

## Devoir de Sciences Physiques n°4 pour le 04-12-2023

Problème à remettre à votre camarade prévu dans DMscope pour une correction croisée, retour de la correction croisée le 08/12 au plus tard.

### Problème n° 1 – Seul sur Mars

Centrale PSI 2019

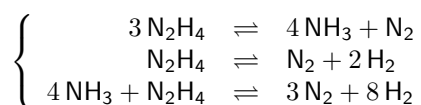
L'histoire du film *The Martian* (Seul sur Mars) de Ridley Scott, montre comment un homme, Mark Watney, survit seul sur Mars grâce à ses connaissances scientifiques. L'environnement hostile de la planète représente une contrainte de taille pour les ingénieurs et les scientifiques qui travaillent pour que des hommes puissent un jour poser le pied sur la planète rouge. La NASA annonce un vol habité pour Mars dans les années 2030, l'hypothèse du film n'est donc pas irréaliste. Même si cette histoire repose sur des travaux scientifiques et des techniques aérospatiales actuelles, on peut se demander si l'histoire est bien réaliste.

#### A. Fabrication d'eau sur Mars

Mark Watney est bien conscient que l'eau est l'une des clefs de sa survie sur Mars. Il n'en manque pas grâce à l'ingéniosité des procédés développés dans le domaine spatial mais il a besoin d'énormes quantités d'eau pour arroser ses plants de pomme de terre et assurer son alimentation en attendant l'aide hypothétique de la Terre. Heureusement, outre sa qualité de botaniste, il a des notions élémentaires de mécanique, de physique et de chimie.

Mark Watney estime avoir besoin de 600 L d'eau, qu'il décide d'obtenir par combustion de dihydrogène par le dioxygène. Il peut obtenir le dihydrogène par décomposition de l'hydrazine et le dioxygène par réduction du  $\text{CO}_2$  en  $\text{CO}$  à haute température ( $800^\circ\text{C}$ ) selon la réaction  $2\text{CO}_2 \rightleftharpoons \text{O}_2 + 2\text{CO}$  en phase gazeuse.

L'hydrazine dont il souhaite tirer le dihydrogène avant de le brûler pour former l'eau est un carburant notamment utilisé dans la conquête spatiale. Les réactions chimiques de décomposition de l'hydrazine en molécules de  $\text{N}_2$  et  $\text{H}_2$ , en présence d'iridium comme catalyseur, sont les suivantes (en phase gazeuse) :



1. Proposer des formules de LEWIS pour l'hydrazine  $\text{N}_2\text{H}_4$ , l'ammoniac  $\text{NH}_3$  et le diazote  $\text{N}_2$ .
2. Déterminer le volume d'hydrazine (densité 1,02) nécessaire pour obtenir les 600 L d'eau liquide voulus par Mark Watney.
3. La présence du catalyseur d'iridium modifie-t-elle l'état d'équilibre ?
4. L'iridium cristallise dans un réseau cubique à faces centrées avec une densité de 22,5. Représenter cette maille cristalline. Estimer le rayon atomique de l'iridium.
5. Calculer la constante thermodynamique de la réaction  $2\text{CO}_2 \rightleftharpoons \text{O}_2 + 2\text{CO}$  à  $800^\circ\text{C}$  en phase gazeuse. Commenter.
6. Comment évolue la réaction  $2\text{CO}_2 \rightleftharpoons \text{O}_2 + 2\text{CO}$  si on diminue la température ? Justifier.
7. Quelle est la température maximale atteinte lors de la combustion du dihydrogène ?

#### B. Peut-on cultiver des pommes de terre sur Mars ?

Pour s'alimenter Mark Watney fait pousser des pommes de terre dans le sol martien en utilisant les selles récupérées dans les toilettes de la mission. Les selles contiennent des bactéries nécessaires à une culture. Néanmoins, les sondes Viking ont montré qu'un tel sol, particulièrement oxydant, tue toutes les bactéries, à fortiori celles des selles. Dans cette partie, afin d'étudier l'action oxydante du sol sur les bactérie on utilise la bactérie *E. coli* comme organisme modèle et on modélise le stress oxydant par l'action du peroxyde d'hydrogène  $\text{H}_2\text{O}_2$ .

