# Devoir de Sciences Physiques n°3 du 04-11-2024

– Solutions –

# Problème nº 1 – Mouvements de la photosphère du Soleil X PC 2024

## A. Principe du dispositif optique

### Interféromètres de Michelson

1.  $\lambda \simeq 0,677 \,\mu\text{m}$ , on est dans le visible et plus précisément dans le rouge.

2. L'interféromètre de MICHELSON est représenté sur le schéma de la figure 1.  $M_1$  est un miroir plan chariotable et orientable.  $M_2$  est un miroir plan uniquement orientable. Le composant essentiel est quand même la lame semi-réfléchissante (LSR). C'est elle qui assure le dédoublement du faisceau. La différence de marche est créée par les orientations différentes des deux miroirs, on parle alors de coin d'air. Dans le problème qui nous intéresse, les deux miroirs sont parfaitement parallèles, la différence de marche est créée par la différence de distance à la (LSR) notée d pour un des interféromètres et 2d pour le second. Lorsque les deux miroirs sont à la distance a de la (LSR), on dit que l'on est au contact optique. Dans cette configuration, on peut raisonner sur le système simplifié constitué par  $M_2$  et  $M'_1$  qui est l'image de  $M_1$  par la (LSR). On obtient alors la configuration dite de la lame d'air.



FIGURE 1 – Interféromètre de MICHELSON

**3.** La différence de marche est  $\delta = n_{air}2d = 2d$  puisque l'on est dans l'air avec un indice de réfraction considéré égal à 1. L'ordre d'interférence est  $p = \frac{2d}{\lambda}$ .

**4.** On a  $p_0 = \frac{1,2 \times 10^{-2}}{6,8 \times 10^{-7}}$ . On trouve  $p_0 \simeq 18\,000$ .

**5.** On est dans une situation monochromatique d'interférences de deux ondes cohérentes et synchrones. La (LSR) étant parfaite, à savoir 50% de réflexion et 50% de transmission, la formule de FRESNEL s'applique dans sa version la plus simple. Comme  $I_0$  est l'intensité maximale obtenue, on a  $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda})$ , ce qui donne en fonction de l'ordre p la formule suivante :  $I(p) = \frac{I_0}{2}(1 + \cos 2\pi p)$ .

6. Pour une longueur d'onde différente, on obtient  $I' = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0 + \delta\lambda})$ . On peut faire évoluer cette formule en raison du fait que  $\delta\lambda \ll \lambda_0$ . On effectue un développement limité dans l'expression de I'. Cela donne  $I' = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}))$ . On a donc  $I' = \frac{I_0}{2}(1 + \cos(2\pi p_0 - 2\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0})) = \frac{I_0}{2}(1 + \cos 2\pi p_0 \frac{\delta}{\lambda_0})$  puisque  $p_0$ est entier en tenant compte de la  $2\pi$ -périodicité du cosinus. Pour avoir un maximum, il faut que  $p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$  soit un entier. Le premier entier non nul est bien sûr 1, on obtiendra donc un premier maximum lorsque  $p_0 \frac{\delta \lambda}{\lambda_0} = 1$  d'où  $\delta \lambda = \frac{\lambda_0}{p_0}$ .

7. On trouve  $\delta \lambda = \frac{6,77 \times 10^{-7}}{18\,000} \simeq 40 \,\mathrm{pm}$ . C'est la largeur de l'intervalle spectral libre.

8. Puisque la différence de marche est doublée, on aura une valeur de  $p_0$  qui sera doublée et donc un intervalle spectral divisé par 2, on a  $\delta \lambda \simeq 20 \,\mathrm{pm}$ .

9. Comme nous l'avons vu, le premier interféromètre introduit une différence de marche 2d qui correspond à un déphasage  $\varphi = \frac{2\pi 2d}{\lambda}$ . Le second interféromètre introduira  $2\varphi$  comme déphasage entre les deux ondes qu'il va dédoubler. L'amplitude de l'onde lumineuse qui sort du premier interféromètre est la somme de celles des deux ondes déphasées? Si l'on note  $s_0$  l'amplitude de l'une des deux, celle d l'autre est alors  $s_0 \exp j\varphi$ d'où une amplitude  $s_0(1 + \exp j\varphi)$ . Cette onde est à nouveau divisée en deux parties dans chaque branche de l'interféromètre et l'une des deux ondes est déphasée de  $2\varphi$ . En sortie, on a donc une amplitude - on ne se préoccupera pas des amplitudes références ici  $s_0 - s_0(1 + \exp j\varphi)(1 + \exp j2\varphi)$ . L'amplitude est donc  $s_0(1 + \exp j\varphi + \exp j2\varphi + \exp j3\varphi)$  qui est la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique. On peut calculer  $S(\varphi) = 1 + \exp j\varphi + \exp j2\varphi + \exp j3\varphi = \frac{1-\exp j4\varphi}{1-\exp j\varphi} = \exp j\frac{3}{2}\varphi \frac{\exp -j2\varphi - \exp j2\varphi}{\exp -j\frac{2}{2} - \exp j\frac{2}{2}\varphi}$ . Pour obtenir l'intensité, on va passer au module carré. On obtient  $I = Ks_0^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{\sin^2 \frac{2}{2}}$ . Nous avons toujours  $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0 + \delta\lambda}$  comme dans l'étude du premier MICHELSON. On peut donc conclure par l'expression de l'intensité :  $I(\delta\lambda) = \frac{I_0 \frac{\sin^2 2\varphi}{16 \frac{\sin^2 2\varphi}{2}}$ 

