

Devoir de Sciences Physiques n°2 du 30-09-2024

— Solutions —

Problème n° 1 – Détermination de la constante de Boltzmann par spectroscopie acoustique dans un résonateur sphérique Adapté ENS Ulm PSI 2021

A. Introduction

1. La loi des gaz parfaits est classiquement $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$, cela permet de faire apparaître la masse volumique $\rho_0 = \frac{m}{V}$ d'où la relation $P_0 = \frac{\rho_0 RT_0}{M} = \frac{\rho_0 k_B N_A T_0}{M}$. Le coefficient de compressibilité isentropique est $\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S$. En utilisant $\rho = \frac{m}{V}$ pour une masse fixée, on a $\left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = -\frac{m}{\rho^2} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S$, cela donne bien $\chi_S = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S$. En utilisant la loi des gaz parfaits rappelée juste avant, on obtient facilement par le calcul $\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}$.

B. Équation acoustique

2. On revient à la définition du coefficient de compressibilité isentropique avec le volume V . On considère le volume initial $\mathcal{S}dx \equiv V$ car on évalue la variation de volume pour une section \mathcal{S} de la tranche de fluide. On en déduit que $\partial V = (dx + u(x+dx, t) - u(x, t))\mathcal{S} - dx\mathcal{S} = (u(x+dx, t) - u(x, t))\mathcal{S} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathcal{S} dx$. De la même façon, on a $\partial p = P(x, t) - P_0 = p(x, t)$. Cela nous permet d'écrire la relation : $\chi_S = -\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial x}$.

3. On applique la relation fondamentale de la Dynamique au morceau de fluide compris, initialement, entre x et $x+dx$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On néglige le poids, on ne prend en compte que les forces de pression exercée à chaque extrémité. La masse du système est $\rho_0 \mathcal{S} dx$, les forces pressantes sont le produit de la section par la pression agissant de chaque côté. On obtient alors $\mathcal{S} dx \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{S}(p(x, t) - p(x+dx, t))$. On obtient donc bien que $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ puisque $p(x, t) - p(x+dx, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} dx$.

4. On a $p = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial u}{\partial x}$. Cela permet d'avoir immédiatement $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. On en déduit l'équation de D'ALEMBERT qui traduit la propagation des ondes acoustiques : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

5. La forme générale d'une équation de D'ALEMBERT est $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. On peut voir que c est une vitesse, la célérité de l'onde, par analyse dimensionnelle au niveau des dénominateurs de l'équation. On en déduit que, pour les ondes sonores, on a : $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$.

6. L'évolution de la tranche d'air étudiée est adiabatique et réversible. La loi de LAPLACE s'écrit alors $pV^\gamma = \text{Cte}$. On peut aussi l'écrire en masse volumique $p\rho^{-\gamma} = \text{Cte}$. En différentiant, on retrouve le résultat établi à la première question : $\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0} = \frac{M}{\gamma \rho_0 RT_0}$. On en déduit que l'expression de la célérité est $c = \sqrt{\frac{RT_0 \gamma}{M}}$ où M est la masse molaire. En divisant par la constante d'AVOGADRO, on profite du fait que $R = \mathcal{N}_A k_B$ et $M = \mathcal{N}_A m$. On arrive à : $c = \sqrt{\frac{k_B T_0 \gamma}{m}}$. L'application numérique donne $c \simeq 320 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

7. On utilise un gaz mono-atomique tel que l'argon - monoatomique - parce que l'on évite les vibrations internes aux molécules. On a aussi un gaz inerte qui ne réagit pas avec les parois de la cavité.

C. Mode stationnaire d'une cavité

Cavité linéaire

8. La paroi étant immobile, la couche d'air au contact de cette paroi ne peut pas posséder de vitesse. On a donc $v(x=0, t) = 0$ et $v(x=L, t) = 0 \forall t$. On recherche des solutions stationnaires donc à variables séparées : $v(x, t) = f(x)g(t)$. On teste cette forme de solution dans l'équation de D'ALEMBERT pour arriver à $\frac{d^2 f}{dx^2} g(t) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 g}{dt^2} f(x)$. On sépare les variables $\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g}{dt^2}$. Comme l'équation doit être vraie $\forall t, \forall x$, chaque membre égal à la même constante. On écrit $\frac{d^2 f}{dx^2} - K f(x) = 0$ d'où un discussion sur le signe de K . Comme $f(x=0) = f(x=L) = 0$, la solution doit s'annuler au moins deux fois. Avec $K > 0$ et donc des exponentielles réelles comme solution, cela ne sera pas possible. Si $K = 0$, on a une fonction affine qui ne pourra s'annuler qu'une fois. Il ne reste plus qu'à dire que $K < 0$ et que les solutions sont de la forme $f(x) = A \cos \sqrt{-K}x + B \sin \sqrt{-K}x$. Avec les conditions aux limites, il est évident que $A = 0$ et, ensuite, on a $B \sin \sqrt{-K}L = 0$ qui signifie que $\sqrt{-K}L = n\pi$. La forme de la solution pour la fonction spatiale est $f(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$. L'équation temporelle

est $\frac{d^2g}{dt^2} + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}g(t) = 0$. D'où la solution $v(x, t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi)$. Les pulsations mises en évidence - les pulsations des modes propres - sont donc : $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$.

9. On a $\omega_1 = \frac{\pi c}{L} = 1,0 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La fréquence de résonance du fondamental est : $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1\,600 \text{ Hz}$.

Cavité sphérique

10. La surpression acoustique $p(r, t)$ vérifie l'équation de D'ALEMBERT à 3D : $\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. Comme la pression est isotrope - elle ne dépend ni de θ , ni de φ - le laplacien exprimé en coordonnées sphériques se simplifie beaucoup et on arrive à : $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$.