##### Métabolisme de la bactérie

Le peroxyde d'hydrogène est un sous-produit du métabolisme des cellules, sa production suit une cinétique d'ordre 0 de constante de vitesse  $k_p = 15\ \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour lutter contre le peroxyde d'hydrogène, la bactérie a développé un arsenal de défense dont les principales actrices sont les enzymes alkylhydroperoxydase (notée Ahp) et catalase (notée Cat). Le peroxyde d'hydrogène est également capable de diffuser à travers la paroi de la bactérie. Dans la suite, on considère que les concentrations à l'intérieur de la bactérie et à l'extérieur sont uniformes. Le modèle complet a été développé par UHL et DUKAN (PLoS One. 2016 ; 11(8)).

La bactérie est modélisée par une sphère de volume total  $V_i$  de rayon externe  $R$  et d'épaisseur de paroi  $e$ . On note  $\phi$  le flux de peroxyde d'hydrogène (en  $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$ ) sortant de la bactérie à travers sa paroi et  $D$  le coefficient de diffusion particulaire du peroxyde d'hydrogène dans la paroi. Dans l'hypothèse d'un régime stationnaire, on définit une résistance particulaire  $R_p$  à l'aide de l'expression :

$$\phi = \frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e}{R_p}$$

où  $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$  est la concentration en peroxyde d'hydrogène à l'intérieur de la bactérie et  $[\text{H}_2\text{O}_2]_e$ , sa concentration dans le milieu extérieur. On donne la loi de FICK :  $\vec{j}_{pa} = -D \overrightarrow{\text{grad}} c$ .

8. Citer deux autres domaines de la physique utilisant la notion de résistance. Préciser les analogies.
9. Exprimer  $R_p$  en fonction de  $e$ ,  $D$  et  $R$ .
10. Simplifier cette expression dans l'hypothèse où  $e \ll R$ .
11. Proposer une valeur numérique de  $R_p$ .
12. Montrer que la loi de cinétique de diffusion à travers la membrane peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = \pm k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

13. Quel signe doit-on choisir sachant que  $k_d > 0$ ? Exprimer  $k_d$  en fonction de  $e$ ,  $D$  et  $R$  et proposer une application numérique.

Les enzymes présentes dans la bactérie obéissent à une cinétique, dite michaelienne, où la vitesse de réaction a la forme générale :

$$v = -\frac{d[S]}{dt} = \frac{v_{max} [S]}{[S] + K_M}$$

où  $v_{max}$  et  $K_M$  (constante de MICHAELIS) sont des constantes caractéristiques de l'enzyme et  $S$  représente le composé chimique décomposé par l'enzyme.

14. Quelle est la dimension de la constante  $K_M$ ? Quel sens concret peut-on donner au paramètre  $K_M$ ?

La dynamique du peroxyde d'hydrogène est donc décrite par le système présenté ci-dessous :

Réactions associées à $\text{H}_2\text{O}_2$	Équations chimiques	Loi de vitesse
Production métabolique	$\emptyset \rightarrow \text{H}_2\text{O}_2$	ordre 0
Décomposition par Ahp	$\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2} \text{O}_2$	$v^{Ahp} = \frac{v_{max}^{Ahp} [\text{H}_2\text{O}_2]}{[\text{H}_2\text{O}_2] + K_M^{Ahp}}$
Décomposition par Cat	$\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2} \text{O}_2$	$v^{Cat} = \frac{v_{max}^{Cat} [\text{H}_2\text{O}_2]}{[\text{H}_2\text{O}_2] + K_M^{Cat}}$
Diffusion membranaire	$\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{extérieur}$	$v = \pm k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$

On note  $N$  le nombre de bactéries dans le milieu extérieur. Le volume extérieur est noté  $V_e$ . La densité de bactéries est alors notée  $n = N/V_e$ .

15. Préciser les degrés d'oxydation de l'oxygène dans les trois molécules de la réaction  $\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2} \text{O}_2$ . Comment nomme-t-on ce type de réaction en chimie?

16. Calculer la constante thermodynamique de cette réaction de décomposition à 25 °C. Commenter.

17. Donner les équations différentielles associées au système dynamique ci-dessus vérifiées par  $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$  et  $[\text{H}_2\text{O}_2]_e$ .

En condition physiologique, sans stress exogène, on admet que  $[\text{H}_2\text{O}_2] \ll K_M^{Ahp}$  et  $[\text{H}_2\text{O}_2] \ll K_M^{Cat}$ . Ces hypothèses seront vérifiées a posteriori.