avec 
$$\varphi = 2\pi p_0 (1 - \frac{\delta \lambda}{\lambda_0}).$$

10. Même si cela n'est pas re-précisé par l'énoncé, on considérera que  $p_0$  est un entier. Toujours par périodicité des fonctions et par leur propriété de parité, on peut écrire l'expression de l'intensité sous la forme  $I(\delta\lambda) = \frac{I_0}{16} \frac{\sin^2 \pi \frac{4p_0 \delta \lambda}{\lambda_0}}{\sin^2 \pi \frac{p_0 \delta \lambda}{\lambda_0}}$ . On a un maximum d'intensité lumineuse à chaque fois que le dénominateur s'annule (puisque le numérateur s'annule en même temps), cela se produit pour  $p_0 \frac{\delta \lambda}{\lambda_0} = p$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  d'où  $\delta\lambda_{\max} = p\frac{\lambda_0}{p_0}$ . On peut repérer les annulations de l'intensité lumineuse à chaque fois que sin  $\pi \frac{4p_0 \delta}{\lambda_0} = 0$  sans que la condition ne redonne le cas d'un maximum principal que nous venons de caractériser. On a une première annulation lorsque  $4p_0 \frac{\delta}{\lambda_0} = 1$ , une seconde pour la valeur 2 et une troisième pour 3. Par exemple pour le premier zéro à droite du maximum principal correspondant à  $\lambda_0$  ou encore  $\delta\lambda = 0$ , on aura  $\delta\lambda_{1^{er}z\acute{e}ro} = \frac{\lambda_0}{4p_0}$ . On peut continuer ainsi avec  $\delta\lambda_{2^{\grave{e}me}z\acute{e}ro} = \frac{\lambda_0}{2p_0}$  et  $\delta\lambda_{3^{\grave{e}me}z\acute{e}ro} = \frac{3\lambda_0}{4p_0}$ . Ensuite, il n'y a qu'une translation d'une période (ou d'un multiple de celle-ci)  $\frac{\lambda_0}{p_0}$  pour donner tout le graphique proposé.

11. Le filtre de LYOT possède une bande passante à mi-hauteur (il s'agit d'énergie ou de puissance) de 47 pm d'après l'énoncé. En observant la courbe proposée et que nous venons de préciser, on voit que l'intérêt du dispositif est de réduire nettement la largeur de la raie du nickel. En effet en lisant sur le graphique la largeur à mi-hauteur, on constate qu'elle est de l'ordre de 5 pm.

### Utilisation de la polarisation

12. La représentation de l'évolution est réalisée sur la figure 2 à gauche. On a uniquement représenté les miroirs par un segment et la lame semi-réfléchissante aussi. On constate que toute l'énergie revient vers la source, le dispositif n'a aucun intérêt comme le suggère l'énoncé. Les rayons réfléchis ont été décalés sur la figure pour mieux les percevoir.



FIGURE 2 – Interféromètre de MICHELSON et utilisation de lumière polarisée

**13.** L'onde S devient P et l'onde P devient S.

14. Voir la figure 2 à droite. On constate que toute l'énergie lumineuse parvient en sortie

15. En entrée, on envoie une onde polarisée rectilignement à  $\pi/4$ . Par conséquent, on envoie simultanément dans le dispositif 2 ondes avec les champs électriques correspondant aux ondes dites S et dites P. On a donc deux champs électriques perpendiculaires  $\vec{E}_S$  et  $\vec{E}_P$ . Au cours du passage à travers le dispositif, ces deux ondes vont permuter leur polarisation mais en sortie on n'aura toujours deux champs tels que  $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_S + \vec{E}_P$ . L'intensité lumineuse sera proportionnelle au carré de ce champ, on aura donc  $\vec{E}_{tot}^2 = \vec{E}_S^2 + \vec{E}_P^2$  uniquement puisque le terme de double produit sera  $2\vec{E}_P \cdot \vec{E}_S = 0$ . Or, c'est ce terme qui représente les interférences par le déphasage créé par l'interféromètre entre les deux ondes. On ne voit donc pas d'interférences.

