Devoir de Sciences Physiques n°2 pour le 02-10-2023

Problème n° 1 – Audition humaine

Adapté X PC 2019

Nous nous proposons d'étudier les principaux mécanismes qui entrent en jeu dans l'audition. L'oreille humaine se décompose en trois parties, voir la figure 1, que nous allons étudier successivement. Les différentes parties de ce problème sont indépendantes et peuvent donc être traitées séparément. Certaines questions ne requièrent aucun calcul : vous serez alors évalué(e) sur la qualité de votre argumentation et votre sens physique. Tout au long de ce problème, les grandeurs physiques sinusoïdalement oscillantes seront représentées par une grandeur complexe notée $\underline{x}(t) = X_m \exp -i\omega t$.

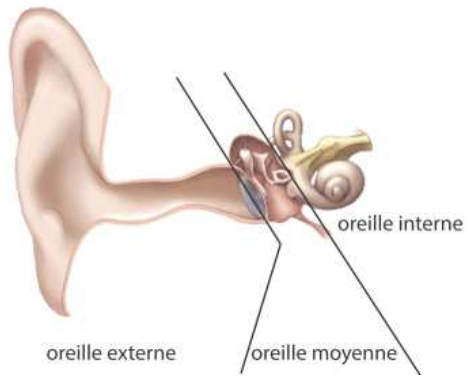

FIGURE 1 – Schéma de l'oreille humaine

A. L'oreille externe : un pavillon acoustique

On considère l'air comme un fluide initialement au repos, c'est-à-dire tel que les champs de vitesse, de pression et de masse volumique s'écrivent :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0} \qquad P(\vec{r},t) = P_0 \qquad \rho(\vec{r},t) = \rho_0$$

En présence d'une petite perturbation, ces champs deviennent :

$$\vec{v}(\vec{r},t) \neq \vec{0} \qquad P(\vec{r},t) = P_0 + p(\vec{r},t) \qquad \rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \rho_a(\vec{r},t)$$

On fera l'hypothèse de petites perturbations par rapport à l'équilibre, c'est-à-dire $p/P_0 \ll 1$ et $\rho_a/\rho_0 \ll 1$. On dit que l'on se place dans le cadre de l'approximation acoustique. Dans le cadre de cette approximation, on travaille toujours à l'ordre le plus bas. On appelle vitesse particulaire la vitesse $\vec{v}(z,t) = v(z,t)\vec{e}_z$ d'une particule d'air déplacée par l'onde acoustique dans le modèle unidimensionnel étudié ici.

L'oreille externe se comporte comme un pavillon acoustique qui intercepte les ondes planes acoustiques se propageant dans l'air pour les amener jusqu'au tympan. Pour comprendre son utilité, nous modélisons l'oreille externe par un tuyau circulaire d'axe z et dont la section $S(z)$ varie en fonction de l'abscisse z, voir la figure 2. On s'intéresse alors au volume d'air situé entre les abscisses z et $z + \mathrm{d}z$.

1. Pour établir l'équation qui régit la propagation dans ce conduit, on suppose tout d'abord que les différentes grandeurs physiques ne dépendent spatialement que de la variable z. Dans quelle condition cette hypothèse sera vérifiée ?

2. Dans ce cadre, quelles conditions une transformation thermodynamique doit-elle satisfaire pour pouvoir être considérée comme isentropique ? Nous nous placerons dorénavant dans cette situation.

3. La compressibilité isentropique de l'air intervient dans l'établissement de l'équation de propagation des ondes acoustiques. L'air est caractérisé par son coefficient de compressibilité isentropique définit par :

$$\chi_{\text{isentropique}} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{\text{entropie}}$$

Établir une nouvelle expression de la définition de $\chi_{\text{isentropique}} = \chi_0$ faisant intervenir la masse volumique ρ de l'air.

4. Dans le cadre de l'approximation acoustique définie au début de l'énoncé, après linéarisation, établir une relation entre $p(z,t)$, $\rho_a(z,t)$, ρ_0 et χ_0.

5. L'équation de conservation de la masse conduit à :

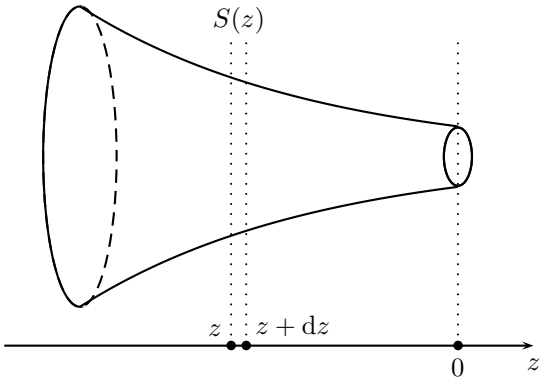

FIGURE 2 – Schéma du pavillon acoustique

$$\frac{1}{S(z)}\frac{\partial(\rho\, v\, S)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Que devient cette équation dans le cadre de l'approximation acoustique ?

6. L'application de la relation de la Dynamique à une tranche de fluide située entre z et $z + \mathrm{d}z$ conduit à :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

Quelle lecture faites-vous de cette équation ? Que devient-elle dans le cadre de l'approximation acoustique ?

7. À partir des équations précédentes, obtenir l'équation de propagation des ondes vérifiée par la vitesse particulaire, v, dans un tel conduit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial(S\, v)}{\partial z}\right) = 0$$

où $c^2\, \rho_0\, \chi_0 = 1$.

On considère désormais que la section du conduit a un profil exponentiel du type : $S(z) = S_0 \exp -\dfrac{z}{\delta}$.