18. Déterminer la concentration en peroxyde d'hydrogène à l'équilibre à l'intérieur des cellules.

19. Faire l'application numérique, commenter.

### Situation de stress oxydant

On considère désormais une situation de stress oxydant produit par l'ajout d'une importante quantité de peroxyde d'hydrogène exogène (c'est-à-dire introduite à l'extérieur de la bactérie) : on suppose que les bactéries se trouvent dans un milieu où la concentration extérieure en peroxyde d'hydrogène vaut initialement  $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Tant que la concentration exogène est très élevée, les bactéries sont submergées et par conséquent elles voient leur concentration interne en peroxyde d'hydrogène atteindre quasi instantanément la valeur exogène (la diffusion n'est plus limitante).

20. Proposer une approximation à l'équation différentielle vérifiée par  $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$  dans le cas du stress exogène proposé (tant qu'il est important).

21. En déduire la quantité (en mole) de peroxyde d'hydrogène décomposé par seconde et par bactérie.

22. Combien de temps faudra-t-il à  $n = 10^7$  bactéries par mL pour décomposer la moitié du peroxyde d'hydrogène externe introduit ? Même question pour  $n = 10^9$  bactéries par mL. Commenter.

Données :

Grandeurs thermodynamiques entre  $0^\circ\text{C}$  et  $1000^\circ\text{C}$  (approximation d'Ellingham)

	$\text{CO}_{2\text{gaz}}$	$\text{O}_{2\text{gaz}}$	$\text{CO}_{\text{gaz}}$	$\text{H}_{2\text{gaz}}$	$\text{H}_2\text{O}_{\text{gaz}}$
Enthalpie standard de formation ( $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	-394		-111		-242
Entropie molaire standard ( $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	214	237	198	130	189
Capacité thermique molaire ( $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	49,0	34,0	32,0	30,0	37,0

Au sujet de *E. coli*

	Notation	Valeurs
Production de $\text{H}_2\text{O}_2$	$k_p$	$15 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Michaelis pour Catalase	$K_M^{\text{Cat}}$	$5,9 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
Constante de Michaelis pour Ahp	$K_M^{\text{Ahp}}$	$1,2 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
Vitesse maximale pour Catalase	$v_{\text{max}}^{\text{Cat}}$	$4,9 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse maximale pour Ahp	$v_{\text{max}}^{\text{Ahp}}$	$6,6 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Coefficient de diffusion membranaire pour $\text{H}_2\text{O}_2$	$D$	$2,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Volume de la bactérie	$V_i$	$3,2 \times 10^{-15} \text{ L}$
Épaisseur de la paroi	$e$	9 nm

Potentiel standard du couple  $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$   $E_1^\circ = 1,77 \text{ V}$

Potentiel standard du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$   $E_2^\circ = 0,69 \text{ V}$

Paramètre de la loi de NERNST  $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 \simeq 0,06 \text{ V}$

Constante d'AVOGADRO  $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Charge élémentaire  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Constante des gaz parfaits  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masses molaires ( $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )  $\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{N} = 14, \text{O} = 16, \text{I} = 192$

## Problème n° 2 – Autour de la diffusion

Agrégation 2017

On rappelle les valeurs numériques de quelques constantes fondamentales :

Nombre d'AVOGADRO	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de BOLTZMANN	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

### A. Préliminaires

1. Quel est le moteur microscopique commun à tous les phénomènes de diffusion ?

Dans tout le problème, on nomme *équation de diffusion* une équation de type :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D \Delta a$$

où  $a(M, t)$  peut représenter un champ scalaire ou vectoriel réel représentant une grandeur physique et  $D$  est une grandeur réelle caractérisant le processus diffusif étudié, appelé coefficient de diffusion.

2. Donner la dimension de  $D$ .

3. Déterminer au moins deux propriétés de l'équation de diffusion et préciser leurs conséquences sur l'étude des phénomènes diffusifs.

4. On note  $\tau$  un temps caractéristique de dévolution et  $L^*$  une distance caractéristique d'évolution de  $a(M, t)$ . En faisant une analyse dimensionnelle, relier ces deux grandeurs. Commenter.

5. Définir la notion de régime stationnaire. Dans le cas du régime stationnaire, donner la forme que prend l'équation de diffusion. Commenter.

En régime quelconque, l'équation de diffusion peut être analysée comme une équation de propagation puisqu'elle relie des dérivées partielles spatiales à des dérivées partielles temporelles du champ  $a(M, t)$ . On s'intéresse à la propagation dans la direction  $(Oz)$  et le sens croissant, d'une onde de pulsation  $\omega$ , caractérisée par une amplitude complexe :  $\underline{a}(M, t) = \underline{A} \exp j(\omega t - \underline{k}z)$ , telle que  $a(M, t) = \Re(\underline{a}(M, t))$  et où  $\underline{k} \vec{e}_z$  est un vecteur d'onde complexe.