16. On considère le schéma de la figure 3. Les lignes neutres de la lame 1/4 d'onde sont orientées selon les vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . Les deux champs électriques concernés sont  $\vec{E}_S$  et  $\vec{E}_P$  à  $\pi/4$  de la ligne  $\vec{e}_x$ par exemple. On note  $E_0$  l'amplitude du champ électrique de chaque champ. On ne fera apparaître dans les calculs que l'amplitude complexe des champs. Avec le choix effectué sur le schéma, on peut dire que le champ électrique au début de la lame est  $\vec{E}_S = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$  alors que  $\vec{E}_P = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \exp jp2\pi$  du fait du déphasage introduit par le parcours dans l'interféromètre. Après la lame, on aura un déphasage de  $\pi/2$  provoqué par la lame quart sur la même composante du champ électrique. Le champ électrique en sortie sera donc  $\vec{E}'_S = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y \exp - j\frac{\pi}{2})$  et  $\vec{E}'_P = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - \vec{e}_y \exp - j\frac{\pi}{2}) \exp jp2\pi$ . En sommant les deux champs, on a une amplitude complexe  $\vec{E}'_{tot} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x (1 + \exp jp2\pi) - \vec{e}_y j(1 - \exp jp2\pi))$ . En factorisant par exp  $jp\pi$ , on obtient  $\vec{E}'_{tot} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \exp jp\pi (\vec{e}_x (\exp - jp\pi + \exp jp\pi) - \vec{e}_y j(\exp - jp\pi - \exp jp\pi))$ . On écrit encore  $\vec{E}'_{tot} = E_0\sqrt{2} \exp jp\pi (\cos p\pi \vec{e}_x + \sin p\pi \vec{e}_y)$ . Ce résultat montre bien que le champ électrique possède une direction fixe orientée par l'angle  $p\pi$  par rapport à la ligne neutre de la lame quart d'onde de ligne neutre sur

 $\vec{e}_x$ .



FIGURE 3 – Lame quart d'onde utilisée en sortie de l'interféromètre avec ses deux lignes neutres l.n.

17. Pour obtenir un maximum d'intensité, il faut que le polariseur rectiligne utilisé en sortie comme analyseur soit orienté sur la direction de  $\vec{E}'_{tot}$  par loi de MALUS. Par exemple pour la longueur d'onde  $\lambda_0$ , on a un ordre  $p_0$  et donc il faut placer l'analyseur sur la direction d'angle  $p_0\pi$  par rapport à  $\vec{e}_x$ . Si on s'intéresse à la longueur d'onde  $\lambda_0 + \delta\lambda$ , on aura un ordre  $p = p_0(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda_0})$ , cela veut dire que l'angle de l'analyseur sera  $p\pi = p_0\pi - p_0\frac{\delta\lambda}{\lambda_0}\pi$  pour repérer le maximum d'intensité lumineuse. Par rapport à  $\lambda_0$ , il faut tourner dans l'autre sens de  $-p_0\frac{\delta\lambda}{\lambda_0}\pi$  pour y parvenir. C'est ainsi que la rotation de l'analyseur de sortie va donner des informations sur les raies décalées par rapport à  $\lambda_0$  et présentes dans le spectre de la photosphère du Soleil.

## Cartographie de la vitesse de la photosphère

18. La taille du Soleil sur le capteur est caractérisée par le diamètre  $d_s = \Delta f = 1,7$  cm. Il y a 1024 pixels de taille 21 µm de côté. La largeur du capteur est donc d'environ 2,1 cm. On constate que  $d_s < 2,1$  cm. Le Soleil est représenté en totalité sur le capteur, à condition quand même de bien centré son image...mais cela ne représente pas une difficulté à ce niveau de recherche.

19. On sait que l'effet DOPPLER génère un écart sur la longueur d'onde proportionnel à la vitesse radiale. Par exemple  $\lambda = \lambda_0 + Kv$  où v est algébrique avec K > 0 en comptant v > 0 pour les vitesses qui s'éloignent de l'observateur, ici du satellite. Si on a une vitesse radiale  $v_r = v$  à la surface du Soleil, il existe forcément la vitesse radiale  $v'_r = -v$  du fait de la rotation du Soleil et de l'observation dans un plan perpendiculaire à son axe. Le pixel  $F_0$  reçoit  $\lambda_0$ , le pixel  $F_2$   $\lambda_0 + Kv$  et le pixel  $F_3$  la longueur d'onde  $\lambda_0 - Kv$ . Pour récupérer une information, il faut effectuer  $F_2 - F_3$ . C'est donc la combinaison C qu'il faut réaliser. En travaillant sur des longueurs d'ondes équidistantes, on aura  $F_4 - F_1$  proportionnel à 2v. L'ensemble reste proportionnel à v.

**20.** La vitesse d'un point d'un solide - on assimile le Soleil à un solide...- est donnée par  $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{e}_y \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$ . Le calcul conduit à  $\vec{v} = \Omega z\vec{e}_x - \Omega x\vec{e}_z$ . Compte tenu des choix de dénomination des axes, on a  $v_{\text{radial}} = -\Omega x$  puisque la direction d'observation est celle dirigée par  $\vec{e}_z$ .

**21.** On a donc  $|\delta\lambda| = \frac{v}{c}\lambda_0$ . On trouve  $\delta\lambda \simeq 4,5 \text{ pm}$ . Cette valeur est très petite mais nous avons vu que la largeur d'une raie est de l'ordre de 5 pm. Il n'y a pas beaucoup de marge pour bien mettre en évidence les raies créées par effet DOPPLER.