11. L'équation de propagation évolue selon $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} p$ puisque l'évolution temporelle est harmonique. On effectue un changement de variable en posant $X = rp$. Cela permet d'écrire ensuite $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial X}{\partial r} r - X \right)$. Ainsi $r^2 \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} r - X$. On peut donc calculer $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} r + \frac{\partial X}{\partial r} - \frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} r$. L'équation de D'ALEMBERT devient $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} p = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{X}{r}$. On obtient pour X une équation différentielle de type oscillateur harmonique $\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0$. On a donc $X = A(t) \exp i \frac{\omega}{c} r + B(t) \exp -i \frac{\omega}{c} r$. Comme la solution temporelle est de la forme harmonique, on peut écrire que $A(t) = A_0 \exp -i\omega t$ et $B(t) = B_0 \exp -i\omega t$. La forme finale de la solution est une combinaison linéaire des deux formes suivantes : $p_+ = a_+ \frac{\exp i(kr - \omega t)}{r}$ et $p_- = a_- \frac{\exp i(-kr - \omega t)}{r}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

12. p_+ représente une onde sphérique qui diverge à partir de $r = 0$ alors que p_- est une onde qui converge vers l'origine.

13. D'après la relation de la Dynamique, on peut écrire $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho_0 i\omega \vec{v} = -\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r$. On distingue les deux cas. Pour l'onde qui se propage à partir de l'origine à r croissant, on a $\frac{\partial p_+}{\partial r} = \frac{a_+}{r^2} (ik \exp i(kr - \omega t)r - \exp i(kr - \omega t)) = \frac{a_+}{r^2} (ikr - 1) \exp i(kr - \omega t)$. On peut donc exprimer la vitesse : $\vec{v}_+ = \vec{e}_r \frac{a_+}{\rho_0 r^2} \left(\frac{r}{c} + \frac{i}{\omega} \right) \exp i(kr - \omega t)$. Pour trouver l'autre expression de la vitesse, il suffit de changer $k = \frac{\omega}{c}$ en $-\frac{\omega}{c}$. $\vec{v}_- = -\vec{e}_r \frac{a_-}{\rho_0 r^2} \left(\frac{r}{c} - \frac{i}{\omega} \right) \exp -i(kr + \omega t)$.

14. Il faut commencer par exprimer la vitesse totale qui résulte de chacune des deux ondes. On a $\vec{v}_+ = \vec{e}_r \frac{p_+}{\rho_0} \left(\frac{1}{c} + \frac{i}{r\omega} \right)$ et $\vec{v}_- = -\vec{e}_r \frac{p_-}{\rho_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{i}{r\omega} \right)$. Le vecteur vitesse est alors $\vec{v} = \frac{\vec{e}_r}{\rho_0} [p_+ \left(\frac{1}{c} + \frac{i}{r\omega} \right) - p_- \left(\frac{1}{c} - \frac{i}{r\omega} \right)]$. Comme $\vec{j} = p\vec{v} = pv\vec{e}_r$ et que le vecteur surface est $d\vec{S} = dS\vec{e}_r$, le produit scalaire impose que $\phi = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j dS = j4\pi r^2$. Si l'on prend la moyenne temporelle de ce flux, on peut écrire que $\phi_{moy} = \langle j \rangle 4\pi r^2$. On a $\langle j \rangle = \frac{1}{2} \Re[(p_+ + p_-)v^*]$ où v^* est le complexe conjugué de la vitesse. On a $\langle j \rangle = \frac{1}{2} \Re[(p_+ + p_-)(p_+^* \left(\frac{1}{c} - \frac{i}{r\omega} \right) - p_-^* \left(\frac{1}{c} + \frac{i}{r\omega} \right))]$. La valeur moyenne de l'intensité acoustique est $\langle j \rangle = \frac{1}{2} \Re[p_+ p_+^* \left(\frac{1}{c} - \frac{i}{r\omega} \right) + p_- p_-^* \left(\frac{1}{c} - \frac{i}{r\omega} \right) - p_+ p_-^* \left(\frac{1}{c} + \frac{i}{r\omega} \right) - p_- p_+^* \left(\frac{1}{c} + \frac{i}{r\omega} \right)]$. On ne retient que les parties réelles de $\langle j \rangle$. Il y en a qui sont évidentes mais il faut bien comprendre que le terme $p_- p_+^* \left(\frac{1}{c} - \frac{i}{r\omega} \right) - p_+ p_-^* \left(\frac{1}{c} + \frac{i}{r\omega} \right)$ est purement imaginaire car différence de deux complexes conjugués. Après simplification, on a $\phi_{moy} = \frac{2\pi r^2}{\rho_0} \left[\frac{|a_+|^2}{c^2} - \frac{|a_-|^2}{c^2} \right]$. On peut donc conclure que $\phi_{moy} = \frac{2\pi}{\rho_0 c} [|a_+|^2 - |a_-|^2]$. Ce flux doit être nul en moyenne car les parois étant parfaitement réfléchissantes, il ne peut y avoir une onde divergente plus forte que l'onde convergente. L'énergie totale dans la cavité doit être constante. Il ne peut pas y avoir dans une sphère plus d'énergie qui sort que d'énergie qui entre. On a $\phi_{moy} = 0$ lorsque $|a_+| = |a_-|$.

15. Le terme dominant de la vitesse en $r \rightarrow 0$ est le terme en $\frac{1}{r^2}$. Dans l'expression de la vitesse, il correspond au facteur $T(r) = \frac{i}{r^2 \omega} [a_+ \exp ikr + a_- \exp -ikr]$. Comme les exponentielles tendent vers 1 lorsque r tend vers 0, on peut voir que $T(r)$ tend vers $\frac{i}{r^2 \omega} (a_+ + a_-) = 0$ pour éviter une divergence de l'onde et une singularité mathématique? on en conclut que $a_+ = -a_-$.

16. La condition aux limites sur la paroi est le fait que la vitesse de déplacement de la couche d'air doit être nulle. On a $v(R_c) = 0$. Cela doit être valable quel que soit t , c'est la fonction d'espace de la vitesse qui doit s'annuler. Comme la vitesse en $r = R_c$ est $\vec{v}(r = R_c) = \vec{e}_r \exp -i\omega t \frac{a_+}{R_c} \left[\left(\frac{1}{c} + \frac{i}{R_c \omega} \right) \exp ikR_c + \left(\frac{1}{c} - \frac{i}{R_c \omega} \right) \exp -ikR_c \right]$. En factorisant c et en utilisant $k = \frac{\omega}{c}$, on arrive à l'égalité $\vec{v}(r = R_c) = \vec{e}_r \exp -i\omega t \frac{a_+}{\rho_0 R_c c} [(1 + \frac{i}{kR_c}) \exp ikR_c + (1 - \frac{i}{kR_c}) \exp -ikR_c] = \vec{0}$. En continuant à développer les calculs, on arrive à $\vec{v}(r = R_c) = \vec{e}_r \exp -i\omega t \frac{a_+}{\rho_0 R_c c} [2 \cos kR_c + \frac{i}{kR_c} (\exp ikR_c - \exp -ikR_c)]$ d'où finalement l'expression de la vitesse $\vec{v}(r = R_c) = \vec{e}_r \exp -i\omega t \frac{2a_+}{\rho_0 R_c c} [\cos kR_c - \frac{\sin kR_c}{kR_c}] = \vec{0}$. On obtient donc la condition $\tan kR_c = kR_c$.