8. Obtenir l'équation d'onde vérifiée par la vitesse particulaire dans cette géométrie.

9. Quelle différence a-t-on par rapport à une équation d'onde en espace libre dans un fluide parfait ?

10. Dans le cas du pavillon acoustique, établir la relation de dispersion des ondes en cherchant une solution sous la forme $\underline{v}(z,t) = v_0 \exp i(kz - \omega t)$ où le vecteur d'onde k est éventuellement complexe, que l'on notera $k = k' + ik''$.

11. À quelle condition a-t-on une solution dont le vecteur d'onde est imaginaire pur ? Est-ce vérifié pour les fréquences caractéristiques de la parole (100 Hz - 1 kHz), dans le cas de l'oreille humaine où l'on considère que la longueur caractéristique du pavillon est $\delta = 5\,\mathrm{mm}$? On rappelle $c_{air} = 340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

12. On considère une onde plane venant de $z = -\infty$ dans ce conduit. Au niveau de l'entrée de l'oreille ($z_1 \simeq -30\,\mathrm{mm}$), l'amplitude est celle du seuil de l'audition, soit $v_1 = 50\,\mathrm{nm \cdot s^{-1}}$. Évaluer la vitesse particulaire à 1 kHz au niveau du tympan ($z = 0$) ?

13. Tracer l'allure de la solution $v(z,t)$ retenue pour la fréquence de 1 kHz en fonction de z, à l'instant t où cette vitesse est extrémale.

14. Conclure quant au rôle de l'oreille externe dans ce modèle.

B. L'oreille moyenne

Les cellules sensorielles de l'audition sont situées dans l'oreille interne et baignent dans un milieu aqueux, alors que l'oreille externe est quant à elle située dans l'air. Il faut donc que les ondes acoustiques aériennes soient transformées en ondes se propageant dans un milieu aqueux. Pour rappel : $\rho_{air} = 1,25\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $c_{air} = 340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\rho_{eau} = 1\,000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $c_{eau} = 1\,500\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

On modélise l'oreille moyenne (à gauche) par un système masse-ressort qui relie rigidement un piston du côté de l'oreille externe de section S_t à un autre piston du côté de l'oreille interne de section S_c. On note $x(t)$ l'abscisse de ce second piston à l'instant t. Voir le schéma de la figure 3. La surpression par rapport à P_0, la pression atmosphérique, est $p_t(t)$ du côté de l'oreille externe et $p_c(t)$ du côté de l'oreille interne.

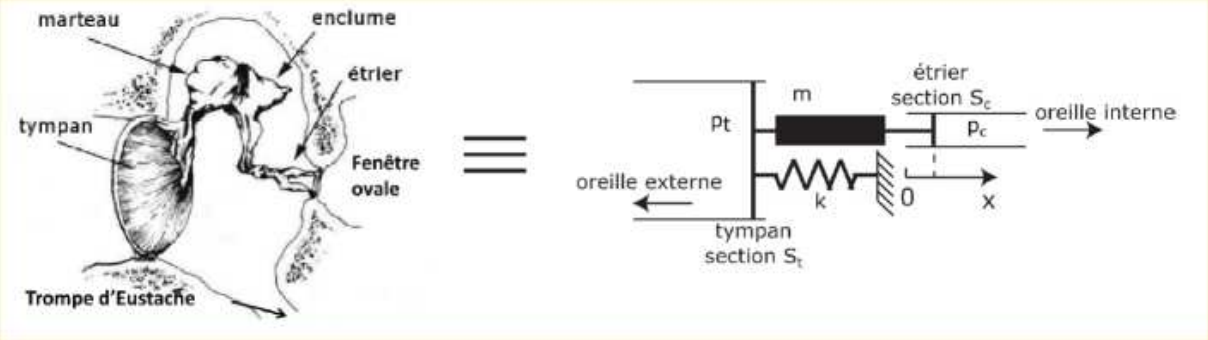

FIGURE 3 – Schéma de l'oreille moyenne

L'oreille moyenne se trouve typiquement à une interface air/eau. Elle est constituée du tympan et de l'enchaînement de 3 osselets (marteau, enclume et étrier). Son fonctionnement peut être modélisé par un système de type masse-ressort. L'oreille interne évolue dans l'eau pour laquelle on donne la définition de l'impédance acoustique ainsi que son expression :

$$Z_0 = \frac{p_c(t)}{\dot{x}} = \rho_{eau}\, c_{eau} = 1,5 \times 10^6 \,\mathrm{kg}\cdot\,\mathrm{m}^{-2}\cdot\,\mathrm{s}^{-1}$$

15. Proposer une analogie entre l'impédance acoustique et l'impédance en électricité.

16. Appliquer le principe fondamental de la Dynamique pour établir l'équation vérifiée par le déplacement $x(t)$ de l'extrémité de l'étrier (remarque : on considère qu'à la position $x = 0$ la force exercée par le ressort est nulle).

17. En déduire l'expression du gain en pression $\underline{G}(i\omega) = \underline{p}_c/\underline{p}_t$ lorsque le système est excité en régime sinusoïdal ($\underline{x}(t) = x_0 \exp(-i\omega t)$).

18. Mettre le gain $\underline{G}(i\omega)$ sous la forme canonique :

$$\underline{G}(i\omega) = \frac{G_{max}}{1 - iQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

où Q est le facteur de qualité, ω_0 la pulsation de résonance du filtre. On exprimera G_{max} en fonction de $S_t = 70\,\mathrm{mm}^2$ et de $S_c = 3,3\,\mathrm{mm}^2$ et on effectuera l'application numérique.