### B. Éléments de physique des oscillations solaires

#### Modèle de fluide uniforme

**22.** On se reportera aux éléments étudiés en hors-programme. Dans l'approximation acoustique pour un fluide parfait l'équation de la Mécanique des fluides dite d'EULER est constituée par  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overline{grad}p$ . L'équation de conservation de la masse devient (toujours dans le cadre de l'approximation acoustique)  $\mu_0 \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ . Le coefficient de compressibilité isentropique du fluide est  $\chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \simeq \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu}{p}$ . On a donc  $\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \operatorname{div} \vec{v}) = -\operatorname{div} \overline{grad}p = -\Delta p$  et ensuite  $-\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = -\Delta p$ . En utilisant l'expression approchée au premier ordre du coefficient de compressibilité isentropique, on obtient bien l'expression  $\Delta p = \frac{1}{\mu_0 \chi_S} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$  ce qui donne à une dimension  $\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}$  avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$ .

**23.** La généralisation de cette équation à trois dimensions a été réalisée à la question précédente. Si on se place en coordonnées cartésiennes, on arrive à  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ .

**24.** Les quantités physiques doivent être périodiques en x, de période  $2\pi R$ , correspondant à un tour complet du Soleil. Les solutions doivent vérifier  $f(z) \exp i(\omega t - k_x x) = f(z) \exp i(\omega t - k_x (x + 2\pi R))$ . Cela impose que  $\exp ik_x 2\pi R = 1$  d'où  $k_x 2\pi R = l2\pi$  avec  $l \in \mathbb{Z}$ . On conclut par  $k_x = \frac{l}{R}$ .

**25.** Le capteur présente des pixels qui sont de largeur  $\lambda_e = 21 \,\mu\text{m}$ . Nous allons penser cette taille comme une période spatiale d'échantillonnage. La fréquence d'échantillonnage (elle aussi spatiale) est alors  $\sigma_e = \frac{1}{\lambda_e} \simeq 5 \times 10^4 \,\text{m}^{-1}$ . Le critère de SHANNON nous apprend que la fréquence spatiale maximale est  $\sigma_{\text{max}} = \frac{1}{2}\sigma_e = 2, 5 \times 10^4 \,\text{m}^{-1}$ . Le capteur est utilisé de façon symétrique par rapport à son centre, on ne raisonnera que sur la moitié des pixels, environ 500. La longueur totale utilisable est donc  $\ell_u = 500 \times 21 \,\mu\text{m} \simeq 10^{-2} \,\text{m}$ . Si l'on multiplie la fréquence spatiale maximale par la longueur totale du capteur, on obtient le nombre de pixels utilisables. On trouve que donc que le nombre de pixels est  $N_{pix} = \ell_u \sigma_{\text{max}} \simeq 250$ . À chaque mode doit correspondre un pixel pour pouvoir les distinguer. Il n'est donc pas étonnant que l'on puisse remonter à environ 200 modes comme le dit l'énoncé.

**26.** On remplace la forme proposée dans l'équation différentielle de propagation  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ . En factorisant par l'exponentielle qui ne s'annule que ponctuellement, on peut écrire que l'équation de propagation conduit à  $-k_x^2 f(z) + \frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f(z)$ . Il est préférable de réécrire cette équation sous la forme :  $\frac{d^2 f}{dz^2} + (\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2)f(z) = 0$ .

27. f(0) = 0 exprime le fait que la pression est nulle en dehors du Soleil, on est dans un modèle idéal à savoir que le Soleil possède une limite claire et qu'au-delà, ce soit le vide interstellaire.  $\frac{df}{dz}\Big|_{z=-H} = 0$  signifie qu'il n'y a pas de vitesse verticale à la limite basse de la couche superficielle du Soleil puisque  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z$ . En effet, si f'(z = -H) = 0, on aura  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ . Cela signifie qu'il n'y a pas d'agitation verticale au niveau de la limite basse de la photosphère.

**28.** On commence par le cas où  $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ . La solution est alors  $f(z) = \alpha z + \beta$ . On a  $f'(z) = \alpha$  et comme f'(z = -H) = 0, on en déduit que  $\alpha = 0$ . On a donc  $f(z) = \beta$  mais avec l'autre condition aux limites constituée par f(0) = 0, on arrive à  $\beta = 0$ . La seule solution est la solution nulle. Cela n'a pas grand intérêt. Supposons que  $k_x^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$ , la forme de la solution est donc  $f(a) = \alpha \exp Kz + \beta - Kz$  avec  $K^2 = k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ . En utilisant toujours les deux conditions aux limites du système, on obtient  $\alpha + \beta = 0$  et  $\alpha \exp - KH + \beta \exp KH = 0$ . À nouveau, ce système de deux équations ne possède pas d'autre solution que la solution nulle. Il ne reste plus qu'une seule hypothèse :  $k_x^2 < \frac{\omega^2}{c^2}$ . La solution est alors  $f(z) = \alpha \cos \sqrt{-K^2}z + \beta \sin \sqrt{-K^2}z$ . En faisant f(0) = 0, on obtient  $\alpha = 0$ , Ensuite avec la seconde condition, on arrive à  $\beta \sqrt{-K^2} \cos \sqrt{-K^2}H = 0$ . Cela

conduit à  $\sqrt{-K^2}H = (n + \frac{1}{2})\pi$ . Cela permet de trouver l'expression de la composante du vecteur d'onde sur Ox:  $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{H^2}$ . Cela permet de définir le modes propres selon leur pulsation :  $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{H^2}}$ .

