relation [4] :

$$-\frac{2e}{f'}\frac{\Delta x}{\sqrt{n^2 - 0,5}} = \lambda$$

31. En exploitant au mieux la figure 10 (document réponse), trouver une seconde relation entre n et e.

Expérience n°2

On se place maintenant à incidence constante $i_0 = 45^\circ$ et on fait varier λ à l'aide du monochromateur [5]. On relève alors un spectre cannelé. Les longueurs d'onde éteintes sont notées λ_p [6].

32. Établir la relation [7] :

$$2e\sqrt{n^2 - 0,5} = \frac{\lambda_1 \lambda_p}{\lambda_p - \lambda_1}(p-1)$$

33. En exploitant au mieux la figure 11 (document réponse), trouver une seconde relation entre n et e.

34. Comment peut-on en déduire e et n ? Aucun calcul n'est demandé.

4. Cette expression est entachée d'une erreur de signe et d'une erreur de coefficient 2. On devrait avoir : $\frac{e}{f'}\frac{\Delta x}{\sqrt{n^2-0,5}} = \lambda$.

5. Comme cela a été dit précédemment, il n'est pas cohérent de parler de cannelures dans une situation où on utilise un monochromateur.

6. p n'est pas défini. En voyant ce qui suit, on peut supposer que p représente la p ième cannelure en partant pour la première cannelure depuis les longueurs d'onde faibles.

7. Cette expression est fausse a priori. Pour la considérer comme valable, il faut nier la dépendance de l'indice de réfraction par rapport à la longueur d'onde qui est donné par $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$. Cette approximation est gênante lorsque l'on envisage la question des cannelures car c'est justement la dépendance de l'indice $n(\lambda)$ en fonction de la longueur d'onde qui est responsable de la présence des cannelures.

DOCUMENT – RÉPONSE

Nom : Prénom :