19. Donner l'allure de la courbe $|\underline{G}(i\omega)| = G(\omega)$ en décibels pour $Q = 0,5$ et $Q = 5$. Conclure sur la nature du filtre. Étudier les comportements haute fréquence et basse fréquence.

20. De nombreux poissons sont dépourvus d'oreille moyenne. Voyez-vous une explication ?

C. La cochlée : un spectromètre acoustique

Une fois qu'une pression a été générée dans l'oreille interne, il faut qu'elle soit convertie en une information utile pour le cerveau et ceci s'effectue essentiellement au sein de la cochlée, une partie de l'oreille interne. En 1863, HELMHOLTZ montre que cet organe en forme de colimaçon est composé d'une succession de cordes vibrantes de longueurs L_n variables maintenues immobiles à leurs deux extrémités, voir la figure 4.

21. Quels sont les fréquences et modes propres d'une corde de longueur L maintenue immobile aux deux extrémités pour une onde transversale se propageant le long de la corde ?

22. Si on émet une onde monochromatique de pulsation ω sur cet ensemble de cordes, quelles sont celles susceptibles de montrer un déplacement non uniformément nul ?

23. Si on part du principe qu'un potentiel d'action sera envoyé dans le cas où le déplacement d'une corde dépasse un certain seuil, en déduire que la cochlée se comporte comme un spectromètre.

VON BEKESY a montré expérimentalement que la propagation dans la cochlée ne peut pas être simplement modélisée comme celle d'une onde plane se propageant dans un fluide et nous allons maintenant étudier cette onde particulière. La cochlée est un conduit qui a une forme de serpentin, séparé en 2 canaux différents par une membrane élastique. Pour simplifier, nous étudierons la géométrie quasi-unidimensionnelle présentée sur la figure 4b).

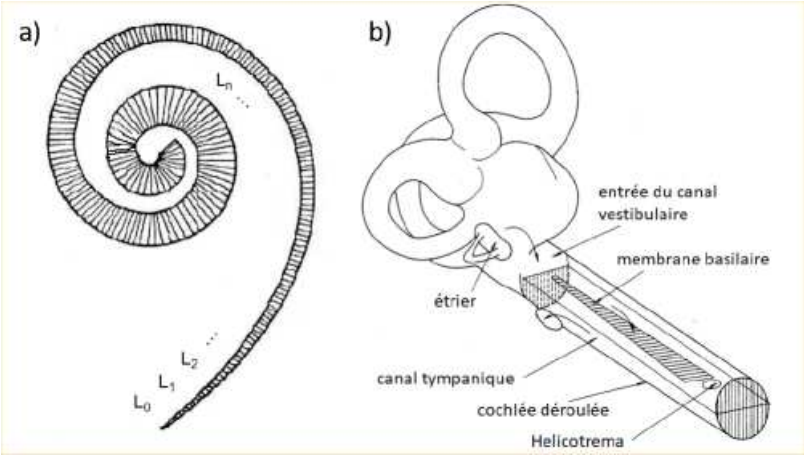

FIGURE 4 – a) Modèle de la cochlée selon VON HELMHOLTZ : une succession de cordes vibrantes de longueurs variables sont disposées le long de l'enroulement cochléaire (source : "On the sensation of tone...", 1877). b) Maquette originelle de VON BEKESY pour décrire l'onde se propageant le long de la membrane basilaire, où la cochlée a été déroulée pour donner un guide droit (source : "Nobel Lecture" de VON BEKESY, 1961).

On peut mesurer le déplacement vertical $h(x,t)$ de la membrane en différents points le long de l'abscisse curviligne x, et ce pour différentes fréquences d'excitation. Le résultat d'une telle mesure est schématisé sur la figure 5.

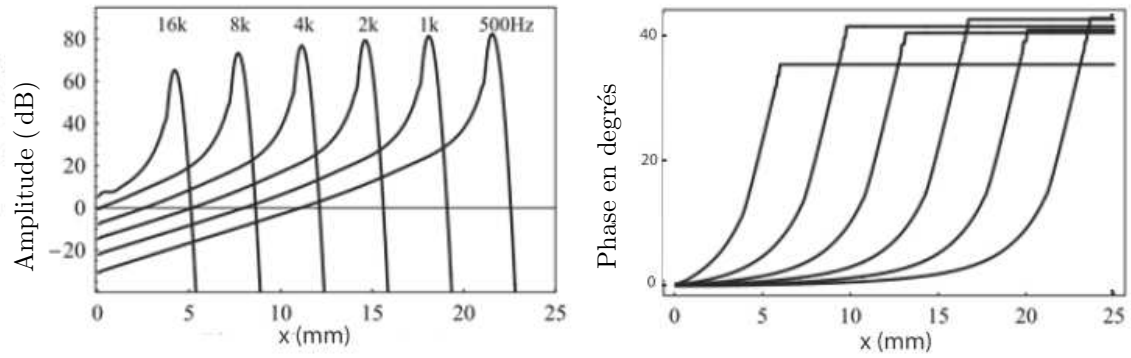

FIGURE 5 – Amplitude et retard de phase du déplacement vertical $h(x,t)$ de la membrane basilaire lorsqu'on excite celle-ci en $x = 0$. x représente l'abscisse curviligne le long de la membrane basilaire, c'est-à-dire la distance linéique par rapport à l'entrée du canal vestibulaire.