**29.** La variation de  $\omega_0 = c\sqrt{k_x^2 + \frac{\pi^2}{4H^2}}$ ,  $\omega_1 = c\sqrt{k_x^2 + \frac{9\pi^2}{4H^2}}$  et  $\omega_2 = c\sqrt{k_x^2 + \frac{25\pi^2}{4H^2}}$  en fonction de  $k_x$  est représentée à la figure 4.



FIGURE 4 – Évolution de la pulsation des modes propres en fonction de la composante  $k_x$  du vecteur d'onde

**30.** On reprend la relation de dispersion établie avant en utilisant  $(n + \frac{1}{2})\pi = Y\omega_n$  mais aussi le fait que l'on pose  $\omega_n = k_x X$ . La transformation de la relation commence par donner  $\frac{1}{X^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{Y^2}{H^2}$ . On peut conclure sur :  $Y = H\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{X^2}}$ , fonction définie uniquement pour X > c. La représentation de la fonction est réalisée à la figure 5.



### Modèle de fluide stratifié

**31.** Nous savons<sup>1</sup> que  $\Delta p = -k_x^2 p - k_z^2 p = -\frac{\omega^2}{c^2(z)} p$ . Ainsi la relation de dispersion est :  $k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2(z)}$ .

**32.** On a  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_z \vec{e}_z$  et  $k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2(z)}$ . On obtient la relation  $\boxed{\sin i = \frac{k_x}{k} = \frac{k_x c(z)}{\omega}}$ . La notion de rayon acoustique fait immanquablement penser, dans le contexte, à la relation de SNELL-DESCARTES de la réfraction des ondes lumineuses en optique :  $n_1 \sin i_1 + n_2 \sin i_2$ .

**33.** On a sin i < 1. Si c(z) croît toujours lorsque z diminue, on arrive à la limite lorsque sin i = 1 ce qui veut encore dire que  $i = \frac{\pi}{2}$ . Le rayon acoustique possède alors une trajectoire horizontale, si l'on appelle horizontale le perpendiculaire à l'axe verticale Oz comme sur Terre. On a donc :  $1 = \frac{k_x c(z_{\min})}{\omega}$ .

**34.** La trajectoire d'un rayon partant d'un point quelconque de la surface du Soleil est réalisée sur la figure 6. C'est une trajectoire incurvée dans le cas où c = c(z) et des segments rectilignes si l'on suppose la célérité c uniforme.

<sup>1.</sup> Ici, nous allons adopter une attitude classique pour le laplacien de la pression en négligeant la dépendance de  $k_z$  avec z. En effet, si on dérive une première fois sans approximation  $\frac{\partial p}{\partial z} = -i(k_z(z) + z\frac{dk_z}{dz})p$ . Le calcul de la dérivée seconde sera lui aussi différent du cas classique. On écrira que  $\frac{\partial p}{\partial z} \simeq -ik_z(z)p$ . Cela revient à considérer que les évolutions de  $k_z(z)$  sont lentes dans l'espace et que si  $L_c$  est la longueur caractéristique de ces évolutions alors  $z \ll L_c$ . On a donc  $k_z + z\frac{dk_z}{dz} \simeq k_z + \frac{z}{L_c}k_z \simeq k_z$ .



FIGURE 6 – Tracé de rayons acoustiques dans l'épaisseur de la photosphère du Soleil

**35.** Voir la réponse précédente.

**36.** On doit appliquer  $\int_{z_{\min}}^{0} k_z(z) dz = (n + \alpha)\pi$ . On remplace  $\frac{k}{z}$  par son expression  $\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2}$  et on obtient  $\int_{-H}^{0} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} dz = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} H = (n + \alpha)\pi$ . On arrive à  $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{(n + \alpha)^2 \pi^2}{H^2}$ . Cette réponse correspond bien à ce qui a été trouvé avant à condition de prendre  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**37.** On aura deux rayons identiques si sin  $i = \sin i'$ . Cela implique que  $\frac{k_x c(z)}{\omega} = \frac{k'_x c(z)}{\omega'}$  ce qui donne  $\boxed{\frac{k_x}{\omega} = \frac{k'_x}{\omega'}}$ . Sur le graphique, on a des rayons acoustiques qui correspondent à la même abscisse  $X = \frac{\omega}{k_x}$ .

**38.** La condition  $\int_{z_{\min}}^{0} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_x^2} \, dz = (n + \frac{1}{2})\pi$  impose que  $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{H^2}$  qui conduit au même Y puisque  $Y = H\sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{X^2}}$ . Comme l'avance l'énoncé, tous les points de la figure expérimentale sont sur une courbe unique.