6. Déterminer la relation de dispersion reliant  $\underline{k}$  et  $\omega$ . Indiquer si la propagation s'accompagne d'un phénomène de dispersion et/ou d'atténuation. Définir dans ce cas l'épaisseur de peau  $\delta$ .

### B. La loi de Fourier

Soit  $T(M, t)$  la température en un point  $M$  de l'espace à l'instant  $t$ . La loi de FOURIER est une loi phénoménologique qui relie le champ de température  $T(M, t)$  au vecteur densité de courant thermique :  $\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ .

7. Définir la notion de loi phénoménologique. Citer deux conditions de validité de la loi de FOURIER.

8. Donner quelques informations historiques sur le scientifique J. FOURIER (dates, travaux).

9. Nommer le coefficient  $\lambda$  et donner son unité. Citer des paramètres physiques dont peut dépendre  $\lambda$ .

Dans la suite du problème, on considère le coefficient  $\lambda$  comme constant et indépendant du point  $M$ .

10. Donner l'ordre de grandeur de ce coefficient pour un métal, pour l'eau et l'air à température ambiante.

Une expérience qualitative classique consiste à poser au même instant deux glaçons identiques sur deux matériaux différents (par exemple un récipient en bois et une poêle) et à observer la fonte des glaçons, voir la figure 1.

11. Analyser la situation physique de l'expérience précédente et proposer une explication qualitative.

On s'intéresse maintenant à la diffusion de la chaleur dans un matériau immobile de volume constant, de masse volumique  $\mu$  uniforme et de capacité thermique massique à volume constant  $c_v$  uniforme. On suppose qu'il n'y a ni production, ni absorption de la chaleur au sein du matériau.

12. À partir du premier principe de la Thermodynamique, déterminer l'équation de la diffusion satisfaite par le champ de température  $T(M, t)$  dans le matériau. Indiquer à chaque étape du raisonnement s'il est nécessaire de faire des hypothèses. Donner l'expression du coefficient de diffusion  $D_{th}$  associé à la diffusion de la chaleur (ce coefficient est également appelé diffusivité thermique).



FIGURE 1 – Deux glaçons identiques sur une poêle et un récipient en bambou, 5 minutes après qu'ils ont été posés sur leur support respectif.

Il existe différents dispositifs expérimentaux permettant de mesurer la conductivité thermique ou le coefficient de diffusivité thermique d'un matériau : des méthodes de mesures en régime stationnaire, des méthodes en régime quasi-établi et des méthodes en régime variable... Les mesure d'une conductivité thermique avec une bonne précision sont des opérations très délicates qui se font en général dans des laboratoires spécialisés. Le principe de mesure est différent suivant le type de matériau que l'on souhaite étudier (plus ou moins conducteur de la chaleur, solide ou fluide...). Dans la suite, on se propose d'étudier deux principes de mesures en régime stationnaire de la conductivité thermique d'un matériau : le premier matériau sera solide, le suivant sera un fluide.

### C. Dispositif de la plaque chaude gardée

Cette méthode est assez bien adaptée à la mesure de la conductivité thermique  $\lambda$  de matériaux isolants solides ; dont la forme est une plaque de surface  $\Sigma$  et d'épaisseur  $e$ . On considère que la surface  $\Sigma$  dans l'expérience présentée ici est de  $610 \times 610 \text{ mm}^2$ , l'épaisseur est variable suivant les échantillons, entre 20 mm et 100 mm.

La figure 2 indique le schéma de principe de l'expérience. Les plaques, placées à la base et au sommet du dispositif expérimental, sont constituées d'un matériau très conducteur (cuivre ou aluminium) et sont maintenues à une température constante grâce à l'utilisation d'une circulation d'eau issue d'un bain thermostaté. Une plaque chauffante délivre par effet JOULE une puissance totale de chauffe  $\phi$  uniforme et constante. Cette puissance de chauffe est transmise aux deux échantillons quasi-identiques constitués du même matériau dont on veut mesurer la conductivité thermique. On supposera, ici, que la puissance totale de chauffe générée par l'élément chauffant se répartit dans chacun des échantillons, et on note  $\varphi_S = \frac{\phi}{2S}$ , la densité moyenne de flux thermique (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) émise par la plaque chauffante d'un anneau de garde carré, à la même température que cette dernière.