24. Commenter la mesure d'amplitude du déplacement et comparer au modèle simple de HELMHOLTZ.

25. Pourquoi ces mesures montrent qu'il y a eu propagation dans la cochlée ?

26. Quelle aurait été l'allure du retard de phase dans le cas d'une onde plane dans l'air ? Commenter.

Il a été démontré que l'équation différentielle qui régit le déplacement $h(x,t)$ prend la forme :

$$\frac{\partial^2(c^2\,h)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

27. Quelle est la dimension de c ?

La grandeur c n'est pas une constante et, en régime monochromatique, elle satisfait la relation suivante :

$$c^2 = d^2\left(\omega_b^2\,\exp -\frac{x}{L} - \omega^2\right)$$

où d, ω_b et L sont des constantes, et où $\omega_b > \omega$ dans la gamme spectrale de l'audition.

28. Écrire l'équation vérifiée par $\underline{a}(x,t) = c^2\underline{h}(x,t) = A_m(x)\exp -i\omega t$.

29. Quelles seraient les solutions si c était constante ?

Pour résoudre cette équation, on cherche une solution de la forme $A_m(x) = f(x)\exp i\omega g(x)$, où f et g sont des fonctions à valeurs réelles. On supposera de plus g croissante. On notera f' et f'' les dérivées première et seconde de f, et g' et g'' celles de g.

30. Calculer $\dfrac{\partial A_m}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 A_m}{\partial x^2}$.

31. En déduire le système de deux équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(x)$ qui résulte de l'équation d'onde.

Pour résoudre ce système, on fait apparaître l'approximation que l'amplitude de l'onde varie lentement devant sa phase. Mathématiquement, cela se traduit par $f'' \ll (\omega g')^2 f$.

32. Obtenir la fonction $g'(x)$.

33. Analyser $g'(x)$ et dire si cela correspond au résultat observé expérimentalement.

34. Obtenir la solution $f(x)$ à une constante multiplicative près.

35. En déduire la dépendance de $|\underline{h}(x)|$ avec c.

36. Tracer le comportement de $|\underline{h}(x)|$ en fonction de x.

37. Cela correspond-il au comportement observé expérimentalement ? Pourquoi ?

Problème n° 2 – Proxima du Centaure

Centrale MP 2020

Problème à remettre à votre camarade prévu dans DMscope pour une correction croisée, retour de la correction croisée le 06/10 au plus tard.

Ce problème est une invitation à regarder vers les étoiles, et tout particulièrement l'étoile la plus proche de la planète Terre après le Soleil : Proxima du Centaure aussi appelée *Proxima Centauri*. Il est constitué de 4 parties totalement indépendantes. La première partie étudie une caractéristique de l'atmosphère terrestre qui a permis le développement de la vie sur Terre et peut-être un jour sur une exoplanète. La deuxième partie est relative à l'observation de Proxima du Centaure et à la détermination de sa distance et de sa taille. La troisième partie s'intéresse à un vaisseau capable de rejoindre Proxima du Centaure et d'explorer une exoplanète dont la découverte fait l'objet de la dernière partie.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

A. Ozone et atmosphère

De l'importance de l'ozone

La figure 6 présente la répartition de l'ozone (O_3) dans l'atmosphère terrestre. Sa concentration varie avec l'altitude, le maximum se situe entre 30 et 35 km d'altitude avec une moyenne de 8 molécules d'ozone pour un million de molécules d'atmosphère.

La figure 7 montre le flux solaire ultra-violet reçu au sommet de l'atmosphère et le flux résiduel à la surface de la Terre. La différence est due à l'absorption du rayonnement ultra-violet par la couche d'ozone. Le graphique précise l'absorption moyenne pour chaque bande du rayonnement ultra-violet.

1. Justifier que les rayonnements présentés sur le graphique de la figure 7 correspondent à des rayonnements ultra-violet. Pourquoi les rayonnements ultra-violets sont-ils qualifiés de rayonnements ionisants ?

2. Expliquer l'importance de la couche d'ozone dans la protection de la vie terrestre.

Atome et molécule de l'oxygène

3. Donner la configuration électronique de l'oxygène dans son état fondamental.

4. Proposer une représentation de Lewis pour la molécule de dioxygène.

5. Proposer une représentation de Lewis de la molécule d'ozone sachant qu'elle n'est pas cyclique.

6. La molécule d'ozone a la structure spatiale présentée sur la figure 8. Justifier l'existence d'un moment dipolaire et le représenter sur un schéma de la molécule.

Cinétique de la formation de l'ozone

Le mécanisme de la production de l'ozone stratosphérique a été élucidé dès 1930 par le géophysicien britannique Sydney Chapman. Pour fabriquer cette molécule constituée de trois atomes d'oxygène, il faut des atomes