17. Le graphique $f(x) = \tan x$ est représenté à la figure 1 ainsi que le graphique de $g(x) = x$. On peut voir que l'intersection des deux courbes génère un nombre infini mais discret de solutions. On constate qu'il y a une solution pour $kR_c \in [n\pi; (n + \frac{1}{2})\pi] \forall n \in \mathbb{N}^*$. On comprend facilement que la solution sera d'autant plus proche

de $(n + \frac{1}{2})\pi$ que n sera grand. Sur le graphique, on voit la première solution qui définit le mode fondamental de la cavité sonore sphérique.

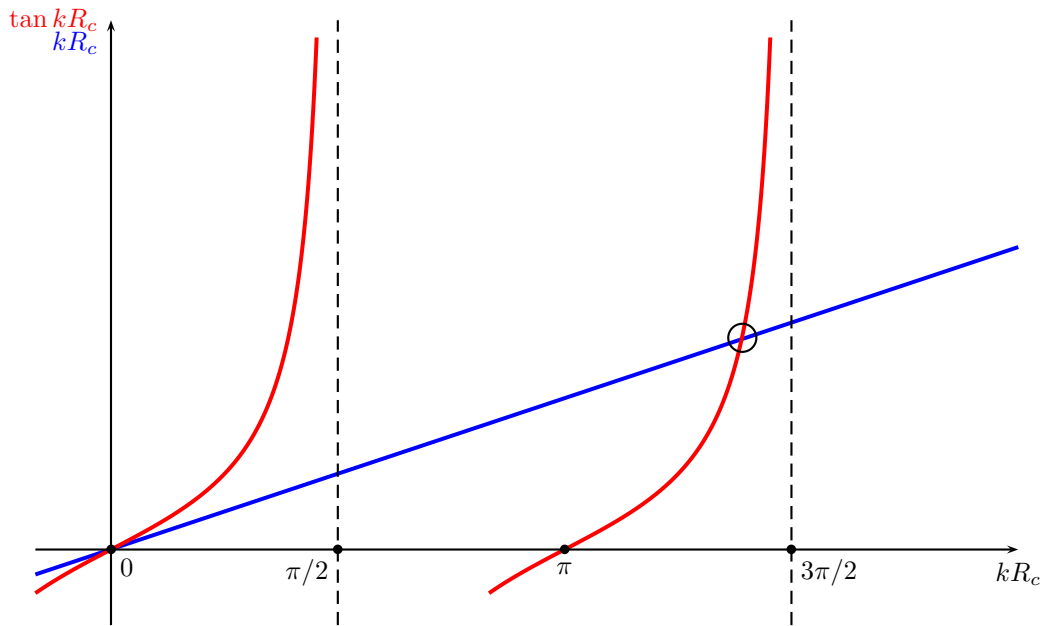


FIGURE 1 – Détermination graphique des modes propres de la cavité sphérique

18. On pose $x = kR_c$. On doit résoudre $\tan x = x$ de façon approchée pour n très élevé. Toutes les solutions se situent juste avant les multiples impairs de $\pi/2$. On posera $x = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll \pi$. On doit donc résoudre $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Compte tenu de la périodicité de π de la fonction tangente, cela revient à écrire que $\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon \simeq n\pi$ puisque l'on raisonne pour $n \rightarrow \infty$. En utilisant la propriété $\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = \frac{1}{\tan \varepsilon} \simeq \frac{1}{\varepsilon}$. On peut donc estimer que $\varepsilon \simeq \frac{1}{n\pi}$. On a donc $x = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi}$. Ainsi la solution peut être écrite sous la forme $x_n \simeq C_1 n + C_0 + C_{-1} \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ à condition de poser $C_1 = \pi, C_0 = \frac{\pi}{2}$ et $C_{-1} = -\frac{1}{\pi}$.

19. On commence par considérer un intervalle $[n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule pour une valeur prise au départ au milieu de l'intervalle la fonction $f(x) = \tan x - x$. Si le résultat est négatif, cela veut dire qu'il faut chercher la solution à droite du milieu de l'intervalle. On calcule la valeur pour de $f(x)$ pour le milieu de ce nouvel intervalle. Si c'est toujours négatif alors un refait le même processus qu'avant. Si lors d'un calcul de $f(x)$, on trouve un résultat positif, c'est que l'on dépassé la solution. On considère l'intervalle moitié à gauche et on prend son milieu... On va arriver ainsi par **dichotomie** à cerner la solution numérique de plus en plus précisément. On s'arrête au niveau de précision voulu.

20. On dérive deux fois par rapport à x l'équation d'état fournie et on utilise la permutation possible des dérivées temporelle et spatiale. Cela donne : $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = c^2(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}))$. D'après la relation de la Dynamique, dans le cadre de l'approximation acoustique, on obtient $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$. La conservation de la masse conduit à $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. On dérive la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à t pour écrire que $\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ et $\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$. Cela nous conduit à l'égalité $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$. Cette égalité permet d'obtenir l'équation voulue à 1D : $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. Pour obtenir l'équation à 3D, il ne reste plus qu'à remplacer $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ par le laplacien $\Delta \rho$. On arrive bien à : $\Delta \rho + \tau_r \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$.

21. On pose $\rho = \rho_0 + \underline{r}$. On teste la forme de solution proposée. On a $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -k^2 \underline{r}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{r}$ et $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}) = i\omega k^2 \underline{r}$. En remplaçant dans l'équation de propagation, on arrive à la relation $-k^2 + i\omega \tau_r k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$. On peut isoler k^2 dans un premier temps : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{1 - i\omega \tau_r}$. Comme $\omega \tau_r \ll 1$, on peut effectuer un développement limité et écrire que $k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} (1 + i\omega \tau_r)$. On prend la racine (puissance 1/2) toujours en pratiquant un développement limité pour aboutir à $k = \pm \frac{\omega}{c} (1 + i\frac{\omega \tau_r}{2})$. Cela correspond bien à la relation attendue.