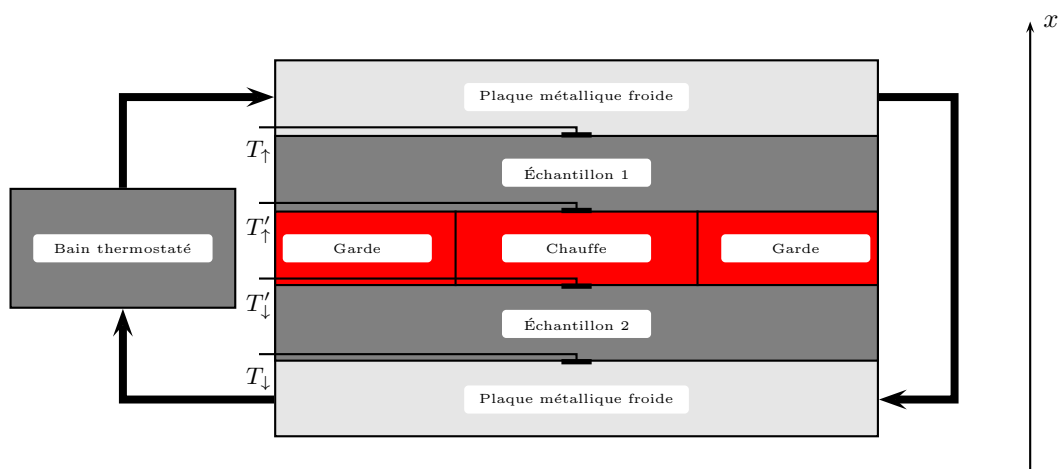


FIGURE 2 – Dispositif expérimental de la méthode de la plaque chaude gardée.

On place des thermocouples sur chaque face des échantillons, voir la figure 2. On note  $T_{\uparrow}$  et  $T'_{\uparrow}$  les températures mesurées respectivement sur la face froide et la face chaude de l'échantillon 1. De même, on note  $T_{\downarrow}$  et  $T'_{\downarrow}$  les

températures mesurées respectivement sur la face froide et la face chaude de l'échantillon 2. On note enfin les écarts positifs de température  $\Delta T_{\uparrow} = T'_{\uparrow} - T_{\uparrow}$  et  $\Delta T_{\downarrow} = T'_{\downarrow} - T_{\downarrow}$ .

**13.** On se place dans le cadre d'un modèle unidimensionnel, où le champ de température dans les échantillons, ne dépend que de la coordonnée  $x$  :  $T(x, t)$ . Discuter l'hypothèse permettant de supposer un modèle unidimensionnel. Expliquer qualitativement le fonctionnement de l'anneau de garde.

**14.** À partir de l'équation de diffusion thermique, déterminer la forme générale que prend la fonction  $T(x)$  en régime stationnaire dans les échantillons.

**15.** Définir la notion de résistance thermique d'une plaque échantillon de surface  $s$  et d'épaisseur  $e$  et déterminer son expression.

**16.** Trouver le ou les intérêt(s) dans l'utilisation d'un dispositif expérimental symétrique, utilisant deux échantillons quasi-identiques de part et d'autre de la plaque chauffante au lieu d'un.

**17.** Déterminer l'expression de la conductivité thermique  $\lambda$  du matériau constituant les échantillons en fonction des épaisseurs respectives  $e_{\uparrow}$  et  $e_{\downarrow}$  des échantillons 1 et 2, des écarts de température  $\Delta T_{\uparrow}$  et  $T_{\downarrow}$  et de la densité moyenne de flux thermique  $\varphi_S$ . Indiquer les hypothèses nécessaires à la détermination expérimentale de cette conductivité thermique. Expliquer pourquoi ce dispositif fonctionne essentiellement pour des matériaux isolants.

Avec un dispositif similaire à celui qui est décrit à la figure 2, un laboratoire a mesuré la conductivité thermique de deux échantillons d'un isolant de laine de coton (ECOPEG Ouate 39 75 mm) fabriqué à partir de produits recyclés et disponible en magasin de bricolage. Les deux plaques échantillons avaient la même épaisseur  $e = 75,0$  mm. Pour une densité moyenne de flux thermique  $\varphi_S = 7,56$  W · m<sup>-2</sup>. Les mesures qui ont été effectuées sont données dans le tableau suivant :

	Température face chaude (°C)	Température face froide (°C)
Échantillon 1	17,4	2,5
Échantillon 2	17,5	2,5

**18.** Déterminer la conductivité thermique du matériau étudié. Commenter la valeur trouvée.

**19.** La capacité thermique massique de l'isolant précédent est de l'ordre de  $c_v = 1,5 \times 10^3$  J · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup> et sa masse volumique  $\mu = 1,8 \times 10^1$  kg · m<sup>-3</sup>. Déterminer l'ordre de grandeur de la durée d'établissement du régime stationnaire dans les plaques échantillons précédentes. Commenter.