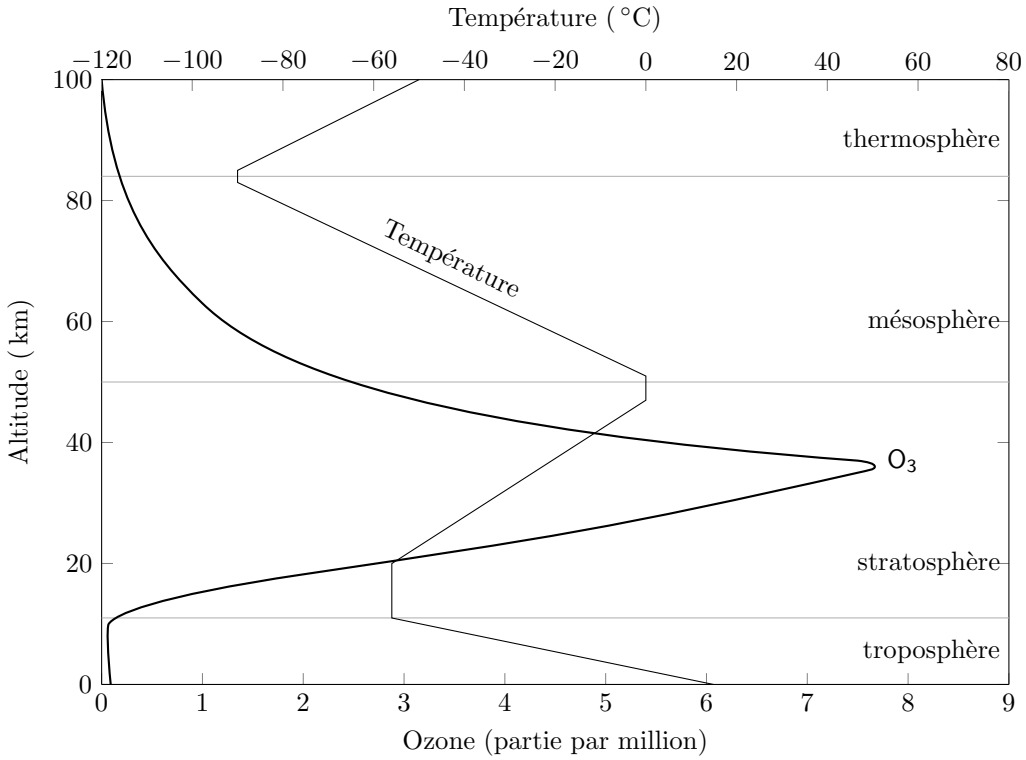

FIGURE 6 – Répartition de l'ozone et température aux latitudes moyennes dans l'atmosphère terrestre

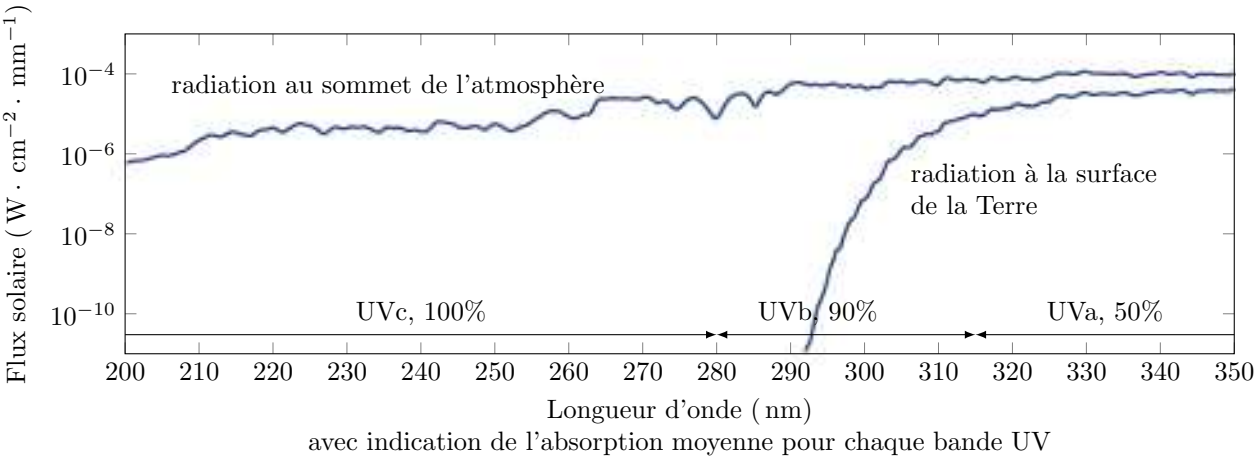

FIGURE 7 – Absorption du rayonnement solaire par la couche d'ozone – d'après NASA Ozone Watch

d'oxygène libres. Aux longueurs d'onde inférieures à 240 nm, le rayonnement ultra-violet peut dissocier les molécules de dioxygène O_2 suivant la réaction :

$$O_2 = O^\bullet + O^\bullet$$

Cette première partie du mécanisme est rapide sous l'effet du rayonnement ultra-violet et conduit à un équilibre de constante K_R°.
La seconde partie du mécanisme est une réaction simple qui obéit à la loi de VAN'T HOFF en cinétique : les ordres partiels dans l'expression de la vitesse de réaction sont les coefficients stœchiométriques de la réaction. On note k la constante cinétique de cette réaction :

$$O_2 + O^\bullet \xrightarrow{k} O_3$$

7. Expliquer qualitativement que la concentration en ozone dans l'atmosphère présente un maximum à une altitude particulière, comme le montre la figure 6.

8. Exprimer la pression partielle en radical $O^\bullet$ en fonction de la pression partielle en dioxygène et de la

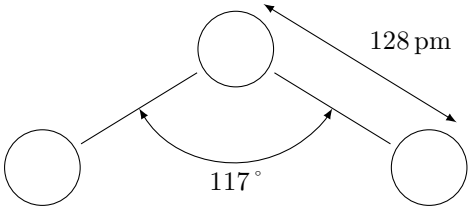

FIGURE 8 – Schématisation d'une molécule d'ozone où chaque sphère représente un atome d'oxygène

constante K_R°.

9. Quel est l'ordre de la vitesse de formation de O_3 par rapport à la pression partielle en dioxygène ?

B. Découverte de Proxima du Centaure

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique ROBERT INNES, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse $M_E = 2,44 \times 10^{29}\,\text{kg}$ et de rayon $R_E = 9,81 \times 10^4\,\text{km}$. Elle est située à $D_E = 3,99 \times 10^{13}\,\text{km}$ soit 4,22 années-lumière du Soleil. Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible $\lambda_{\text{obs}} = 600\,\text{nm}$.