22. En remplaçant k par l'expression déterminée avant, on écrit $\rho(x, t) = \rho_0 + \underline{R}_0 \exp(i((\frac{\omega}{c} t + i\frac{\omega^2 \tau_r}{2c})x - \omega t))$. En développant et en considérant R_0 comme une amplitude réelle, on obtient $\rho(x, t) = \rho_0 + R_0 \exp(-\frac{\omega^2 \tau_r}{2c} x) \cos(\frac{\omega}{c} x - \omega t)$. Dans cette formule, on voit apparaître deux échelles de longueur qui sont $\frac{c}{\omega}$ pour la périodicité spatiale liée à la propagation - qu'il serait plus juste de définir comme $2\pi \frac{c}{\omega}$ même si cela ne change pas grand chose à

l'ordre de grandeur - et $\frac{2c}{\omega^2 \tau_r}$ qui correspond à la longueur caractéristique liée à l'amortissement. N'oublions pas que cet amortissement est ce que l'on voulait mettre en place en modifiant l'équation d'état du fluide pour prendre en compte des phénomènes dissipatifs. À la date $t = 0$, on a $\rho(x, 0) = \rho_0 + R_0 \exp -\frac{\omega^2 \tau_r}{2c} x \cos \frac{\omega}{c} x$. Le graphe de $\rho(x, 0)$ est représenté à la figure 2 sans tenir compte du fait que $R_0 \ll \rho_0$ pour que le graphique soit lisible.

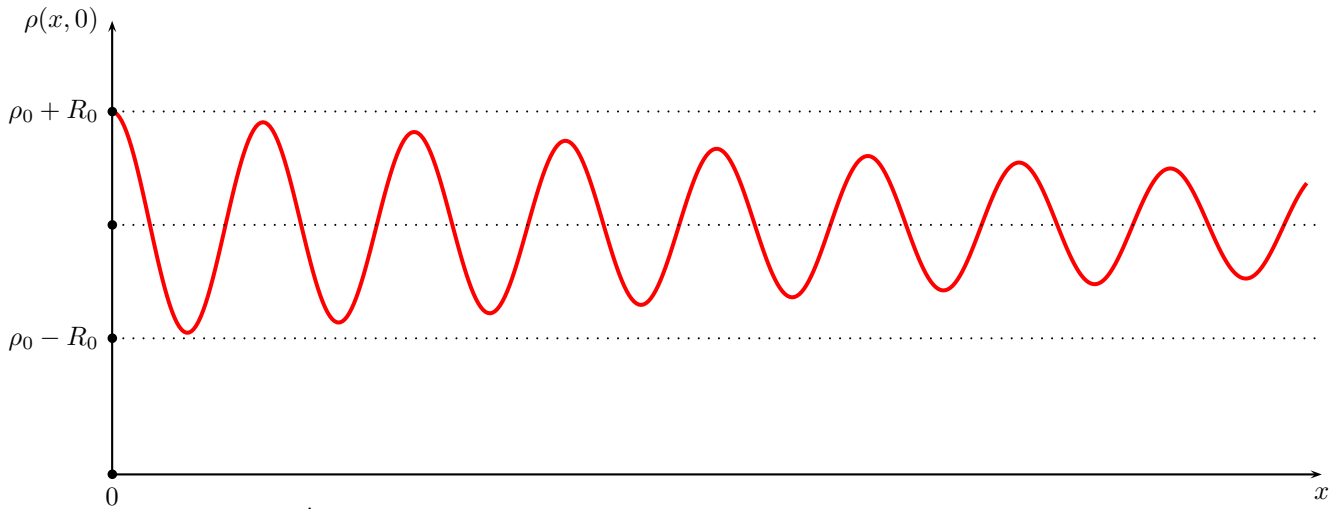


FIGURE 2 – Évolution de l'amplitude de l'onde en prenant en compte des phénomènes dissipatifs

23. On reprend la relation de la Dynamique, il vient $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$. Cela conduit à $-\rho_0(i\omega)\underline{v} = -(ik)p$ d'où $\underline{Z} = \frac{p}{v} = \rho_0 \frac{\omega}{k}$. Avec l'expression de k issue de la relation de dispersion, on trouve $\underline{Z} = \rho_0 c \frac{1}{1+i\frac{\omega\tau_r}{2}}$ sur laquelle, il faut effectuer un développement limité toujours dans le cadre de $\omega\tau_r \ll 1$. On a donc $\underline{Z} = \rho_0 c (1 - i\frac{\omega\tau_r}{2})$. On voit très clairement qu'en l'absence de phénomène dissipatifs $\tau_r = 0$, alors on retrouve l'expression traditionnelle de l'impédance acoustique $\underline{Z}_0 = \rho_0 c$.

24. Les évolutions de $\underline{v}(x, t)$ et $\underline{p}(x, t)$ pour une onde se propageant vers les $x > 0$ et pour \underline{R}_0 réel sont de forme identique à celle que nous avons fournie pour l'évolution de $\rho(x, t = 0)$. L'impédance est complexe, cela va traduire un **déphasage** entre la surpression acoustique et la vitesse de déplacement des couches d'air.

25. La condition de réflexion parfaite sur la paroi en $x = L$ est $\underline{v}(x = L, t) = 0 \forall t$. On utilise à nouveau $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=L} = -\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$. En utilisant l'expression de la pression, on obtient $a_+(ik) \exp i(kL - \omega t) + a_-(-ik) \exp -i(kL + \omega t) = 0$. On établit facilement la relation $a_- = a_+ \exp i2kL$.

26. On traduit les informations de l'énoncé pour écrire que $a_+ = p_0 + a_-$. Avec la relation établie à la question précédente, on arrive à $a_+ = \frac{p_0}{1 - \exp i2kL}$.