## D. Dispositif des cylindres coaxiaux

Pour mesurer la conductivité d'un fluide, il est nécessaire d'envisager un autre type de dispositif expérimental. On considère, dans cette partie, un dispositif constitué de deux cylindres coaxiaux sans anneaux de garde, voir la figure 3. Il s'agit à nouveau d'une méthode de mesure en régime stationnaire mais dans une géométrie différente : on place un fluide entre deux surfaces cylindriques de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , de hauteur  $h_{tot}$  de même axe  $Oz$  et séparées par un faible intervalle. Un élément chauffant est placé dans le cylindre intérieur. On mesure la différence de température entre les deux cylindres à l'aide de thermocouples. Afin de minimiser les transferts thermiques par rayonnement, on choisit des matériaux de faible émissivité pour fabriquer les cylindres (l'argent, qui a une grande conductivité thermique, peut être un bon candidat).

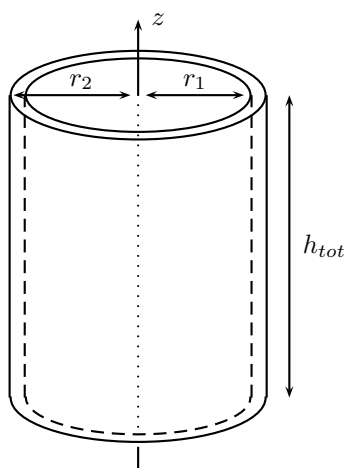


FIGURE 3 – Dispositif des cylindres coaxiaux.

**20.** Comparer les différents modes de transferts thermiques dans un fluide et un solide. On prendra soin de bien définir ces différents modes.

**21.** Pour comparer le transport diffusif de la chaleur avec le transport convectif de la chaleur dans un fluide, on peut introduire un nombre sans dimension appelé nombre de PÉCLET thermique faisant intervenir, la vitesse caractéristique  $V$  du transport convectif, la diffusivité  $D_{th}$  ainsi que la distance caractéristique de variation de l'écoulement  $\ell$ . Donner l'expression du nombre de PÉCLET, en le définissant comme le rapport du flux thermique convectif sur le flux thermique diffusif.

**22.** Expliquer l'intérêt d'utiliser un faible espacement annulaire entre les deux cylindres dans lequel on place le fluide. En pratique, cet espacement annulaire  $r_2 - r_1$  est typiquement compris entre 0,2 et 0,3 mm.

Dans la suite, on utilise les coordonnées cylindriques associées à l'axe de révolution  $Oz$  des cylindres.

**23.** En supposant le régime stationnaire, les effets de bord négligeables et en invoquant des propriétés de symétries, déterminer les paramètres dont dépend le champ scalaire de température  $T(M)$ .

**24.** La température de la surface cylindrique intérieure (en  $r = r_1$ ) est notée  $T_1$  et celle de la surface extérieure (en  $r = r_2$ ) est notée  $T_2$ . Il n'y a pas de production de chaleur entre les deux cylindres et on suppose que le régime stationnaire est établi. Établir une propriété du flux radial de chaleur  $\phi(r)$  traversant une surface cylindrique quelconque d'axe  $Oz$  et de rayon  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ). En déduire la forme générale du champ des températures entre les deux cylindres (si nécessaire, on introduira des constantes).

**25.** On suppose la température continue en  $r = r_1$  et  $r = r_2$ . En déduire la relation existant entre le flux de chaleur radial  $\phi(r)$  et la différence de température  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Définir la notion de résistance thermique dans cette géométrie et déterminer son expression.

Dans le dispositif expérimental utilisé :  $r_1 = 18,5$  mm et  $r_2 = 18,8$  mm. On détermine le flux de chaleur radial  $\phi(r)$ , produit par effet JOULE dans le cylindre interne, en connaissant la résistance chauffante d'une valeur  $R_{\text{chauf}} = 58,3 \Omega$  et la tension à laquelle elle est soumise  $U_{\text{chauf}} = 40,0$  V. On veut étudier la conductivité thermique d'une huile moteur (SAE 40) avec le dispositif décrit ici. On mesure  $T_1 = 32,9$  °C et  $T_2 = 28,2$  °C. La surface effective de chauffe sur le cylindre interne est  $S_{\text{eff}} = 2\pi r_1 h_{\text{tot}} = 1,33 \times 10^{-2}$  m<sup>2</sup>.