10. Justifier, par un argument d'ordre de grandeur, que la distance entre la Terre et Proxima du Centaure peut être approximée à 4,22 années-lumière.

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- une lentille convergente L_1 objectif, de centre optique O_1, de foyer principal objet F_1, de foyer principal image F_1' et de distance focale image $f_1' = 8\,\text{m}$;
- une lentille divergente L_2 de projection, de centre optique O_2, de foyer principal objet F_2, de foyer principal image F_2' et de distance focale image $f_2' = -0,02\,\text{m}$.

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

11. Où est située l'image de l'étoile par la lentille L_1, appelée image intermédiaire A_1B_1 ? Illustrer cette situation par un schéma.

12. Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire A_1B_1 (non algébrique) en fonction du rayon R_E de l'étoile et des caractéristiques de la lentille objectif L_1.

13. La lentille de projection L_2, divergente, sert à faire de l'image intermédiaire A_1B_1 une image définitive $A'B'$, réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4. Calculer la distance O_1O_2 pour respecter ces contraintes.

14. Illustrer par un schéma la position de A_1B_1, de $A'B'$ et de L_2 (sans représenter L_1).

15. En 1915, l'image définitive $A'B'$ de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension $24\,\text{mm} \times 36\,\text{mm}$, composée de cristaux de $10\,\mu\text{m}$ de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?

16. À l'occasion du centenaire de la découverte de Proxima du Centaure, en 2015, la photo de l'étoile a été reprise avec l'instrument d'optique de l'époque mais la plaque photographique a été remplacée par un capteur CCD (Charge Coupled Device) de 100 millions de pixels, de taille identique à la plaque photo originelle. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur le capteur photosensible ?

L'efficacité quantique QE d'un capteur CCD donne le taux de transformation de la lumière en charge, soit la probabilité qu'un photon incident donne *naissance* à un électron dans le capteur. Pour la longueur d'onde étudiée, cette sensibilité quantique QE est de 30%.

17. Sachant que la puissance surfacique reçue sur Terre par le Soleil dans le visible est de $600\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ et que la lentille d'entrée de l'instrument est de diamètre $D_1 = 50\,\text{cm}$, de combien d'électrons sera composé le signal résultant de l'étoile pour une exposition de 12 minutes du capteur ? Quelle est la charge produite par le capteur ?

18. La diffraction par la lentille d'entrée L_1 est-elle gênante pour les observations ?

Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

La parallaxe est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit. La parallaxe annuelle est, par définition, l'angle qui mesure le déplacement, au cours de l'année, de la position apparente, perçue depuis la Terre, d'une étoile proche par rapport aux étoiles lointaines, voir la figure 9.

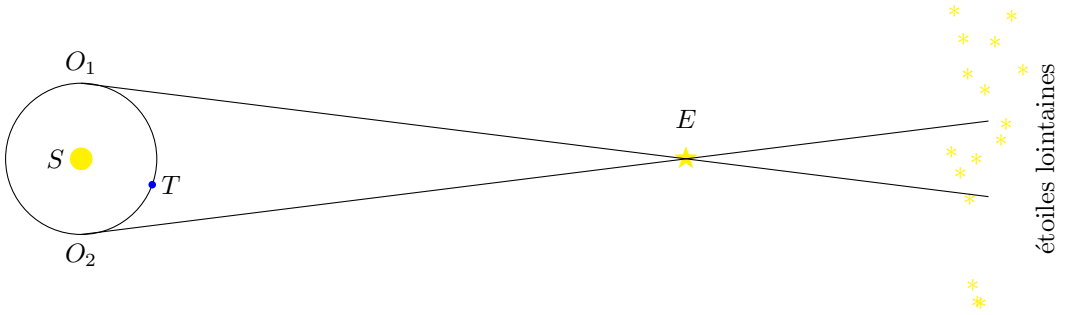

FIGURE 9 – Schéma explicatif de la mesure de parallaxe solaire

Sur la figure 9, deux instants d'observation sont représentés par O_1 et O_2. Le satellite Hipparcos (High Precision Parallaxe Collection Satellite) a mesuré la parallaxe de $P_E = 1\,545$ millisecondes d'arc pour *Proxima Centauri*.

19. Calculer, à partir de cette valeur de la parallaxe P_E, la distance séparant l'étoile *Proxima Centauri* du système solaire et comparer à la valeur donnée au début de cette partie.

20. Pourquoi la distance entre la Terre et le Soleil varie-t-elle au cours de l'année ?

Mesure du rayon de l'étoile

En 2002, le VLT (Very Large Telescope) utilisa l'interférométrie pour mesurer le diamètre angulaire de *Proxima Centauri* : $\alpha \simeq 1,02 \pm 0,08$ milliseconde d'arc. Connaissant sa distance, obtenue par la méthode de la parallaxe, il est alors possible de déterminer son rayon.

L'étoile est d'abord supposée ponctuelle et l'instrument d'optique est pointée sur elle. L'étoile se situe à l'infini sur l'axe optique de l'instrument, elle est repérée par son centre S. Le dispositif d'interférométrie est modélisé par deux trous d'YOUNG de taille identique, respectivement en T_1 et T_2, séparés d'une distance a réglable. Ce dispositif est placé devant la lentille convergente L_1 de l'instrument d'optique. Pour simplifier, on ne tiendra pas compte dans cette partie de la seconde lentille L_2 et les observations sont donc effectuées dans le plan de l'image intermédiaire. Un point M dans ce plan est repéré par son abscisse x, voir la figure 10.