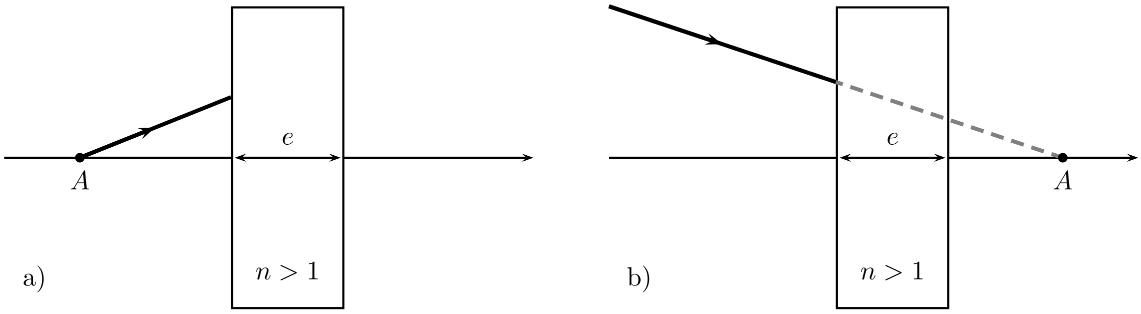

Figure 6 – Lame de verre

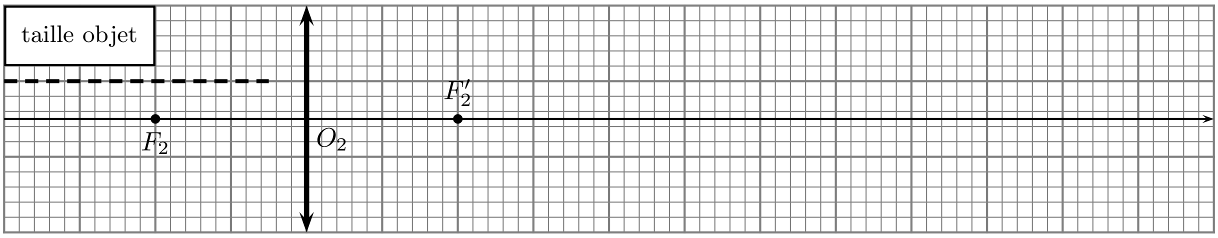

Figure 7 – Viseur à frontale fixe

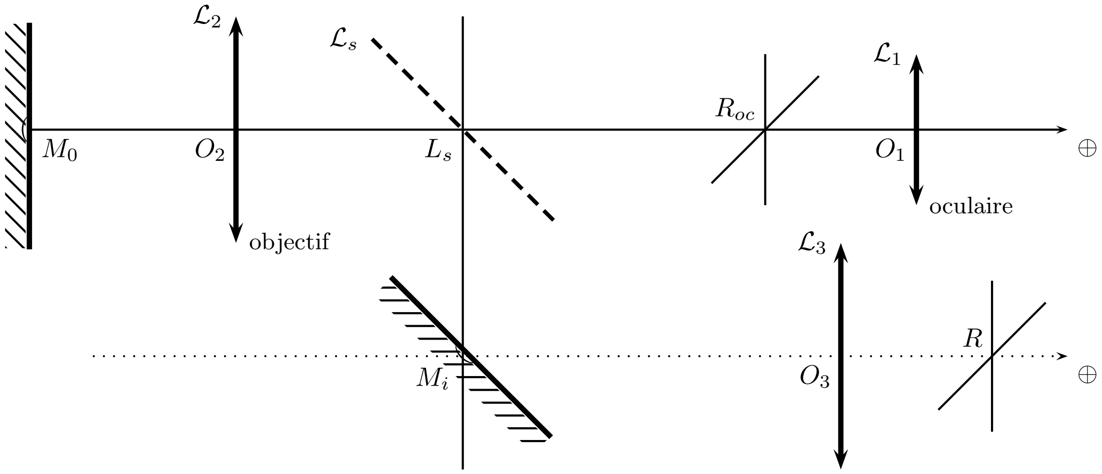

Figure 8 – Schéma du dispositif expérimental

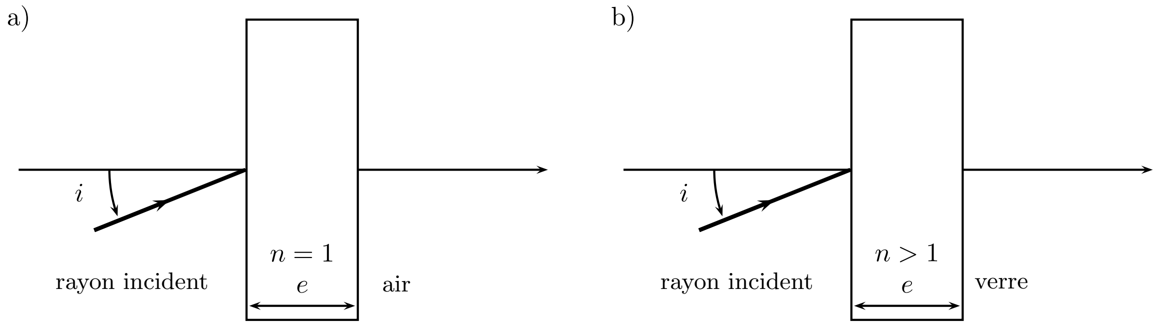

FIGURE 9 – Lames d'air et de verre en réflexion

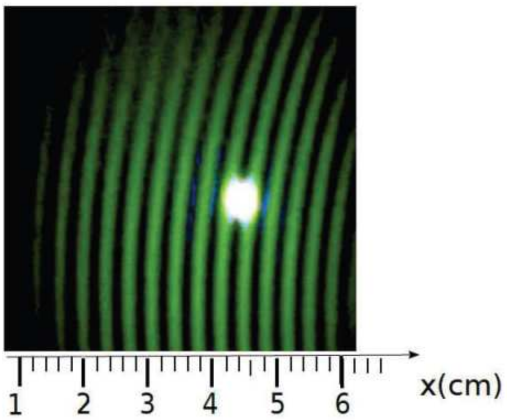

FIGURE 10 – Figure d'interférences

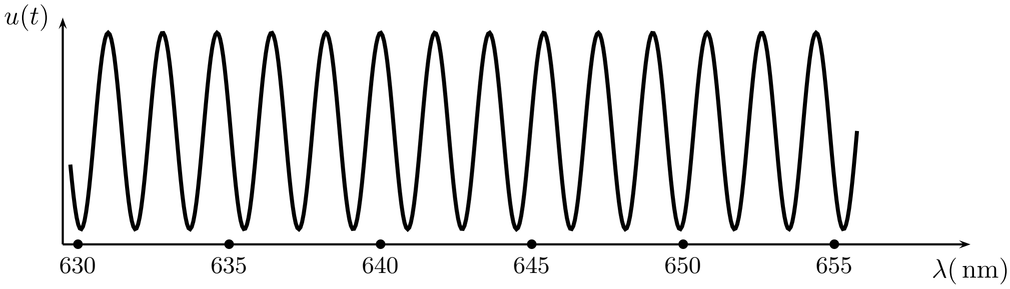

FIGURE 11 – Tension obtenue sur le capteur