**26.** Déterminer littéralement puis numériquement la conductivité thermique de l'huile étudiée.

**27.** En supposant que les incertitudes prédominantes, sont celles sur la tension de chauffe ( $\Delta U_{\text{chauf}} = 0,5$  V) et celle sur la mesure de température ( $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0,2$  °C), déterminer l'incertitude relative sur la conductivité thermique précédente (toutes les incertitudes considérées ici sont des incertitudes élargies à 95%) puis présenter le résultat de la mesure et son incertitude élargie à 95% associée.

Avec ce dispositif, une grande variété de fluides peut être étudiée. En particulier ce dispositif a été utilisé pour étudier la conductivité thermique de l'eau et dans ce dernier cas, de grandes plages de température et de pression ont été explorées.

## E. La méthode Flash

Dans cette partie, le principe d'une méthode de mesure de diffusivité thermique d'un solide en régime dépendant du temps, introduite en 1960, va être présentée. Le schéma de principe de la méthode Flash est décrit sur la figure 4. Cette méthode consiste à soumettre la face avant d'un échantillon à faces parallèles à une impulsion de chaleur de courte durée, à l'aide de lampes de forte puissance (lampes flash) ou de lasers et à observer l'évolution temporelle de la température en un point de la face arrière à l'aide d'un thermocouple ou d'un détecteur de rayonnement (photodiode infrarouge). Cette méthode assez simple, s'est répandue dans les laboratoires de métrologie mais elle nécessite un certain nombre de précautions expérimentales pour atteindre une bonne précision.

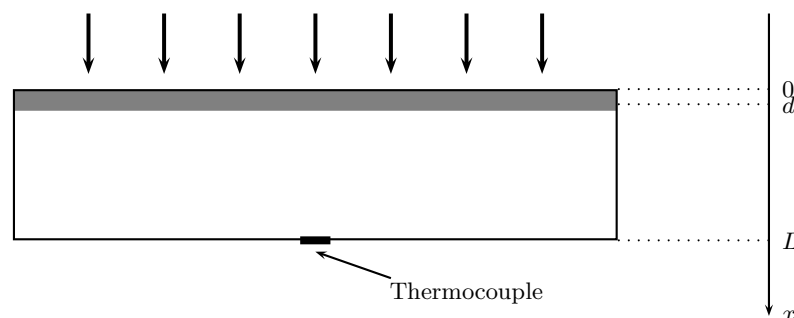


FIGURE 4 – Principe de la méthode Flash.

On suppose qu'à  $t = 0$ , l'excitation flash est infiniment brève dans le temps et uniforme sur la face avant. On va ensuite supposer que la chaleur se propage dans l'échantillon dans la direction  $Ox$  uniquement, et que les pertes thermiques sont négligeables (expérience adiabatique). On suppose l'échantillon homogène. On note  $L$  l'épaisseur totale de l'échantillon et  $d$  l'épaisseur de la couche de l'échantillon chauffée par l'impulsion lumineuse à l'instant initial.

À l'instant initial, on fait l'hypothèse que dans la fine couche d'épaisseur  $d$  de l'échantillon du côté de la face chauffée, la température subit une élévation instantanée  $\Delta T_0$ , tandis que dans le reste de l'échantillon, la température ne subit aucune modification, elle est uniforme et égale à la température  $T_i$ . Ainsi les conditions initiales peuvent s'écrire :

$$T(x, t = 0) = \Delta T_0 + T_i \text{ pour } 0 < x < d \quad \text{et} \quad T(x, t = 0) = T_i \text{ pour } d < x < L$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, on va supposer qu'aucune perte de chaleur ne se produit sur les faces avant et arrière de l'échantillon, supposées isolées thermiquement.

**28.** On cherche à connaître le champ de température  $T(x, t)$  au sein de l'échantillon. Écrire l'équation vérifiée par  $T(x, t)$  puis chercher une solution de cette équation sous la forme  $T(x, t) = T_i + f(x)g(t)$ . Déterminer la forme générale des fonctions  $f(x)$  et  $g(t)$  dans laquelle figurent des constantes qu'il reste à déterminer.

**29.** Écrire les conditions aux limites que doit vérifier le flux thermique en  $x = 0$  et  $x = L$  et en déduire des informations sur la solution générale précédente  $T(x, t)$ .