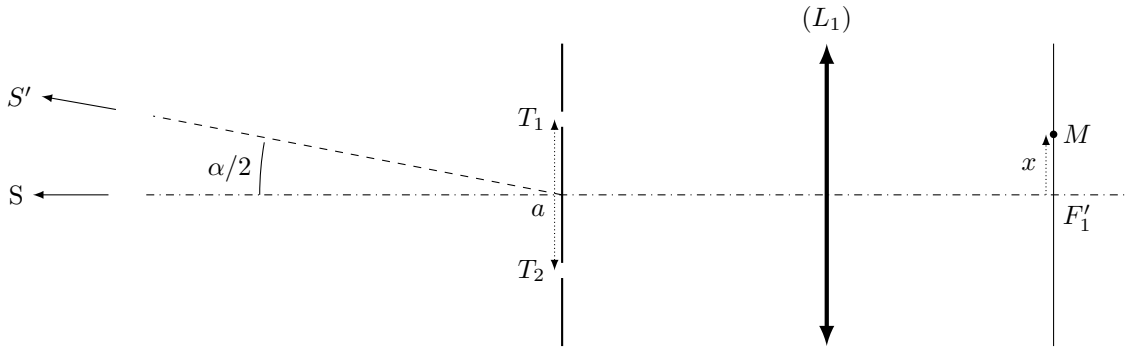

FIGURE 10 – Schéma du dispositif d'interférométrie pour la mesure du rayon de l'étoile *Proxima Centauri*

21. Faire un schéma des deux rayons lumineux passant par T_1 et T_2 qui convergent vers le point M. Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

22. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_S(M)$, produit par la source S au point M.

23. Décrire alors la figure d'interférences.

24. En notant I_0 l'intensité moyenne, donner, sans démonstration, l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ dans le plan d'observation.

L'étoile est à présent modélisée comme une source étendue vue sous un diamètre angulaire α. On considère un autre point source S' à la périphérie de l'étoile, figure 10.

25. Faire un schéma des deux rayons lumineux issus de S', passant par T_1 et T_2 et qui convergent vers le point M. Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

26. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_{S'}(M)$ produit par la source S' au point M.

27. En déduire l'expression de la plus petite valeur de a qui conduit au brouillage de la figure d'interférence produite par les deux sources incohérentes S et S'.

28. Faire l'application numérique et commenter.

29. Expliquer qualitativement pourquoi le raisonnement précédent, utilisant deux sources ponctuelles l'une située au centre et l'autre sur le bord apparent de l'étoile, rend compte des observations obtenues avec l'objet étendu qu'est la véritable étoile.

C. Une exoplanète : *Proxima Centauri b*

Le 24 août 2016, l'observatoire européen austral annonce en conférence de presse la découverte de *Proxima Centauri b*, une planète super Terre rocheuse de masse M_P d'environ 1,3 masse terrestre, en orbite à une distance de 7 millions de kilomètres de *Proxima Centauri* (soit dans la zone habitable). Cette exo-planète a été détectée, de manière indirecte, par la méthode des vitesses radiales.

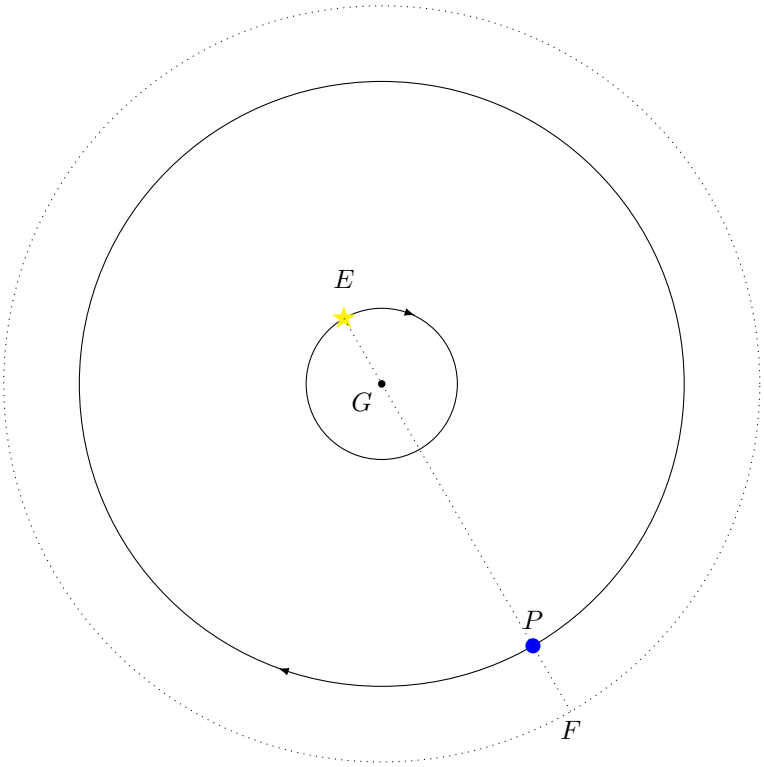

FIGURE 11 – Schéma représentant l'étoile E et la planète P en rotation autour du point G, centre de masse du système {étoile + planète} ; le point F est un point utilisé pour étudier le mouvement de E et P autour de G

Étude du mouvement du système {étoile + planète}

La détection de la planète repose sur le fait que le centre de masse G du système {étoile + planète} n'est pas confondu avec le centre de l'étoile. L'étoile E et la planète P tournent toutes les deux autour du centre de masse G du système complet, figure 11. Le centre de masse G est défini par l'une des deux relations :

$$\begin{cases} (M_E + M_P)\overrightarrow{AG} = M_E\,\overrightarrow{AE} + M_P\,\overrightarrow{AP} & \text{pour tout point } A \\ M_E\overrightarrow{GE} + M_P\,\overrightarrow{GP} = \vec{0} \end{cases}$$

Toutes les forces autres que la force d'interaction gravitationnelle entre la planète et l'étoile sont négligées. On suppose que le référentiel d'étude, de centre G dont les 3 axes pointent vers trois étoiles lointaines est galiléen.