27. Il faut être attentif au fait que $k = \frac{\omega}{c} (1 + i\frac{\omega\tau_r}{2})$ est un complexe. On a alors $a_+ = \frac{p_0}{1 - \exp -\frac{\omega^2 \tau_r L}{c} \exp i(\frac{2\omega L}{c})}$. Le facteur $\alpha = \exp -\frac{\omega^2 \tau_r L}{c}$ doit être évalué. On peut encore écrire que $\alpha = \exp -\omega^2 \tau_r^2 \exp \frac{L}{c\tau_r}$. Or, les pulsations des modes propres sont voisines de $\omega = \frac{n\pi c}{L}$. On peut donc modifier l'écriture de α selon $\alpha = \exp -\omega^2 \tau_r^2 \exp \frac{L}{c\tau_r} = \exp -\omega\tau_r n\pi$. Comme seuls les premiers modes propres seront importants (n pas trop grand), on peut considérer que, puisque $\omega\tau_r \ll 1$, alors $\exp -\omega\tau_r n\pi \simeq 1$. Ainsi l'expression de l'amplitude peut être simplifiée et devient $a_+ = \frac{p_0}{1 - \exp i\frac{2\omega L}{c}} = \frac{p_0}{1 - \cos \frac{2\omega L}{c} + i \sin \frac{2\omega L}{c}}$. On peut passer au module carré pour écrire que $|a_+|^2 = \frac{p_0^2}{2(1 - \cos \frac{2\omega L}{c})}$. En utilisant la notion d'impédance acoustique et son expression à l'ordre le plus bas, on peut écrire que $p_0 = \rho_0 c v_0$. on peut donc écrire que $|a_+|^2 = \frac{\rho_0^2 c^2 v_0^2}{2} \frac{1}{1 - \cos \frac{2\omega L}{c}}$. Il y a une résonance à chaque fois que $\cos \frac{2\omega L}{c} = 1$ donc pour $\frac{2\omega L}{c} = n2\pi$. Les pulsations sont donc à nouveau : $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$.

Problème n° 2 – Caractérisation d'une lame de verre

CCP MP 2015

A. lame de verre

1. L'indice optique du verre est $n \simeq 1,5$.

2. Les relations de SNELL-DESCARTES relatives à la réfraction sont les suivantes : le rayon réfracté se situe dans le même plan formé par le rayon incident et la normale au dioptré. Le rayon réfracté se situe de l'autre côté de la normale. La loi quantitative bien connue associée reliant l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r est $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction du milieu d'incidence et du milieu de réfraction.

3. Même s'il est impropre de parler d'image sans être dans les conditions de GAUSS, la position de A' image de A par la lame est réalisée sur le schéma de la figure 4.

4. Le tracé de rayon avec un point objet A virtuel est réalisé toujours sur le schéma de la figure 4.

5. On se réfère à la figure 4 pour les notations. On note i l'angle d'incidence sur la lame de verre et r l'angle de réfraction dans la lame. L'angle de sortie du rayon lumineux - qui définit le point A' - est i puisque lors des deux réfractions la loi de DESCARTES est la même : $\sin i = n \sin r$. Dans les conditions de GAUSS, cette relation devient $i = nr$ puisque les sinus sont assimilables aux angles. On a donc $\tan i = \frac{H_2 H_3}{A' H_3}$. D'autre part, on a $\tan i = \frac{H_1 H_4}{A H_4}$. Dans la lame de verre, on peut écrire $\tan r = \frac{H_2 H_3}{e}$ et enfin $H_2 H_3 = H_1 H_4 + e \tan r$. On travaille aux petits angles, on peut donc écrire que $H_2 H_3 = H_1 H_4 + er = H_1 H_4 + e \frac{i}{n}$. On peut aussi écrire que $A' H_3 = \frac{H_2 H_3}{i}$ d'où $A' H_3 = \frac{H_1 H_4}{i} + \frac{e}{n}$. Or, $A H_4 = \frac{H_1 H_4}{i}$. Avec la relation $AA' = A H_4 + e - A' H_3$, on peut écrire que $AA' = \frac{H_1 H_4}{i} + e - \left(\frac{H_1 H_4}{i} + \frac{e}{n} \right)$. On obtient la relation proposée par l'énoncé à savoir : $AA' = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$. La valeur algébrique ne s'impose pas tant que l'on a $e > 0$ et $n > 1$ ce qui va de soi dans les cas classiques.

B. Viseur

6. Le réticule est placé dans le plan focal de l'oculaire. Ainsi son image est rejetée à l'infini et l'œil n'accommode pas pour le percevoir.

7. Par la formule du grandissement transversal, on a $\gamma_{ob} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{F_2 O_2}{F_2 A} = \frac{f_2'}{F_2 A} = -2$. Connaissant la distance focale de la lentille, on a $F_2 A = -25 \text{ mm}$.

8. L'encombrement $\overline{O_2 O_1}$ de la lunette est la conséquence du fait que l'image de l'objet observé doit se situer dans le même plan que le réticule à savoir le plan focal de l'oculaire. La relation de conjugaison permet d'écrire $\overline{F_2 A} \overline{F_2 A'} = -f_2'^2$. On en déduit que $\overline{F_2 A'} = 100 \text{ mm}$. L'encombrement de la lunette est donc donné par $\overline{O_2 O_1} = f_2' + \overline{F_2 A'} + f_1'$. On trouve : $\overline{O_2 O_1} = 200 \text{ mm}$.

9. Le tracé de rayons est réalisé à la figure 5.

10. Un tel viseur permet d'observer des images virtuelles.

C. Description du dispositif expérimental

Analyse du système additionnel

11. La tracé même symbolique du trajet de la lumière est difficile à réaliser sans plus de précision. Si l'on doit tracer l'évolution d'un rayon quelconque, cela n'est pas si évident d'enchaîner les systèmes optiques. On se contentera de tracer le rayon qui suit l'axe optique des lentilles comme on peut le voir sur le schéma de la figure 6.

12. Un système est afocal lorsque un faisceau de rayons lumineux parallèles arrivant de l'infini sur le système optique ressortent parallèles et donc vont à l'infini. Pour y parvenir, il faut que la distance entre les lentilles \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 qui sont toutes les deux des lentilles convergentes soit la somme des distances focales : $f_2' + f_3' = \overline{O_2 L_s} + \overline{L_s M_i} + \overline{M_i O_3}$. On en déduit que $\overline{M_i O_3} = 50 \text{ mm}$.