**30.** On cherche maintenant à trouver une solution de l'équation de diffusion qui vérifie non seulement les conditions aux limites mais également la condition initiale. Déterminer la forme générale du champ de température  $T(x, t)$  répondant à la question posée. On pourra utiliser la décomposition en série de FOURIER de la fonction paire  $2L$  périodique  $h(x)$  représentée sur la figure 5.

$$h(x) = \frac{d}{L}C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2d}{L}C \frac{\sin \frac{n\pi d}{L}}{\frac{n\pi d}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

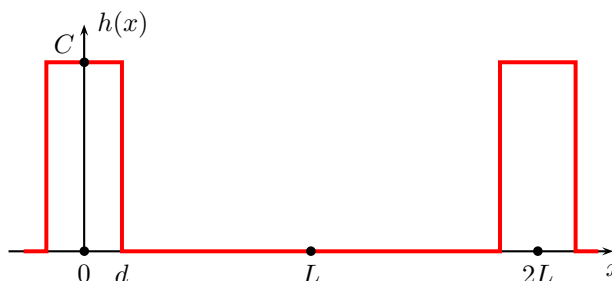


FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction  $h(x)$ .

**31.** Pour des temps infiniment longs, déterminer la température d'équilibre  $T_{eq}$  de l'échantillon. Commenter.

**32.** Si on suppose que l'épaisseur  $d$  est suffisamment petite pour faire des calculs à l'ordre le plus bas non nul en  $d/L$ , montrer que la température sur la face arrière de l'échantillon peut s'exprimer de la manière suivante :

$$T(L, t) \simeq T_i + (T_{eq} - T_i) \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp \left( -D_{th}t \left( \frac{k\pi}{L} \right)^2 \right) \right]$$

**33.** Simplifier au maximum l'expression précédente pour des temps longs. À l'aide de l'expression obtenue, déterminer le temps  $t_{1/2}$  pour lequel la variation de la température sur la face arrière  $T(L, t) - T_i$  atteint la moitié de sa valeur maximale à l'équilibre  $T_{eq} - T_i$ .

Sur la figure 6 est représentée une courbe expérimentale obtenue avec la méthode flash. L'échantillon étudié, à base d'oxyde d'aluminium (pureté 99,8%) a pour épaisseur  $L = 2,0$  mm. L'expérience a été réalisée à une température moyenne de  $200$  °C. En ordonnée, figure le signal du capteur, délivrant une tension qui est une fonction affine de la température (en °C). Le pic situé entre  $0 < t < 0,1$  s correspond à l'instant où le flash est envoyé.



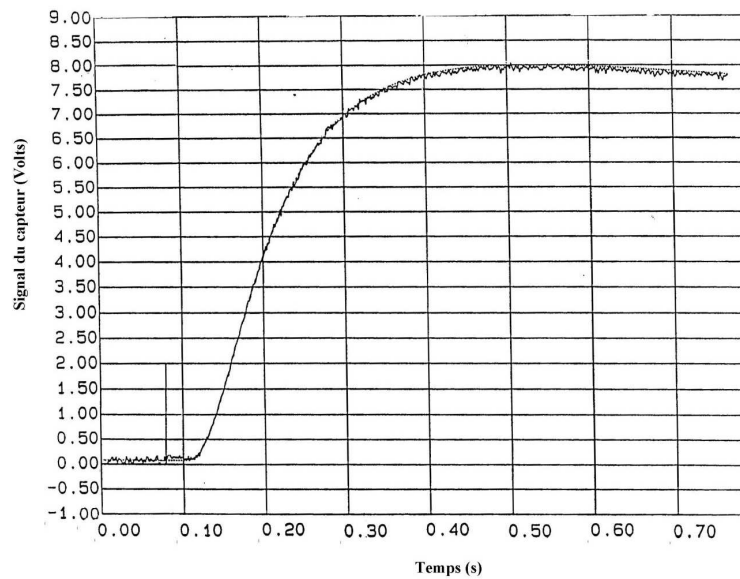


FIGURE 6 – Tracé expérimental de  $T(L, t)$  pour de l'oxyde d'aluminium.

**34.** Commenter la forme de la courbe expérimentale de la figure 6 et en particulier en la comparant à celle attendue théoriquement (il sera intéressant de se demander si une ou plusieurs hypothèses formulées dans le modèle ne sont pas remises en question au vu de la courbe).

**35.** Déterminer la diffusivité thermique de l'échantillon.

**36.** Citer des sources d'erreurs majeures responsables des incertitudes de la méthode de mesure de diffusivité thermique décrite dans cette partie. Citer également des avantages de cette méthode.

**37.** En appliquant le premier principe de la Thermodynamique à l'échantillon étudié au cours du processus de mesure, proposer une méthode de mesure de la capacité thermique  $C$  de l'échantillon. Expliquer l'intérêt d'une telle mesure.