30. Établir la relation $\overrightarrow{GP} = \dfrac{M_E}{M_E + M_P}\overrightarrow{EP}$. Contrôler la pertinence de cette expression en étudiant des cas limites.
On note pour la suite $\vec{r} = \overrightarrow{EP}$ et $\| \vec{r} \| = r$.

31. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la planète P dans le référentiel d'étude, établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}$.

On considère le point F défini par $\vec{r} = \overrightarrow{GF}$. Ce point est en mouvement circulaire, de période T, autour de G.

32. Établir la relation :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(M_E + M_P)}{4\pi^2}$$

Quel nom porte cette loi ?

33. Justifier que E a un mouvement circulaire uniforme autour de G et établir l'expression de sa vitesse de révolution en fonction de M_P, M_E, r et T.

Résultats ayant conduit à la découverte de la planète *Proxima Centauri b*

Dans le cas le plus favorable à l'observation, la Terre est dans le plan des trajectoires de E et P, voir la figure 11, l'étoile E possède alors un mouvement apparent oscillant et la mesure de sa composante V de vitesse selon l'axe de visée depuis la Terre est possible par effet Doppler-Fizeau, qui entraîne un décalage des raies spectrales de l'étoile par rapport à leur position mesurée sur Terre, selon la relation :

$$\frac{f_{obs} - f_{em}}{f_{em}} = \frac{V}{c}$$

où f_{em} et f_{obs} représentent respectivement la fréquence à l'émission et la fréquence observée sur Terre. Le professeur Bouchy de l'observatoire astronomique de Provence propose, en 2005, dans son intervention sur les exoplanètes la formule suivante pour le décalage Doppler lors de la détection indirecte d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales :

$$\frac{f_{obs} - f_{em}}{f_{em}} = -\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} \frac{M_P \sin i}{(M_P + M_E)^{2/3}} \frac{1}{c\sqrt{1-e^2}}$$

où M_P et M_E sont respectivement les masses de la planète et de l'étoile, T la période de la planète, e l'excentricité de l'orbite et i l'angle entre la ligne de visée et la perpendiculaire au plan orbital du système. L'excentricité e vérifie $0 \leq e < 1$, avec $e = 0$ pour une orbite circulaire.

34. En utilisant les résultats précédents, établir une formule analogue à la formule proposée par le professeur Bouchy. Commenter les différences.

35. Connaissant la masse de *Proxima centauri*, $M_E = 2,44 \times 10^{29}$ kg déterminée grâce à l'analyse de son rayonnement, exploiter les données expérimentales de la figure 12 pour déterminer la masse de la planète *Proxima Centauri b*.

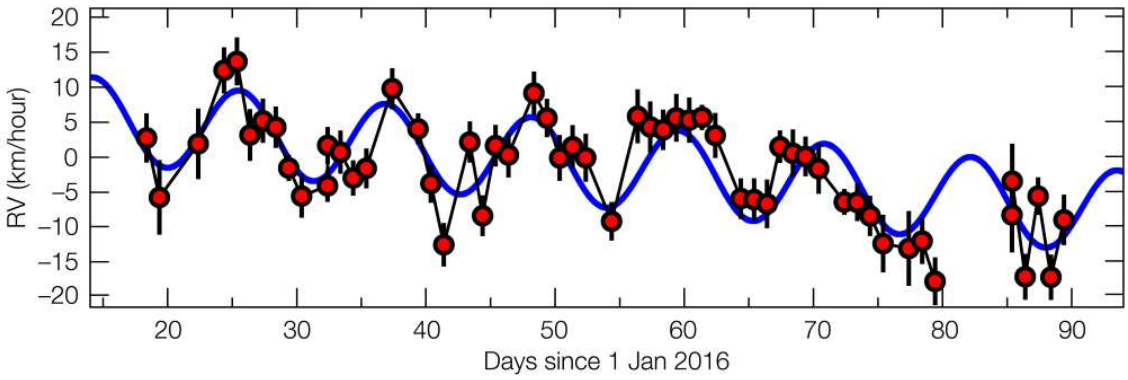

Figure 12 – Variations de la vitesse radiale de l'étoile *Proxima Centauri* au cours du premier trimestre 2016 — Source : European Southern Observatory, Guillem Anglada-Escudé

Données :

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Constante universelle de la gravitation	$\mathcal{G} = 6,674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,38 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
Distance Terre-Soleil	$D_{TS} = 1,50 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Rayon du Soleil	$R_S = 6,96 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
Masse du Soleil	$M_S = 1,99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Masse volumique de l'eau pure à 10 °C	$\rho = 1,00 \times 10^{3}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Énergie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental	$-13,6\,\mathrm{eV}$
Numéro atomique de l'oxygène	8
Masse molaire atomique de l'oxygène	$16,0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
Enthalpie molaire standard de formation de $\mathsf{O_3}$	$149,1\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ (à 298 K)
Entropie molaire standard de $\mathsf{O_2}$	$205\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ (à 298 K)
Entropie molaire standard de $\mathsf{O_3}$	$239\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ (à 298 K)