13. On utilise la relation de conjugaison de NEWTON pour les deux lentilles qui sont associées par le fait que $F_3 = F_2'$. On a donc $\overline{F_3 R} \overline{F_3 R_1} = -f_3'^2$ et $\overline{F_2 R'} \overline{F_2 R_1} = -f_2'^2$ avec $\overline{F_2 R_1} = \overline{F_3 R_1}$. En effectuant le rapport des deux relations de conjugaison, on arrive à : $\overline{F_2 R'} = \frac{f_2'^2}{f_3'} \overline{F_3 R}$.

14. Comme l'objet R est tel que $\overline{O_3 R} = 150 \text{ mm}$, on a $\overline{F_3 R} = 0$ d'où $\overline{F_2 R'} = 0$. L'image est située sur le foyer objet de la lentille \mathcal{L}_2 . On peut construire une figure optique permettant de calculer aisément le grandissement transversal en utilisant un rayon parallèle à l'axe optique. Voir le schéma de la figure 3. En travaillant dans les conditions de GAUSS, on peut écrire $\tan \alpha \simeq \alpha$ avec $\alpha = \frac{d_2}{f_2}$ et $\alpha = \frac{d_3}{f_3}$. Du fait du changement de signe, on peut

écrire que $\gamma_t = -\frac{d_3}{d_2} = -\frac{f_2'}{f_3} = -\frac{1}{3}$.

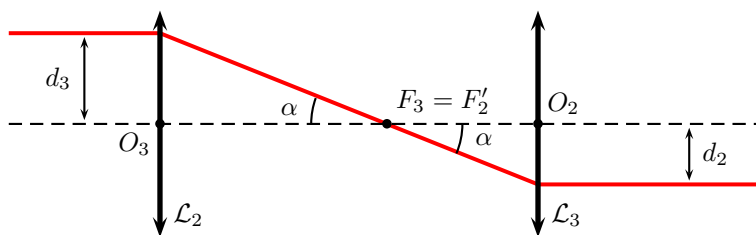


FIGURE 3 – Calcul du grandissement transversal

15. La situation proposée n'est pas très claire car le point A n'est pas défini en particulier. R' est l'image par le système optique de R avant le traitement par le miroir M_0 . R' va former une image R_0 par le miroir plan M_0 . D'après la question 7., on a vu que R_0 doit se trouver à 25 mm du foyer avec $\overline{F_2 R_0} = -25$ mm. Comme on a un miroir plan, cela veut dire que R' se situe symétriquement à R_0 par rapport au miroir M_0 . On va supposer que le point A correspond à R_0 . On a donc $\overline{F_2 R'} = 25$ mm. On peut donc utiliser la relation montrée précédemment pour trouver que $d_0 = \overline{F'_3 R} = \overline{F_2 R'} \left(\frac{f'_3}{f'_2}\right)^2$. Avec la relation $\overline{F_2 R'} = -\overline{F_2 A}$, on arrive finalement

$$\text{à : } \boxed{d_0 = -\overline{F_2 A} \left(\frac{f'_3}{f'_2}\right)^2}$$

16. On note R'_1 la nouvelle position de R' et R_{01} celle de R_0 . Pour voir l'image nette, il faut que $\overline{F_2 R_{10}} = \overline{F_2 A} = -25$ mm. Le déplacement de e par rapport au miroir, entraîne un effet de $2e$ comme on peut le voir par la relation de conjugaison du miroir plan : $\overline{F_2 R'_1} + e = \overline{R_{01} F_2} - e$. En utilisant les relations précédentes, on arrive à $d_1 = (-\overline{F_2 A} - 2e) \left(\frac{f'_3}{f'_2}\right)^2 = d_0 - 2e \left(\frac{f'_3}{f'_2}\right)^2$. On peut donc conclure que $\boxed{\varepsilon_1 = -2e \left(\frac{f'_3}{f'_2}\right)^2}$.

17. En déplaçant le miroir M_0 , on peut modifier la netteté du réticule R . On a vu avant que par le système optique proposé, il y avait un grandissement transversal de $-1/3$ mais comme l'objectif provoque un grandissement transversal de 2, on peut en conclure, qu'en valeur absolue, le grandissement transversal est $\boxed{2/3}$.

D. Application à la caractérisation d'une lame

18. Il suffit d'intercaler la lame de verre dans le schéma synoptique précédent entre la lentille \mathcal{L}_2 et le miroir M_0 puis une seconde fois - du fait du retour de la lumière par le miroir plan entre ce même miroir M_0 et la lentille \mathcal{L}_2 .

19. Nous avons vu qu'il y avait des conséquences de translation de l'image par une lame à faces parallèles puisque nous avons calculé le déplacement et que nous avons trouvé : $\boxed{e \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$.

20. Pour obtenir le nouveau déplacement du réticule R , il suffit de changer le rôle de e par $e \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. On trouve donc $\boxed{\varepsilon_2 = -2e \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{f'_3}{f'_2}\right)^2}$.

21. On a répondu à la question précédente.

22. On obtient l'expression $n = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_2 f'^2_2}{2e f'^2_3}}$. Compte tenu de la forme de cette expression et du fait que l'indice de réfraction est nécessairement supérieur à 1, on a nécessairement $\varepsilon_2 < 0$ et donc $\varepsilon_2 = -0,6$ mm. On trouve alors que $\boxed{n = 1,5}$ ce qui est rassurant pour une lame de verre traditionnelle.

E. Approche interférentielle

Théorie

23. Voir le schéma de la figure 7. Les situations correspondent à un contexte d'interféromètre de MICHELSON au moins pour la lame d'air.

24. Le plus simple est de raisonner avec l'image du point d'incidence sur la lame d'air par rapport à la seconde face de la lame de verre. On retrouve l'expression de la différence de marche dans le cas d'une lame d'air réalisée dans un interféromètre de MICHELSON. On a facilement $\boxed{\delta_{\text{géo}} = 2e \cos i}$.

25. Dans le cas d'une lame de verre, la différence de marche totale est : $\delta = 2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$. On peut retrouver le cas de la lame d'air à condition de faire $n = 1$ et en utilisant la propriété $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$. Le terme qui se rajoute en $\lambda/2$ vient du fait que dans le cas de la lame d'air, il y a une réflexion avec changement de signe du champ électrique de l'onde au niveau du point d'incidence sur la lame de verre alors que la réflexion

sur la seconde face de la lame de verre s'effectue sans changement de signe. Il faut donc traduire le changement de signe par un $\boxed{\text{déphasage de } \pi}$, c'est-à-dire par une différence de marche de $\lambda/2$.