**39.** L'approximation de l'acoustique géométrique est valable tant que le phénomène de diffraction est négligeable. Il faut donc que la longueur d'onde  $\lambda$  soit petite devant les longueurs caractéristiques du problème. Dans ce sujet, il intervient le rayon R et la hauteur H d'une part. D'autre part, la loi d'évolution c(z) qui n'est pas présentée, possède sans doute une longueur caractéristique  $\mathcal{L}_c$  pour son évolution en z plus petite que H, sinon on considérerait que c est uniforme. La plus petite des trois est donc  $\mathcal{L}_c$  puisque R > H. Ne connaissant pas la loi c(z), il est bien difficile de répondre à cette question. Il faut donc que  $\lambda \ll \mathcal{L}_c$ . N'oublions pas que  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ avec  $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ . Or, nous savons que  $k_x = \frac{l}{R}$  et on peut écrire que  $k_z \simeq \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{H}$ . Ainsi, on peut écrire que  $k \simeq \sqrt{\frac{l^2}{R^2} + \frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{H^2}}$ . Le constat que l'on peut faire, avec prudence, est que pour assurer la condition  $\lambda \ll \mathcal{L}_c$ , il faut des petites longueurs d'onde et donc des modes de rangs élevés donc l et n plutôt élevés que faibles.

# Problème nº 2 – Machine motrice ditherme

CCP MP 2010

## A. Questions préliminaires

## Généralités sur les moteurs

1. Dans la convention thermodynamique classique, toutes les quantités d'énergie que le système reçoit sont comptées positivement et au contraire toutes celles qu'il donne à l'extérieur sont comptées négativement. Dans le cas d'un moteur ditherme, il est conçu pour fournir du travail donc  $W_c < 0$ . Pour y arriver, il reçoit de l'énergie de la source chaude  $Q_{chaud} > 0$  et en donne à une source froide  $Q_{froid} < 0$ .

2. L'efficacité thermodynamique  $\eta$  du moteur est définie comme le rapport positif du transfert énergétique utile sur le transfert énergétique coûteux. Ici, compte tenu du signe négatif du travail, on aura  $\eta = -\frac{W_c}{Q_{chaud}}$ .

**3.** Sur un cycle, toutes les variations des fonctions d'état sont nulles puisqu'on revient au point de départ. On a donc  $\Delta U_{cycle} = 0$  et  $\Delta S_{cycle} = 0$ . Cela nous permet d'écrire que  $W_c + Q_{froid} + Q_{chaud} = 0$  et comme la variation d'entropie est la somme des contributions de l'entropie transférée et de l'entropie créée (ou produite) :  $0 = \frac{Q_{chaud}}{T_{chaud}} + \frac{Q_{froid}}{T_{froid}} + S^p$  avec  $S^p \ge 0$ . On en déduit que  $\frac{Q_{froid}}{Q_{chaud}} \le -\frac{T_{froid}}{T_{chaud}}$ . Ainsi le rendement (on emploie plutôt ce terme pour un moteur),  $\eta = 1 + \frac{Q_{froid}}{Q_{chaud}}$  est tel que :  $\eta \le 1 - \frac{T_{froid}}{T_{chaud}}$ .

## Gaz parfait

4. La relation de MAYER est :  $C_p - C_V = R$ 

5. On sait que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température et que  $\Delta U = C_v \Delta T$ . En utilisant la loi de MAYER et la définition de  $\gamma = C_p/C_V$ , on trouve facilement que  $\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{R}{M_{air}} \Delta T$  car le nombre de moles d'air est donné par  $n = \frac{m}{M_{air}}$  avec m = 1 kg.

6. Pour l'enthalpie, c'est quasiment la même expression mais avec  $C_p$  au lieu de  $C_V$  puisque  $\Delta H = C_p \Delta T$ . On a donc :  $\Delta H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M_{air}} \Delta T$ .

## B. Thermodynamique du moteur

## Étude du cycle

Les états d'équilibres

7. Pour trouver le volume  $V_A$ , il suffit d'appliquer la loi de gaz parfaits :  $p_0 V_A = \frac{m}{M_{air}} RT_{froid}$  avec m = 1 kg. On trouve donc  $V_A = \frac{RT_{froid}}{M_{air}p_0} = 0,832 \text{ m}^3$ . On fait de même pour les autres volumes :  $V_B = \frac{RT_{froid}}{M_{air}p_1} = 0,083 \text{ m}^3$  et  $V_C = \frac{RT_{chaud}}{M_{air}p_1} = 0,273 \text{ m}^3$ .

8. La transformation CD est une transformation adiabatique et réversible, on peut donc appliquer la loi de LAPLACE  $p_C V_C^{\gamma} = p_D V_D^{\gamma}$ . On a donc  $V_D = V_C \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\gamma}$ . On trouve  $V_D = 1,414 \text{ m}^3$  et ensuite, toujours par la loi des gaz parfaits  $T_D = \frac{p_0 V_D M_{air}}{R} = 493 \text{ K}.$ 

9. Les points d'équilibre A, B, C et D dans le diagramme de CLAPEYRON (p, V) sont représentés sur la figure 7.



10. On utilise l'identité thermodynamique dU = TdS - pdV et en tenant compte des propriétés du gaz parfait, on arrive facilement à  $dS = \frac{C_V}{M_{air}} \frac{dT}{T} + \frac{R}{M_{air}} \frac{dV}{V}$  qui s'intègre en  $\Delta S_{AB} = \frac{R}{M_{air}} \left( (\gamma - 1) \ln \frac{T_B}{T_A} + \ln \frac{V_B}{V_A} \right)$ . Compte tenu du fait que  $T_A = T_B = T_{froid} = 290$  K, on arrive à l'expression simplifiée :  $\Delta S_{AB} = \frac{R}{M_{air}} \ln \frac{V_B}{V_A}$ . L'application numérique conduit à  $\Delta S_{AB} = -661$  J · K<sup>-1</sup> pour une masse d'air m = 1 kg.