26. On considère deux ondes synchrones et cohérentes déphasées de $\varphi = 2\pi \frac{e}{\lambda}$. L'expression des deux amplitudes est $s_1 = s_0 \exp j\omega t$ et $s_2 = s_0 \exp j(\omega t + \varphi)$. La somme des amplitudes est donnée par $s = s_0 \exp j\omega t(1 + \exp j\varphi)$. L'éclairement est donné par l'expression $\mathcal{E} = \alpha s s^*$ où α est un coefficient de proportionnalité adapté aux unités. On a donc $\mathcal{E} = \alpha s_0^2(1 + \exp j\varphi)(1 + \exp -j\varphi)$. On trouve aisément $\mathcal{E} = 2\alpha s_0^2(1 + \cos \varphi)$. Si on note \mathcal{E}_0 l'éclairement qui serait dû à une seule source, on obtient la formule dite de FRESNEL : $\boxed{\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos \varphi)}$.

Expérience n°1

27. La figure d'interférence est constituée d' $\boxed{\text{anneaux}}$ concentriques de plus en plus serrés lorsque l'on s'éloigne du centre. Comme la différence de marche ne dépend que de l'angle d'incidence i sur la lame, l'état d'éclairement ne dépend que de i . Par symétrie de révolution autour de l'axe optique de la lentille, on obtient des anneaux.

28. Compte tenu de l'orientation de la lentille par rapport à la lame, une incidence de 45° sur la lame correspond à un rayon arrivant sur la lentille parallèlement à l'axe optique. L'angle α représente donc un petit angle par rapport à l'axe optique. La lentille de projection sera donc utilisée dans les conditions de GAUSS. À partir de l'expression de la différence de marche, on différencie dans un premier temps sur i . On obtient $d\delta = \frac{2e}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} (-2 \sin i \cos i) di$. On utilise le fait que $i = \frac{\pi}{4} + \alpha$ d'où $di = d\alpha$. On travaille au voisinage de $\alpha = 0$. On peut donc écrire que $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha$. Avec $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \alpha \simeq \alpha$ alors que $\cos \alpha \simeq 1$, on obtient l'expression $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \alpha)$. De la même façon, on trouve $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \alpha)$. En travaillant à l'ordre le plus bas non nul pour α , on arrive à $d\delta = -2e \frac{\frac{1}{2}(1+\alpha)(1-\alpha)}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}(1+2\alpha)}}$. Étant donné la situation, on néglige le terme en α^2 et celui en 2α devant $1/2$ sous la racine. La variation élémentaire de différence de marche est donc : $\boxed{d\delta = -\frac{e}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}} d\alpha}$.

29. L'interfrange est la distance qui sépare $\boxed{\text{deux maxima de lumière consécutifs}}$ ou bien deux minima. On peut aussi proposer de prendre comme référence deux états successifs identiques de lumière.

30. La différence de marche diminue lorsque l'on s'éloigne du centre. On a donc $\Delta\lambda = -\frac{e\Delta\alpha}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}}$. Pour passer d'une frange à la suivante, il faut que l'écart de différence de marche corresponde à une longueur d'onde. Ici, on écrira donc que $\Delta\delta = -\lambda$. À partir de cela, on peut écrire que $\lambda = \frac{e\Delta\alpha}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}}$. La distance sur l'écran d'observation s'obtient facilement puisque l'on travaille avec des petits angles : $\Delta x = f'\Delta\alpha$. On ne trouve pas la formule fournie au départ mais plutôt $\boxed{\frac{e}{f'} \frac{\Delta x}{\sqrt{n^2 - 0,5}} = \lambda}$.

31. Sur la figure proposée, on trouve qu'il y a 10 interfranges entre $x = 2,0$ cm et $x = 5,5$ cm. L'interfrange est donc $\Delta x = 0,35$ cm. À partir des autres valeurs numériques fournies, on trouve la relation suivante :

$$\boxed{\frac{e}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}} = 30,4 \mu\text{m}}$$

Expérience n°2

32. Il faut donc supposer que λ_1 correspond à la première longueur d'onde éteinte dans le spectre visible en partant des courtes longueurs d'onde. Si λ_p est la p ème longueur d'onde éteinte, alors cela signifie qu'entre λ_1 et λ_p il y a un écart d'ordre de $(p - 1)$. Comme on recherche des extinctions, l'ordre est de la forme $k + \frac{1}{2}$. On va le noter $p_1 + \frac{1}{2}$ pour λ_1 et $p_p + \frac{1}{2}$ pour λ_p . On peut donc écrire que $2e\sqrt{n^2(\lambda_1) - \frac{1}{2}} + \frac{\lambda_1}{2} = (p_1 + \frac{1}{2})\lambda_1$ et que $2e\sqrt{n^2(\lambda_p) - \frac{1}{2}} + \frac{\lambda_p}{2} = (p_p + \frac{1}{2})\lambda_p$. On peut donc en déduire les deux relations suivantes : $p_1 = \frac{2e}{\lambda_1}\sqrt{n^2(\lambda_1) - \frac{1}{2}}$ et $p_p = \frac{2e}{\lambda_p}\sqrt{n^2(\lambda_p) - \frac{1}{2}}$. C'est à ce stade de la démonstration que l'on doit nier la dépendance de l'indice de réfraction n en fonction de la longueur d'onde pour obtenir l'expression demandée par l'énoncé. Si on effectue cette hypothèse, on arrive alors à $p_1 = \frac{2e}{\lambda_1}\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}$ et $p_p = \frac{2e}{\lambda_p}\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}$. Avec $p_p - p_1 = p - 1$, on obtient rapidement l'expression : $\boxed{2e\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}} = \frac{\lambda_1\lambda_p}{\lambda_p - \lambda_1}(p - 1)}$.

33. On a une première annulation à $\lambda_1 = 630,0$ nm et avec $p = 15$ la quinzième annulation pour $\lambda_p = 655,5$ nm. On peut donc calculer l'expression : $\boxed{e\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}} = 113,4 \mu\text{m}}$. Cette expression correspond à la seconde relation entre e et n que l'on recherchait.

34. On a un système de deux équations à deux inconnues. D'une part, on a établi $\frac{e}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}} = 30,4 \mu\text{m}$ et d'autre part $e\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}} = 113,4 \mu\text{m}$. D'après l'énoncé, il ne fallait pas développer le calcul mais la situation est

relativement simple au vu des équations. Leur simple produit conduit à l'épaisseur de la lame de verre. On arrive à $e = \sqrt{30,4 \times 113,4} = 58,7 \mu\text{m}$. Bien que fine, cette lame est d'une épaisseur raisonnable dans un dispositif d'optique de précision. Lorsque l'on en déduit la valeur de l'indice, on peut être un peu plus songeur. On trouve $n = 2,06$, c'est relativement peu traditionnel sans être toutefois aberrant. On aurait pu s'attendre à quelque chose de plus proche de $n = 1,5$. Compte tenu de l'ensemble des aléas de l'énoncé, on peut douter du bien fondé de la réalité physique de ces résultats.

DOCUMENT – RÉPONSE

Nom : Seigne

Prénom : Jean-Robert

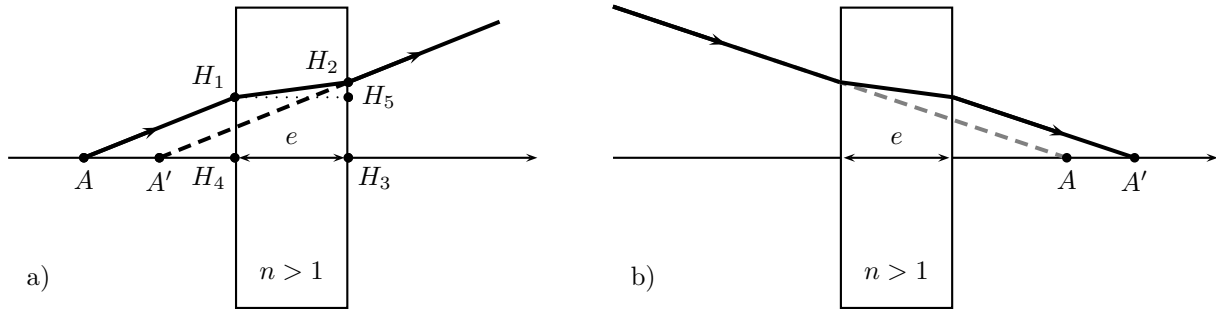


FIGURE 4 – Lame de verre

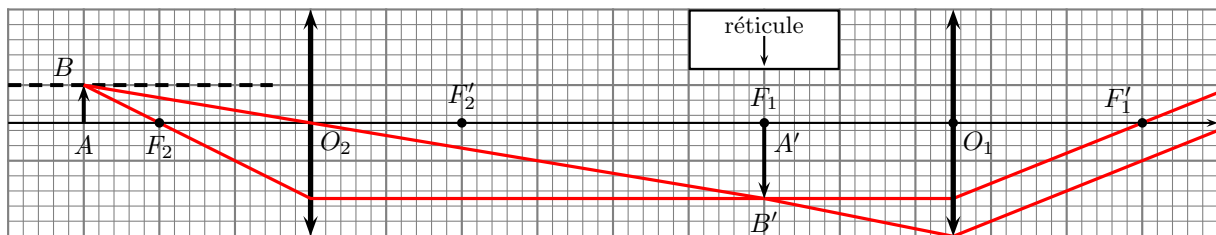


FIGURE 5 – Viseur à frontale fixe

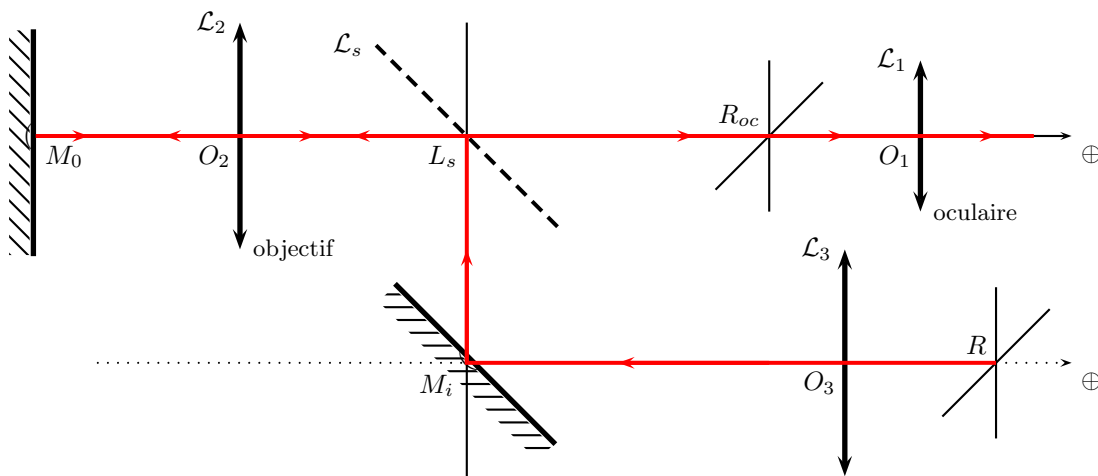


FIGURE 6 – Schéma du dispositif expérimental

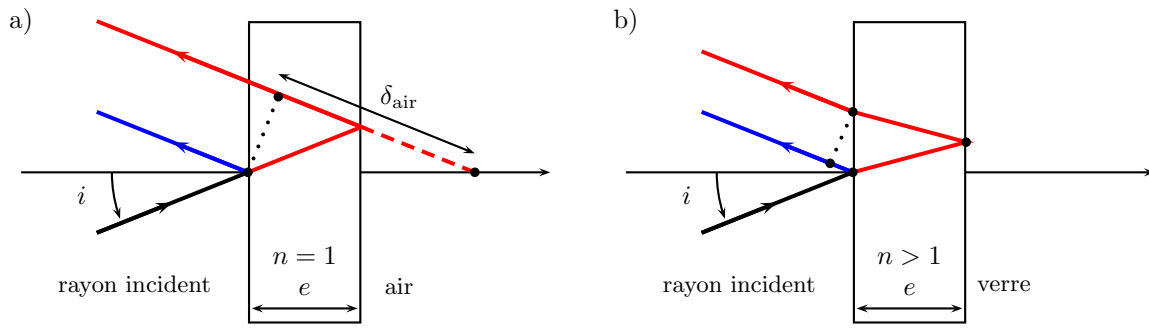


FIGURE 7 – Lames d'air et de verre en réflexion