## Production d'entropie sur le cycle

11. La transformation BC est une transformation monobare, le transfert thermique correspond donc à la variation d'enthalpie :  $\Delta H_{BC} = Q_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M_{air}} (T_{chaud} - T_{froid})$ . On trouve  $Q_{BC} = Q_{chaud} = 663 \text{ kJ}$ .

12.  $Q_{DA}$  correspond à un refroidissement monobare, c'est donc la variation d'enthalpie correspondant à la variation de température  $T_A - T_D$ . Pour la température  $T_D$ , on applique la loi de LAPLACE entre C et D. on obtient donc  $T_D = T_{chaud} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$ . Ainsi  $Q_{DA} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M_{air}} (T_{froid} - T_{chaud} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma})$ . Pour la

transformation AB, on sait que  $\Delta U_{AB} = 0 = W_{AB} + Q_{AB}$  puisque les points A et B sont à la même température. La transfert thermique avec la source froide est donc :  $Q_{froid} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M_{air}} (T_{froid} - T_{chaud} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}) - W_{AB}.$ 

13. Comme nous l'avons dit, sur un cycle,  $\Delta S = 0 = S^{transf} + S^p$ . Comme les sources d'énergie sont des thermostats (température invariable), le calcul de l'entropie transférée est aisé :  $S^{transf} = \frac{Q_{froid}}{T_{froid}} + \frac{Q_{chaud}}{T_{chaud}}$ . Après

calculs, on obtient : 
$$S_{cycle}^{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M_{air}} \left( \frac{T_{chaud}}{T_{froid}} \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1 - \gamma}{\gamma}} + \frac{T_{froid}}{T_{chaud}} - 2 \right) + \frac{W_{AB}}{T_{froid}}$$

14. La forme précédente de l'entropie produite sur un cycle montre très clairement que pour rendre  $S_{cycle}^p$  la plus petite possible, cela passe par la minimisation de  $W_{AB}$ .

#### Étude de la transformation $A \rightarrow B$

15. On peut appliquer la loi de LAPLACE sur la transformation  $A\alpha_1$ . Cela donne  $V_{\alpha_1} = V_A \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ . On trouve  $V_{\alpha_1} = 0, 161 \text{ m}^3$ . Ensuite, par la loi des gaz parfaits, on arrive à  $T_{\alpha_1} = 561 \text{ K}$ .

16. Puisque la transformation est adiabatique, le premier principe consiste à écrire que  $W_{A\alpha_1} = \Delta U_{A\alpha_1}$ puisque  $Q_{A\alpha_1} = 0$ . On a donc  $W_{A\alpha_1} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{R}{M_{air}} (T_{\alpha_1} - T_A)$ . On trouve :  $W_{A\alpha_1} = 194$  kJ.

17. Ce travail correspond à une transformation monobare :  $W_{\alpha_1 B} = -\int_{\alpha_1}^{B} p_1 dV$ . La pression extérieure  $p_1$  étant constante, l'intégration est évidente. On a :  $W_{\alpha_1 B} = p_1(V_{\alpha_1} - V_B)$ , ce qui donne :  $W_{\alpha_1 B} = 78$  kJ.

18. On somme les deux travaux précédents :  $W_{AB}^{(a)} = 272 \text{ kJ}$ .  $W_{AB}^{(a)}$  est représenté par l'aire sous la courbe dans le diagramme de CLAPEYRON, voir le schéma de la figure 7.

#### Compression double - transformation (b)

**19.** Les points d'équilibre A,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  et B sont représentés sur le diagramme de la figure 7. Une transformation adiabatique et réversible obéit à la loi de LAPLACE  $pV^{\gamma}$  = Cte. On a donc une loi de forme hyperbolique  $p = \frac{Cte}{V^{\gamma}}$ . Cette situation est illustrée, toujours sur le graphique de la figure 7, par la courbe joignant les points C et D.

**20.** La loi de LAPLACE est  $pV^{\gamma}$  = Cte. En utilisant la loi des gaz parfaits, on arrive à  $p^{1-\gamma}T^{\gamma}$  = Cte'. En appliquant cette loi, entre les états d'équilibre A et  $\beta_1$ , on trouve :  $T_{\beta_1} = T_{froid}\mu^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$  où  $\mu = \frac{p_i}{p_0}$ .

**21.** Entre  $\beta_2$  et  $\beta_3$ , on a une nouvelle compression adiabatique et réversible d'où  $T_{\beta_3} = T_{\beta_2} \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ . Avec  $T_{\beta_2} = T_{froid}$  et  $\frac{p_i}{p_1} = \frac{p_i}{p_0} \frac{p_0}{p_1} = \mu \frac{p_0}{p_1}$ , on arrive à :  $T_{\beta_3} = T_{froid} \left(\mu \frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ .

**22.** La compression entre A et  $\beta_1$  est une adiabatique, on a donc  $\Delta U_{A\beta_1} = W_{A\beta_1}$  et par conséquent  $W_{A\beta_1} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{R}{M_{air}} (T_{\beta_1} - T_{froid})$ . Pour la transformation  $\beta_1\beta_2$ , on a une transformation monobare pour laquelle  $W_{\beta_1\beta_2} = p_i(V_{\beta_1} - V_{\beta_2})$ . En appliquant la loi des gaz parfaits dans ces deux états, on arrive à  $W_{\beta_1\beta_2} = \frac{R}{M_{air}} (T_{\beta_1} - T_{\beta_2})$ . Pour  $\beta_2\beta_3$ , on retrouve une transformation adiabatique et réversible d'où  $W_{\beta_2\beta_3} = \Delta U_{\beta_2\beta_3} = \frac{R}{M_{air}} (T_{\beta_3} - T_{\beta_2})$ . Pour terminer, on arrive en B par une transformation monobare. On a donc  $W_{\beta_3B} = p_1(V_{\beta_3} - V_B) = \frac{R}{M_{air}} (T_B - T_{\beta_3})$ . Il faut maintenant exprimer toutes les températures qui interviennent en fonction de  $T_{froid}$ ,  $T_{chaud}$  et des paramètres du problème comme  $\mu$  ou bien encore  $\gamma$ . Ensuite, en sommant les travaux sur les quatre étapes, on

arrive à : 
$$W_{AB}^{(b)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M_{air}} T_{froid} \left[ \mu^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} + \mu^{\frac{1 - \gamma}{\gamma}} \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1 - \gamma}{\gamma}} - 2 \right]$$

**23.** On calcule la dérivée du travail en fonction de  $\mu$ . On trouve  $\frac{dW_{AB}^{(b)}}{d\mu} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 \frac{R}{M_{air}} T_{froid} \left[\frac{1}{\mu^{\frac{1}{\gamma}}} - \mu^{\frac{1}{\gamma}-2} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right]$ . L'annulation de cette dérivée amène  $\frac{1}{\mu^{\frac{1}{\gamma}}} = \mu^{\frac{1}{\gamma}-2} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$  ce qui après réarrangement conduit à  $\frac{p_1}{p_0} = \mu^2$  et donc :  $\mu^* = \sqrt{\frac{p_1}{p_0}}$ . On obtient numériquement  $\mu^* = 3, 16$ .

**24.** Dans le cas où  $\mu = \mu^*$ , on trouve  $W_{AB}^{(b)} = 227 \,\text{kJ}$ 

### Compression multiple

**25.** Pour obtenir la même température en début de compression (A) et en fin de compression (B), on peut envisager une isotherme. C'est bien sûr dans le cas où elle sera réversible que le travail sera minimal. Mais il faudra toujours du travail pour comprimer le fluide. L'idéal est donc l'isotherme réversible.

**26.** Le calcul du travail est :  $W = \int_{A}^{B} -p dV = RT_{froid} \int_{B}^{A} \frac{dV}{V}$ . On trouve :  $W_{AB}^{lim} = \frac{R}{M_{air}} \ln \frac{V_{A}}{V_{B}} = 192 \text{ kJ}$ .

27. Pour trouver l'efficacité thermodynamique du moteur, il faut calculer le transfert thermique de la source chaude. On l'a déjà fait avant puisqu'il s'agit de  $Q_{BC}$ . On avait trouvé  $Q_{BC} = 663 \text{ kJ}$ . Pour le travail, il faut faire le cycle entier, c'est beaucoup plus simple d'évaluer les transferts thermiques. Sur l'isotherme AB, on a  $Q_{AB} = -W_{AB} = 192 \text{ kJ}$ . On a d'autre part  $Q_{CD} = 0$  puisque la transformation est adiabatique. Il ne reste plus qu'à évaluer  $Q_{DA}$  et comme la transformation est monobare, on peut écrire que  $Q_{DA} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M_{air}} (T_{froid} - T_D) = -204 \text{ kJ}$ . On trouve que  $Q_{cycle} = 267 \text{ kJ}$  et par le premier principe  $\Delta U_{cycle} = 0 = W_{cycle} + Q_{cycle}$ . On trouve donc  $W_{cycle} = -267 \text{ kJ}$ . On peut donc terminer le calcul en écrivant que :  $\eta = -\frac{W_{cycle}}{Q_{BC}} = 0, 40$ .

**28.** Une puissance de 500 cv correspond à en fait  $P_m = 368$  kW. On a, de plus,  $P_m = \mathcal{D}_m W_{cycle}$  puisque  $W_{cycle}$  a été évalué pour une masse m = 1 kg d'air. On en déduit que  $\mathcal{D}_m = 1, 38$  kg  $\cdot$  s<sup>-1</sup>.

**29.** La définition du débit massique est  $\mathcal{D}_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ . On raisonne au niveau du point D. La masse volumique de l'air est donc donnée par les caractéristiques de pression et température en D. On trouve  $\rho = \frac{p_0 M_{air}}{RT_D} = 0,71 \,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ . Comme la vitesse est supposée uniforme sur toute la section de la tuyauterie, on a  $\mathcal{D}_m = \mu v \pi \frac{d^2}{4}$  et donc  $v = \frac{4\mathcal{D}_m}{\mu \pi d^2} = 15,6 \,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ .