

Devoir de Sciences Physiques n°5 pour le 06-01-2025

Problème n° 1 – Systèmes de particules

ENS Ulm PC 2024

Consignes et indications générales

- On néglige la gravité dans tout le sujet.
- Aucune question ne fait appel à la mécanique quantique.
- La justification des réponses et des étapes de raisonnement est prise en compte dans la notation.
- Pour les questions ouvertes appelant une justification ou une discussion, la longueur de la réponse attendue est entre quelques mots et quelques lignes (mais les réponses plus longues ne sont pas sanctionnées).
- Il est parfois demandé de vérifier que l'on retrouve une expression déjà obtenue dans une question précédente, ce qui peut aider à détecter et corriger d'éventuelles erreurs.

Notations et conventions

- $(Oxyz)$ est un repère orthonormé, fixe dans le référentiel du laboratoire considéré comme un référentiel galiléen. Les vecteurs unitaires associés sont notés $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- Élément de volume : $d\tau = dx dy dz$.
- Norme d'un vecteur : $A = \|\vec{A}\|$.
- \dot{f} désigne la dérivée temporelle $\frac{df}{dt}$ d'une fonction $f(t)$ et $\ddot{f} = \frac{d^2f}{dt^2}$.
- Pour une fonction $f(\vec{r})$ qui ne dépend pas de la direction de \vec{r} , on pourra noter $f(r)$ au lieu de $f(\vec{r})$.
- Positif signifie supérieur ou égal à zéro.

Formulaire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \text{div} (f \vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{A} + f \text{div } \vec{A} \end{aligned}$$

Données numériques

Masse molaire du lithium 6 : $M(^6\text{Li}) = 6,02 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Constante d'AVOGADRO : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$k = 1,02 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$

$\sigma = 60 \text{ } \mu\text{m}$

Introduction

On appelle *système de particules en interaction* un système composé de N particules interagissant entre elles. Il peut s'agir par exemple de molécules dans un gaz ou un liquide, d'électrons et d'ions dans un plasma, ou encore d'étoiles dans une galaxie. D'ordinaire, ces systèmes ont les caractéristiques suivantes. Dès que $N > 2$, il est impossible d'obtenir des résultats exacts sur l'évolution en fonction du temps des positions des N particules par des calculs analytiques, c'est-à-dire sans utiliser de simulations numériques. Cependant, lorsque N est grand, le comportement du système devient plus simple à décrire. Au bout d'un certain temps, le système atteint un état d'équilibre, décrit par la thermodynamique ou la statique des fluides. Ceci est vrai même si le système n'échange pas de chaleur avec son environnement. Pour décrire cet état d'équilibre aux échelles macroscopiques ou mésoscopiques, il suffit de connaître quelques fonctions qui relient entre elles des grandeurs thermodynamiques telles que la pression, la température ou l'énergie interne. La détermination de ces fonctions nécessite de construire des tableaux de données à partir de mesures expérimentales ou de simulations numériques (à la différence d'un gaz parfait, pour lequel ces fonctions ont des expressions connues). De plus, l'évolution d'un fluide en fonction du temps peut être décrite par la mécanique des fluides, qui fait intervenir quelques grandeurs supplémentaires telles que la viscosité dynamique. Ces grandeurs (appelées coefficients de transport) sont des fonctions des grandeurs thermodynamiques, et la détermination de ces fonctions nécessite là encore de construire des tableaux de données à partir d'expériences ou de simulations numériques.

A. Un atome dans un piège optique

Dans cette partie, on considère un atome de masse m , de vecteur position $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. L'atome est soumis à une force conservative \vec{F} . On note $U(\vec{r})$ l'énergie potentielle associée à cette force \vec{F} .

1. Dans cette question on suppose que U est de la forme :

$$U(\vec{r}) = U(r) = U_0 + \frac{1}{2}kr^2$$

où U_0 et k sont des constantes et $k > 0$. On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Montrer que chacune des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ vérifie une équation différentielle.

2. On note $\vec{v}(0)$ la vitesse de l'atome à $t = 0$. Exprimer $\vec{r}(t)$ en fonction de t , ω , $\vec{r}(0)$ et $\vec{v}(0)$.

Dans la suite de cette partie, on considère que la force \vec{F} est due à l'effet de faisceaux laser, et on admet que l'énergie potentielle est :

$$U(\vec{r}) = -\gamma \langle \|\vec{E}(\vec{r}, t)\|^2 \rangle$$

où γ est une constante strictement positive, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est le champ électrique, et $\langle \|\vec{E}(\vec{r}, t)\|^2 \rangle$ désigne la moyenne temporelle (aussi appelée moyenne dans le temps) de $\|\vec{E}(\vec{r}, t)\|^2$ à \vec{r} fixé. On utilise simultanément trois faisceaux laser. On admet que les champs électriques associés à chacun des trois faisceaux sont :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}, t) &= a(y, z) \cos(qx - \Omega t + \varphi_1) \vec{e}_y \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) &= a(x, z) \cos(qy - \Omega t + \varphi_2) \vec{e}_z \\ \vec{E}_3(\vec{r}, t) &= a(x, y) \cos(qz - \Omega t + \varphi_3) \vec{e}_x\end{aligned}$$

où la fonction a est définie par :

$$a(X, Y) = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{\sigma^2}\right)$$

et où \mathcal{E} , σ , q , Ω , φ_1 , φ_2 et φ_3 sont des paramètres constants, avec \mathcal{E} , σ , q et Ω strictement positifs.

3. Pour chacun des trois faisceaux, indiquer la direction et le sens de propagation ainsi que la polarisation de la lumière correspondants.

4. Exprimer $U(\vec{r})$ en fonction de x , y , z , γ , \mathcal{E} et σ .

5. Montrer que si $r \ll \sigma$, alors :

$$U(\vec{r}) - U(\vec{0}) \simeq \frac{1}{2}kr^2$$

où l'on exprimera k en fonction de γ , \mathcal{E} et σ .

6. On considère un atome de lithium 6. On fait l'hypothèse, que pour décrire le mouvement de l'atome, on peut remplacer $U(\vec{r})$ par son expression approchée de la question précédente. Déterminer la valeur numérique de la période du mouvement τ avec un chiffre significatif.

7. En $t = 0$, l'atome se trouve à l'origine avec une vitesse $v(0) = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. L'hypothèse faite à la question précédente est-elle légitime ?

8. Dans toute cette question, on considère une situation où les polarisations des faisceaux ne sont pas parfaitement contrôlées, tandis que les phases φ_1 , φ_2 et φ_3 sont toujours fixées. Citer un effet qui apparaît alors et qui modifie le résultat obtenu à la question **4.**. Proposer une modification des caractéristiques des faisceaux permettant d'éliminer cet effet et de retrouver le résultat de la question **4.**. On pourra répondre brièvement et sans calculs.

B. Une particule soumise à une force $\alpha/x^3 - kx$

Dans cette partie, on considère une particule de masse m se déplaçant à une dimension le long de la demi-droite (Ox) , de sorte que son vecteur position est $\vec{r} = c\vec{e}_x$ avec $x > 0$. La particule est soumise à une force $\vec{F} = F_x\vec{e}_x$ avec $F_x = \frac{\alpha}{x^3} - kx$, où α et k sont des constantes strictement positives.

9. Montrer que la force \vec{F} est conservative, et que l'énergie potentielle correspondante s'écrit :

$$U(x) = \frac{A}{x^2} + Bx^2 + C$$

où C est une constante arbitraire et où l'on exprimera A et B en fonction de α et k . Dans la suite, on prend $C = 0$.

10. On pose $g = x^2$, et on note E l'énergie mécanique de la particule. Exprimer $m\dot{g}$ en fonction de E , g et k .

11. On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $g_0 = g(t = 0)$ et $h_0 = \dot{g}(t = 0)$. En résolvant l'équation différentielle trouvée à la question précédente, exprimer $g(t)$ en fonction de t , g_0 , h_0 , ω et $\frac{E}{k}$.

Dans la suite, la particule est lâchée à $t = 0$ en $x = x_0$ avec une vitesse nulle.

12. Exprimer $x(t)$ en fonction de t , ω , $\frac{\alpha}{k}$ et x_0 . Exprimer la période de $x(t)$ en fonction de ω .

13. Commenter brièvement le fait que la période est indépendante de l'amplitude.

14. On note x_{\min} et x_{\max} les valeurs minimale et maximale de la fonction $x(t)$. À partir de l'expression de $x(t)$ obtenue à la question **12.**, tracer l'allure de $x^2(t)$ en fonction de t , et exprimer x_{\min} et x_{\max} en fonction de x_0 et $\frac{\alpha}{k}$. On distinguera entre les cas $x_0 > x_c$ et $x_0 < x_c$, où x_c est une grandeur que l'on exprimera en fonction de $\frac{\alpha}{k}$.

15. Tracer l'allure de $U(x)$. Par une approche énergétique, vérifier la validité des expressions de x_c , x_{\min} et x_{\max} .

C. N particules interagissant par une force en $1/r^3$

Dans cette partie, on considère N particules ponctuelles de masse m se déplaçant dans l'espace à trois dimensions. On note \vec{r}_i le vecteur position de la particule i , où l'entier i est compris entre 1 et N . Les forces en jeu sont les suivantes :

- Chaque particule est soumise à une force extérieure conservative. On note $U_{ext}(\vec{r})$ l'énergie potentielle associée, aussi appelée potentiel extérieur. La force extérieure subie par la particule i est notée $\vec{F}_{ext,i}$.
- Les particules interagissent entre elles. Chacune des N particules exerce une force sur chacune des $N - 1$ autres particules. La force d'interaction exercée par la particule j sur la particule i , notée $\vec{F}_{j \rightarrow i}$, est supposée telle que :
 - sa direction est celle de la droite joignant les particules i et j ,
 - son sens correspond à une répulsion entre les particules,
 - sa norme est inversement proportionnelle au cube de la distance entre les particules, soit $\|\vec{F}_{j \rightarrow i}\| = \frac{\alpha}{r_{ij}^3}$,
 où α est un paramètre constant positif et r_{ij} la distance entre les particules i et j .

On note \mathcal{S}_i l'ensemble des entiers différents de i compris 1 et N , soit $\mathcal{S}_i = \{1; 2; \dots; N\} \setminus \{i\}$. Pour désigner la somme sur les entiers i et j compris entre 1 et N tels que $i \neq j$, on utilise la notation concise $\sum_{i \neq j}$ au lieu de

$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{S}_i}$. On note E_{cin} l'énergie cinétique totale du système constitué des N particules. On définit les grandeurs :

$$E_{ext} = \sum_{i=1}^N U_{ext}(\vec{r}_i) \quad \text{et} \quad E_{int} = \frac{\alpha}{4} \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}^2}$$

On admettra que $E = E_{cin} + E_{ext} + E_{int}$ est une constante du mouvement (E est l'énergie mécanique totale du système des N particules).

Potentiel extérieur quelconque

Dans cette sous-partie, on ne fait aucune hypothèse concernant la forme du potentiel extérieur $U_{ext}(\vec{r})$.

16. Écrire l'expression reliant $\vec{F}_{ext,i}$ à la fonction U_{ext} .

17. Exprimer $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ en fonction de \vec{r}_i , \vec{r}_j , r_{ij} et α .

On pose :

$$G = \sum_{i=1}^N r_i^2$$

où $r_i^2 = \|\vec{r}_i\|^2$.

18. Exprimer $m\ddot{G}$ en fonction de $E_{cin} + E_{int}$ et de $\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ext,i}$.

Potentiel extérieur harmonique

Dans cette sous-partie, on considère le cas d'un potentiel extérieur de la forme $U_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2$ avec k une constante strictement positive. On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

19. Montrer que $G(t)$ vérifie la même équation différentielle que celle obtenue pour $g(t)$ à la question **10.**. En déduire l'expression de $G(t)$ en fonction de t , ω , $\frac{E}{k}$, et des grandeurs $G_0 = G(t=0)$ et $H_0 = \dot{G}(t=0)$.

20. Dans cette question, on considère le cas où $\alpha = 0$. En utilisant le résultat de la question **2.**, exprimer $G(t)$ en fonction de t , de ω , des $\vec{r}_i(0)$ et des $\vec{v}_i(0)$. Vérifier que cette expression de $G(t)$ est équivalente à celle obtenue à la question **19.**

21. Dans le cas où α est non nul, donner des raisons pour lesquelles le résultat trouvé pour $G(t)$ à la question **19.** est une propriété extraordinaire, dans le défini dans l'introduction du sujet.

Boîte sphérique

Dans cette sous-partie, on considère la situation suivante :

- Les N particules sont enfermées dans une boîte sphérique de rayon ℓ centrée à l'origine. La paroi de la boîte est donc l'ensemble des points de vecteur position \vec{r} tel que $r = \ell$ (la paroi étant considérée comme infiniment fine, pour simplifier la discussion).
- $\vec{F}_{ext,i}$ est la force exercée par la paroi de la boîte sur la particule i .
- Le potentiel extérieur correspondant U_{ext} vérifie les propriétés suivantes (on ne s'intéresse qu'à l'intérieur de la boîte, soit $r < \ell$) :

- (a) $U_{ext}(\vec{r}) = U_{ext}(r)$ ne dépend pas de la direction de \vec{r} .
- (b) $U_{ext}(r) = 0$ pour $\ell - r$ supérieur à une certaine longueur ℓ_* qui vérifie $\ell_* \ll \ell$
- (c) $U_{ext}(r)$ est une fonction croissante et continue de r
- (d) $U_{ext}(r) \rightarrow +\infty$ pour $r \rightarrow \ell$

22. Tracer l'allure de la fonction $U_{ext}(r)$.

Dans la suite, on note $\langle f \rangle$ la moyenne temporelle sur une durée infiniment longue d'une grandeur dépendante du temps $f(t)$, soit :

$$\langle f \rangle = \lim_{t_{\max} \rightarrow \infty} \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} f(t) dt$$

Ainsi $\langle \ddot{G} \rangle$ désigne la moyenne temporelle sur une durée infiniment longue de $\ddot{G}(t)$.

23. Montrer que $|\dot{G}(t)| \leq D$ où D est une quantité indépendante de t dont on donnera l'expression. En déduire que $\langle \ddot{G} \rangle = 0$.

Dans la suite, on considère une boîte de taille macroscopique contenant un grand nombre de particules. On admet que le système des N particules peut être considéré comme un fluide à l'équilibre, et on note P la pression du fluide au niveau de la paroi.

24. Justifier en quelques mots le fait que la valeur de P est la même en tout point de la paroi.

25. Pourquoi peut-on considérer que $\ell_* \ll \ell$? On attend une réponse brève, sans calcul ni estimation d'ordre de grandeur.

26. On note \vec{e}_i le vecteur unitaire $\frac{\vec{r}_i}{r_i}$. Exprimer $\vec{F}_{ext,i}$ en fonction de \vec{e}_i et de $F_{ext,i} = \|\vec{F}_{ext,i}\|$.

27. On définit une surface Σ et un volume \mathcal{R} comme suit, voir la figure 1 :

- Σ est une petite portion de la paroi. La forme de Σ est approximativement un carré de côté ℓ_Σ , avec $\ell_\Sigma \ll \ell$.
- \mathcal{R} est l'ensemble des points M dont le vecteur position est de la forme $\overrightarrow{OM} = u\overrightarrow{OM'}$ avec $M' \in \Sigma$ et u compris entre 0 et 1.

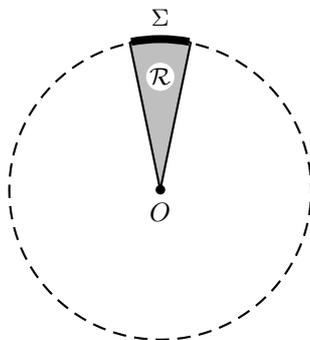


FIGURE 1 – Vue en coupe dans un plan passant par l’origine O , montrant l’intersection de ce plan avec la paroi de la boîte (cercle tireté), avec la surface Σ (arc de cercle en trait continu épais), et avec le volume \mathcal{R} (zone grisée)

On note $\vec{F}_{ext,\mathcal{R}}$ la force exercée par la paroi sur le fluide contenu dans \mathcal{R} . Donner une expression simple de $\vec{F}_{ext,\mathcal{R}}$ faisant apparaître P . Indiquer une condition sur ℓ_Σ (en plus de $\ell_\Sigma \ll \ell$) pour que cette expression soit valable.

28. On note $\mathcal{S}_\mathcal{R}$ l’ensemble des entiers i appartenant à $\{1; 2; \dots; N\}$ tels que la particule i est située dans la région \mathcal{R} . En utilisant le résultat obtenu à la question précédente, obtenir une expression approchée simple de $\sum_{i \in \mathcal{S}_\mathcal{R}} F_{ext,i}$ faisant apparaître P .

29. En déduire une expression approchée simple de $\sum_{i=1}^N F_{ext,i}$ faisant apparaître P .

30. On identifie la moyenne temporelle $\langle E_{cin} + E_{int} \rangle$ avec l’énergie interne U du fluide. Montrer que :

$$U \simeq \frac{3}{2}PV$$

où V est le volume de la boîte. On utilisera notamment les résultats de la question précédente et de la question 18..

31. Dans le cas où $\alpha = 0$, montrer directement que $U = \frac{3}{2}PV$ en utilisant des relations thermodynamiques connues et sans utiliser les résultats des questions précédentes.

Problème n° 2 – SO₂ atmosphérique

Concours Général 2023

Problème à remettre à votre camarade prévu dans DMscope pour une correction croisée, retour de la correction croisée le 10/01 au plus tard.

Ce sujet a été adapté.

Le dioxyde de soufre gazeux, de formule SO_{2,gaz}, est rejeté dans l’atmosphère par diverses sources (voir la figure 2). Les sources naturelles d’émission de SO_{2,gaz} correspondent principalement à l’activité volcanique. Les sources anthropiques sont, pour beaucoup, liées à la combustion des énergies fossiles - charbon et pétrole - contenant du soufre pour le chauffage domestique, la production d’électricité ou les véhicules à moteur.

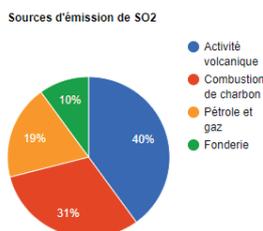


FIGURE 2 – Principales sources d’émission de dioxyde de soufre atmosphérique

À l’échelle locale, la libération de grandes quantités de SO_{2,gaz} (associées à une forte concentration en particules fines) dans les zones industrielles a été liée à une augmentation des pathologies respiratoires et un excès de

mortalité a été identifié. À l'échelle globale, lors de forts épisodes volcaniques, de grandes quantités de $\text{SO}_{2\text{gaz}}$ ont été directement introduites dans la stratosphère conduisant à la formation d'une couche d'aérosols sulfatés. La présence de ces aérosols modifie le bilan radiatif terrestre. Enfin, ces aérosols sulfatés ont aussi un effet indirect, servant de noyaux de condensation et affectant ainsi la structure des nuages. Mesurer la concentration en $\text{SO}_{2\text{gaz}}$, à l'échelle locale comme à l'échelle globale, constitue donc un enjeu important. À l'échelle locale, ces mesures permettront aux autorités politiques et sanitaires de contrôler la qualité de l'air et, par exemple, d'adopter, le cas échéant, des mesures de santé publique. À l'échelle globale, ces mesures permettront aux scientifiques d'alimenter les modèles permettant de comprendre l'évolution du système atmosphérique et son impact sur le climat.

Données :

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante de FARADAY : $\mathcal{F} = e \times \mathcal{N}_A = 9,65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ où e est la charge élémentaire et \mathcal{N}_A la constante d'AVOGADRO
- Masse molaire de l'air : $M_a = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'hélium : $M_h = 4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'ion sulfate SO_4^{2-} : $M_{\text{SO}_4^{2-}} = 96,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire du dioxyde de soufre SO_2 : $M_{\text{SO}_2} = 64,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire du borax : $M_{\text{borax}} = M_{\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}} = 381,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante de STEFAN-BOLTZMANN : $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Température moyenne de surface de la Terre : $T_T = 2889 \text{ K}$
- Couples oxydant/réducteur (les espèces sont supposées solubilisées en solution aqueuse) : O_3/O_2 , I_2/I^- , I_3^-/I^- , $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$, $\text{SO}_4^{2-}/\text{H}_2\text{SO}_3$, $\text{SO}_4^{2-}/\text{HSO}_3^-$ et $\text{SO}_4^{2-}/\text{SO}_3^{2-}$.
- pK_A à 25°C de quelques couples acide/base : $pK_A(\text{H}_2\text{SO}_3/\text{HSO}_3^-) = 1,8$, $pK_A(\text{HSO}_3^-/\text{SO}_3^{2-}) = 7,2$, $pK_A(\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-) = 6,7$, $pK_A(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$ et $pK_A(\text{H}_3\text{BO}_3/\text{B}(\text{OH})_4^-) = 9,2$

A. Sonder l'atmosphère avec un ballon

Des ballons-sonde sont régulièrement envoyés dans l'atmosphère pour déterminer, in situ, les propriétés physico-chimiques de l'atmosphère : ils permettent entre autres la mesure de la pression, de la température, de l'humidité, des concentrations en espèces variées en fonction de l'altitude. Pour ce faire, le ballon doit être convenablement préparé pour se déplacer verticalement aux vitesses désirées et atteindre un plafond compatible avec les mesures envisagées.

Préparation et décollage du ballon-sonde stratosphérique (B.S.O.) Spirale

Un ballon-sonde stratosphérique (B.S.O.) est, entre autres, composé :

- d'une enveloppe souple de très grande dimension par rapport au volume d'hélium qu'elle contient initialement, de volume maximal V_{max} , ouverte sur l'extérieur par des manches d'évacuation situés à la base du ballon,
- d'un parachute permettant de ralentir la descente du ballon à la fin de la mission,
- d'une nacelle de servitude (contenant le système de télécommunication, de positionnement, GPS...),
- d'une nacelle scientifique contenant les capteurs embarqués (de température, de pression, d'humidité, de concentrations...)

Dans toute la suite, le volume du ballon est assimilé au volume d'hélium contenu dans son enveloppe souple et l'atmosphère est supposée au repos (pas de vent).

Les caractéristiques du B.S.O. SPIRALE lancé depuis la base de Kiruna, le 9 août 2009 :

- Volume initial du ballon : $V_0 = 1,08 \times 10^4 \text{ m}^3$
- Volume maximal du ballon atteint au cours du vol : $V_{\text{max}} = 1,96 \times 10^5 \text{ m}^3$
- Masse d'hélium initialement présente dans l'enveloppe du ballon m_h
- Masse totale du ballon m_b hors hélium (m_b comprend les masses de l'enveloppe du ballon, du parachute de descente, de la nacelle de servitude et de la nacelle scientifique) : $m_b = 1,20 \times 10^3 \text{ kg}$.

L'hélium contenu dans l'enveloppe du ballon et l'air atmosphérique sont tous deux assimilés à un gaz parfait, de masses molaires respectives M_h et M_a et de masses volumiques respectives $\rho_h(z)$ et $\rho_a(z)$ à l'altitude z . L'enveloppe du ballon étant ouverte sur l'extérieur via les manches d'évacuation, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à celle qui règne à l'extérieur.

1. On suppose ici qu'un équilibre thermique est assuré à chaque instant entre l'hélium et l'air extérieur. Établir la relation suivante :

$$\frac{\rho_h(z)}{\rho_a(z)} = \frac{M_h}{M_a}$$

2. On donne la masse volumique de l'air au niveau du sol : $\rho_a(z = 0) = \rho_0 = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Déduire de la question précédente la masse d'hélium m_h initialement présente dans l'enveloppe du ballon.

3. Expliquer l'origine de la poussée d'ARCHIMÈDE et donner son expression à l'altitude z .

4. Établir la condition pour que le ballon puisse s'élever dans les airs depuis sa base de lancement. En déduire l'expression littérale du volume minimal $V_{0,\text{min}}$ du ballon au décollage en fonction de m_b , ρ_0 , M_a et M_h . Faire l'application numérique et conclure.

Après décollage, le ballon évolue dans une atmosphère dont la pression et la température varient avec l'altitude. Pour comprendre la dynamique de la phase de montée du ballon, il est nécessaire de caractériser au préalable les propriétés physiques des couches atmosphériques rencontrées.

Modélisation des propriétés physiques de la troposphère et la basse stratosphère

La figure 3 propose six enregistrements des profils verticaux de température. Une modélisation peut être proposée pour l'ensemble de ces expériences.

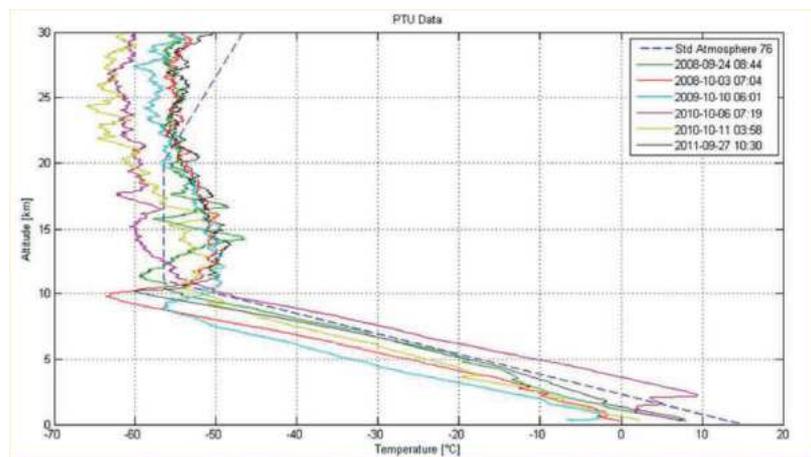


FIGURE 3 – Profils verticaux de température enregistrés lors de l'envoi de différents ballons-sonde et modélisation proposée

Sur ces relevés, on distingue deux couches atmosphériques distinctes : la troposphère ($0 \leq z \leq 12 \text{ km}$) caractérisée par une décroissance de la température avec l'altitude, puis la basse stratosphère ($12 \leq z \leq 30 \text{ km}$) pour laquelle la température stagne :

$$T(z) = T_0 - bz \quad \text{pour } 0 \leq z \leq 12 \text{ km} \quad \text{puis} \quad T(z) = T_1$$

avec $T_0 = 288 \text{ K}$, $b = 5,9 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ et $T_1 = 217 \text{ K}$. La pression en $z = 0$ est $P_0 = 101\,325 \text{ Pa}$.

5. Montrer que la loi d'évolution de la pression avec l'altitude est :

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{b}{T_0} z \right)^\alpha$$

Donner l'expression de α en fonction de M_a , g , R et b . Dans la suite, on prendra $\alpha = 5,8$.

6. En déduire l'expression littérale de la masse volumique de l'air $\rho_a(z)$ à l'altitude z .

On suppose que les basses couches de la stratosphère sont caractérisées par une température constante égale à $T_1 = 217 \text{ K}$.

7. Établir l'expression de la pression $P(z \leq z_1)$ en fonction de $P_1 = P(z_1)$, de z , z_1 et d'une hauteur H caractéristique que l'on exprimera en fonction de M_a , R , T_1 et g .

8. En déduire l'expression littérale de la masse volumique de l'air $\rho_a(z)$ dans la basse stratosphère en fonction de z , z_1 , P_1 , T_1 , M_a , R et H .

Plafond atteint par le ballon-sonde

On considère, dans un premier temps, le début de la phase de montée du ballon-sonde durant laquelle la masse d'hélium contenue dans le ballon reste constante. On rappelle que les manches d'évacuation du ballon permettent que les pressions intérieure et extérieure au ballon soient égales. On suppose que l'équilibre thermique est assuré entre l'air extérieur et l'hélium à chaque instant.

9. Montrer que, dans ces conditions, le volume $V(z)$ du ballon peut s'écrire :

$$V(z) = \frac{m_h M_a}{M_h \rho_a(z)}$$

10. En s'appuyant sur la relation précédente, préciser qualitativement comment évolue $V(z)$ avec l'altitude.

On donne à la figure 4 les représentations graphiques des modélisations de la pression et de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude dans la troposphère et la basse atmosphère. On pourra venir lire sur ces graphes des valeurs numériques utiles pour répondre aux questions qui suivent.

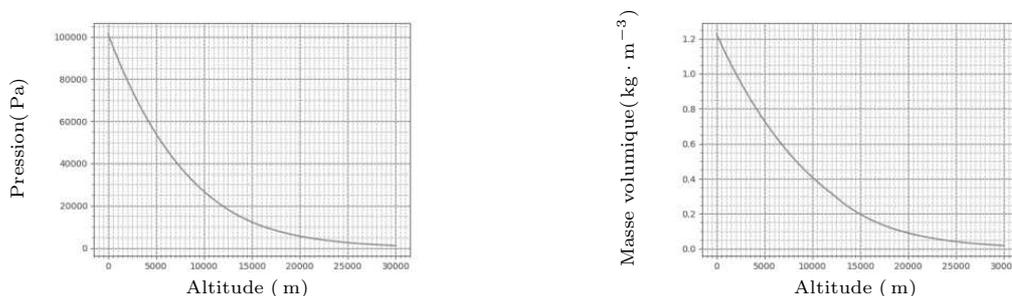


FIGURE 4 – Modélisation de l'évolution de la pression et de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude z .

11. Montrer que le ballon n'atteint pas son volume maximal dans la troposphère.

12. Déterminer l'altitude z_2 à laquelle le volume maximal V_{\max} du ballon est atteint. Préciser dans quelle couche atmosphérique se situe cette altitude.

13. Comparer les normes des vecteurs poids et poussée d'ARCHIMÈDE à l'altitude z_2 et conclure sur le mouvement du ballon-sonde au voisinage de z_2 .

Pour la suite du mouvement, le volume du ballon reste égal à V_{\max} et de l'hélium s'échappe du ballon via les manches d'évacuation situées sous le ballon. Le ballon finit par atteindre une position d'équilibre à une altitude maximale z_{\max} .

14. Établir l'expression littérale de la masse volumique de l'air $\rho_a(z_{\max})$ à cette altitude en fonction de m_b , M_a , M_h et V_{\max} . Faire l'application numérique.

Un profil de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude pour $z \in [32; 42]$ km permet d'établir un modèle d'évolution de la température avec l'altitude, pour la haute stratosphère. Il permet de construire l'évolution attendue pour la masse volumique de l'air $\rho_a(z)$ à la figure 5.

15. En s'appuyant sur la figure 5, déduire l'altitude maximale du vol, appelée plafond, prévue par le modèle. On la notera $z_{\max,ref}$. La comparer, à l'aide d'un critère quantitatif que l'on explicitera, à la valeur expérimentale mesurée au cours du vol du ballon Spirale : $z_{\max,mes} = 34,25$ km, incertitude-type associée : $u(z_{\max,mes}) = 0,20$ km. Conclure.

Vitesse de croisière dans la troposphère

La figure 6 fournit un enregistrement temporel de l'altitude et de la vitesse verticale du ballon-sonde Spirale, lancé depuis la base de Kiruna, le 7 août 2009.

16. À l'aide de l'enregistrement réalisé lors du vol du ballon-sonde Spirale (voir la figure 6), caractériser le mouvement du ballon, durant la phase 2, dans la troposphère.

On propose ici un modèle pour prévoir la vitesse d'ascension du ballon dans la troposphère. Le ballon s'élève du fait de la poussée d'ARCHIMÈDE. Il va subir au cours de son ascension une force de frottements fluides de

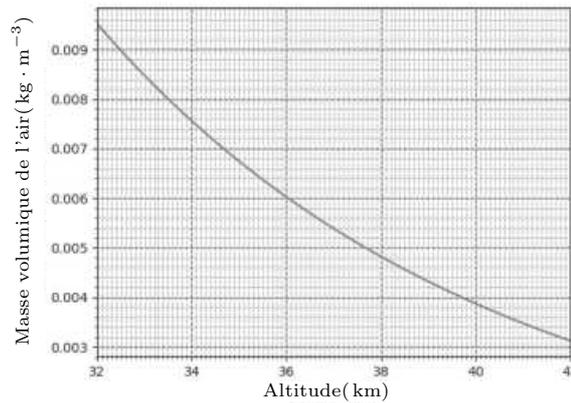
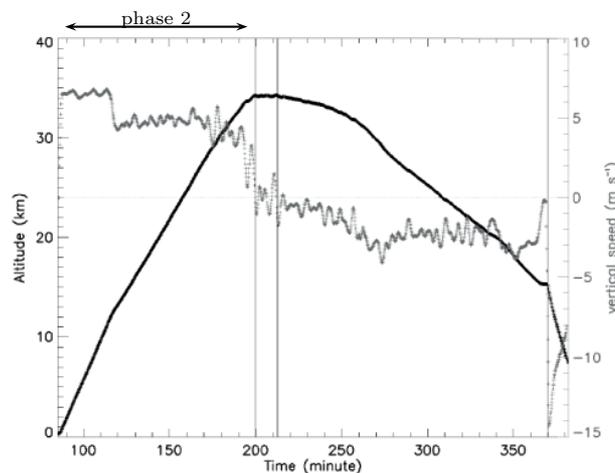
FIGURE 5 – Modélisation de l'évolution de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude z .

FIGURE 6 – Enregistrement temporel de l'altitude (en noir) et de la vitesse verticale (en gris) du B.S.O.

la forme $\vec{F} = -k(z)v^2\vec{e}_z$ avec $k(z)$ un facteur positif dépendant a priori de l'altitude z , v la vitesse verticale du ballon dans le référentiel terrestre et \vec{e}_z un vecteur unitaire constant. On fait l'hypothèse que le facteur $k(z)$ est constant dans le domaine $z \in [0; 12 \text{ km}]$ et de valeur égale à $k_0 = 2,05 \times 10^3 \text{ SI}$. L'étude est faite dans une atmosphère supposée au repos (pas de vent horizontal en particulier), dans le référentiel terrestre que l'on supposera galiléen.

17. Établir l'expression littérale de la vitesse limite $v_{t,ref}$ prévue pour le ballon-sonde dans la troposphère. Faire l'application numérique.

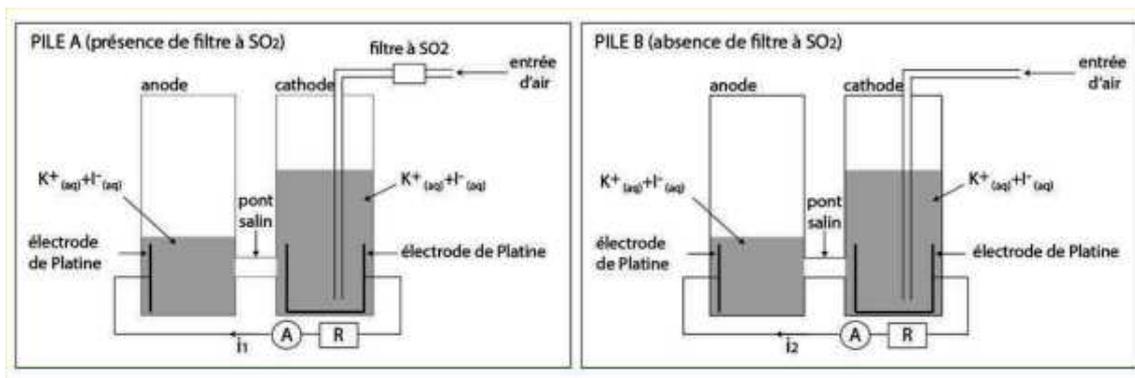
18. La vitesse d'ascension du ballon dans la troposphère a pu être mesurée expérimentalement au cours du vol du ballon-sonde Spirale $v_{t,mes} = 6,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, incertitude-type $u(v_{t,mes}) = 0,23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Comparer la valeur de référence $v_{t,ref}$ à la mesure expérimentale $v_{t,mes}$ à l'aide d'un critère quantitatif que l'on explicitera et conclure.

B. Mesure du profil vertical de la concentration en SO_{2gaz}

Les mesures de la concentration en SO_{2gaz} en fonction de l'altitude peuvent être conduites à l'aide d'un capteur, embarqué par un ballon-sonde. Ce capteur a été mis au point en 2009 par l'équipe G.A. Morris. Il calcule la concentration en SO_{2gaz} par la différence entre les intensités du courant débité dans deux piles. Voir la figure 7.

Chaque pile (A ou B) compte deux demi-piles en Teflon, l'une constitue l'anode, l'autre la cathode, toutes deux reliées par un pont salin. Chacun des demi-piles contient une électrode de platine, chacune immergée dans des solutions de iodure de potassium ($\text{K}^+ + \text{I}^-$) de concentrations différentes. Une pompe, de débit volumique \mathcal{D}_v en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, introduit un flux d'air dans la demi-pile servant de cathode. Ce flux d'air contient de l'ozone O_3 et du dioxyde de soufre SO_2 tel que la concentration en O_3 soit très supérieure à celle en SO_2 . La différence entre les piles A et B est la présence d'un filtre à SO_2 entre l'entrée d'air et la cathode dans le cas de la pile A : le SO_2 est ainsi piégé par le filtre et seul l'ozone atteint la cathode pour la pile A.

Dans un premier temps, l'ozone O_3 se dissout et réagit totalement en solution avec les ions I^- , présents en excès, pour former du dioxygène O_2 et du diiode I_2 . Dans un second temps, le diiode I_2 formé est converti en I^- à la

FIGURE 7 – Présentation des deux piles intégrées dans le capteur de $\text{SO}_{2\text{gaz}}$

surface de l'électrode de platine de la cathode. Pour ce faire, des électrons circulent depuis l'anode via le circuit extérieur du fait de la transformation, au niveau de l'anode, de I^- en I_3^- . Un courant d'intensité i_1 est alors observé dans le circuit extérieur de la pile A. Pour la pile B, la présence de SO_2 conduit à une réaction parasite à la cathode. Cette réaction parasite modifie l'intensité du courant i_2 circulant dans le circuit extérieur de la pile B. La concentration en $\text{SO}_{2\text{gaz}}$ peut être déduite de la différence $i_1 - i_2$.

19. Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation de O_3 en O_2 et celle de I^- en I_2 .

20. La pompe envoie de l'air en direction de la cathode avec un débit volumique constant \mathcal{D}_v pendant une durée Δt . Donner l'expression littérale du volume d'air V ainsi injecté à la cathode.

21. On note n_{O_3} la quantité de matière d'ozone contenue dans ce volume d'air V . Écrire la relation liant n_{O_3} à la quantité de matière de diiode n_{I_2} formée pendant la durée Δt , en supposant que la réaction est rapide et totale.

22. Le diiode ainsi formé réagit à la cathode pour former I^- . Cette transformation nécessite un apport d'électrons qui provient de l'anode où I^- se transforme en I_3^- . Écrire les demi-équations électroniques ayant lieu à l'anode et à la cathode. Établir l'équation de fonctionnement de la pile.

23. On note n_1 la quantité de matière d'électrons circulant via le circuit extérieur du fait de cette transformation. Établir la relation entre n_1 et n_{O_3} .

24. Donner l'expression littérale de l'intensité du courant électrique i_1 circulant dans le circuit extérieur en fonction de la concentration en ozone $C_{\text{O}_3} = n_{\text{O}_3}/V$, de \mathcal{D}_v et de \mathcal{F} .

25. Dans la pile B, SO_2 barbotant dans la solution d'iodure de potassium va être oxydé en ions sulfate SO_4^{2-} . Écrire la demi-équation électronique associée à l'oxydation de SO_2 en ions SO_4^{2-} .

26. Comme dans le cas de la pile A, O_3 réagit totalement avec I^- pour former du diiode I_2 et du dioxygène O_2 dans la solution présente à la cathode. Le diiode I_2 est ensuite réduit à la cathode pour former I^- . Il capte donc des électrons par deux voies : soit par échange direct d'électrons dans la solution précédente à la cathode via l'oxydation de SO_2 , soit par l'intermédiaire du circuit extérieur par réduction de I^- en I_3^- au niveau de l'anode. Donner l'expression de i_2 en fonction de C_{O_3} , C_{SO_2} , \mathcal{D}_v et \mathcal{F} .

27. En déduire que la concentration en dioxyde de soufre dans l'air vérifie :

$$C_{\text{SO}_2} = \frac{i_1 - i_2}{2\mathcal{D}_v\mathcal{F}}$$

On fournit un relevé de la concentration en $\text{SO}_{2\text{gaz}}$ atmosphérique en fonction de l'altitude à la figure 8.

Le débit volumique de la pompe utilisée vaut $\mathcal{D}_v = 220 \text{ cm}^3 \cdot \text{min}^{-1}$. On indique qu'une concentration de 1 ppbv (partie par milliard en volume $\text{mm}^3 \cdot \text{m}^{-3}$) équivaut à $3,83 \times 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$.

28. En déduire la différence $i_1 - i_2$ mesurée par la sonde lorsque le ballon se trouve à une altitude $h = 1 \text{ km}$.

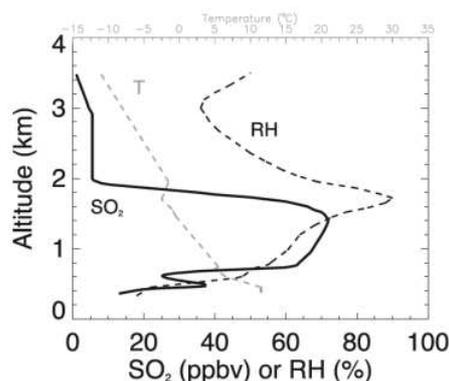


FIG. 2. The first sounding of SO_2 with temperature and relative humidity profiles made by W. Komhyr in Pittsburg, P.A. on 24 Feb 1983.

FIGURE 8 – Profil vertical de la concentration en SO_2 au dessus de Pittsburg (États-Unis), le 24 février 1983.

C. Un exemple de pollution anthropique

L'industrialisation a provoqué une augmentation importante de la pollution atmosphérique. Aux 19^{ème} et 20^{ème} siècles, plusieurs grandes villes européennes étaient surmontées par une couche d'air de couleur jaune et noire qui trouvait sa source dans les fumées sortant des cheminées. En hiver, en l'absence de vent et par temps stable, les nuages de polluants stagnaient au-dessus des villes pendant plusieurs jours. Plusieurs villes européennes ont connu des situations tragiques qui ont été attribuées à une action délétère des polluants sur la santé. L'un des épisodes les plus célèbres est le smog de Londres en 1952. Au cours de cet épisode de forte pollution, de fortes concentrations en $\text{SO}_{2\text{gaz}}$ (provenant de la combustion du charbon très utilisé dans l'industrie et pour le chauffage domestique) ont été relevées, entraînant une surmortalité dans la population. Différentes méthodes ont été développées pour mesurer la concentration en dioxyde de soufre dans l'air. Cette partie présente le dispositif mis en oeuvre le 9 décembre 1952, à Lambeth (situé dans le Grand Londres), lors d'un fort épisode de pollution atmosphérique et compare les résultats obtenus aux normes actuellement en vigueur. La figure 9 illustre le dispositif envisagé.

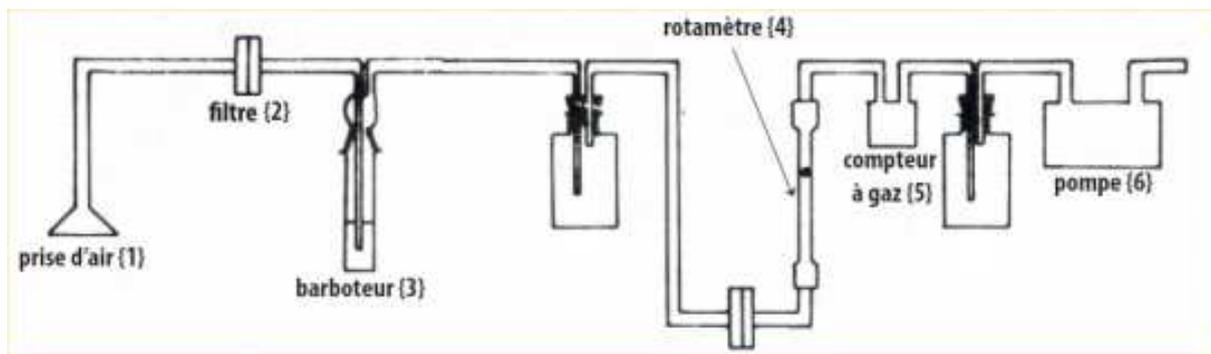
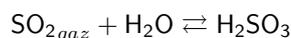


FIGURE 9 – Schéma simplifié du dispositif de mesure de la concentration en SO_2

L'appareil aspire, au moyen d'une pompe (notée 6), de l'air extérieur. La prise d'air est réalisée à l'aide d'un tuyau souple à l'extrémité duquel est fixé un entonnoir orienté vers le bas (noté 1). Cet air passe successivement à travers un filtre (noté 2) qui retient la poussière et un barboteur (noté 3) qui contient un volume $V_0 = 100 \text{ mL}$ d'eau oxygénée à $pH = 4,5$ pour retenir le dioxyde de soufre qui va être dosé. Un rotamètre (noté 4) permet de contrôler le débit instantané et un compteur à gaz (noté 5) permet de mesurer la quantité d'air totale aspirée. Au niveau du barboteur, on admet que la totalité du dioxyde de soufre $\text{SO}_{2\text{gaz}}$ contenu dans l'air passe en solution aqueuse en formant de l'acide sulfureux H_2SO_3 qui est un diacide faible selon l'équation-bilan :



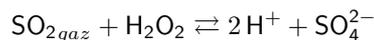
29. Construire le diagramme de prédominance associé à l'acide sulfureux et déduire la forme majoritairement rencontrée à $pH = 4,5$.

30. Écrire l'équation de la réaction qui modélise la transformation de l'acide sulfureux en cette forme majoritaire.

31. Une réaction d'oxydo-réduction rapide et totale a lieu entre l'eau oxygénée H_2O_2 en excès et la forme

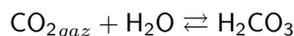
majoritaire identifiée à la question précédente. Écrire l'équation-bilan qui modélise cette réaction.

32. En combinant les trois équations précédentes, montrer que l'on peut formellement modéliser les différentes transformations précédentes par l'équation suivante :



33. Établir l'expression de n_{H^+} du nombre de moles d'ions H^+ présents dans la solution contenue dans le barboteur en fonction du pH initial noté pH_i , du volume V_0 et du nombre de moles de dioxyde de soufre n_{SO_2} dissout.

L'air atmosphérique compte une quantité non négligeable de $\text{CO}_{2\text{gaz}}$. On rappelle que $\text{CO}_{2\text{gaz}}$ peut se dissoudre dans l'eau pour former le diacide faible H_2CO_3 selon l'équation :

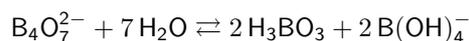


34. Expliquer pourquoi on ne peut pas réaliser un dosage acido-basique traditionnel avec une solution de soude ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$) pour quantifier la quantité de SO_2 dissout dans le barboteur.

À la place, on ajoute au volume V_0 contenu dans le barboteur, un certain volume d'une solution de borax, de sorte à éliminer les ions hydronium produits par l'ensemble des transformations. L'ajout de ce volume de borax permet ainsi de retrouver le pH d'origine fixé à $\text{pH} = 4, 5$. Le borax, ou tétraborate de sodium décahydraté, est un solide ionique de formule $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ (contenant en particulier l'ion borate $\text{B}_4\text{O}_7^{2-}$).

35. Écrire l'équation qui modélise la dissolution du borax.

36. Les ions borate réagissent alors totalement avec l'eau pour former l'acide borique H_3BO_3 et sa base conjuguée $\text{B}(\text{OH})_4^-$ selon l'équation :



Déterminer, en justifiant la réponse, la valeur du pH de la solution de borax ainsi obtenue.

On prépare une solution de borax en ajoutant une masse de 38 mg de borax dans 1,0 L d'eau. On constate qu'il faut ajouter, à la solution contenue dans le barboteur, un volume $V = 9,4$ mL de cette solution de borax pour qu'elle retrouve son pH initial.

37. La pompe électrique avait été réglée pour avoir un débit d'air de $3,0 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$, la solution d'eau oxygénée avait été laissée en place pendant 15 min. En déduire la concentration en dioxyde de soufre dans l'air, en $\mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ d'air.

Les mesures réalisées à Lambeth, entre le 2 et le 10 décembre 1952, ont montré que la concentration en SO_2 atmosphérique s'était maintenue, pendant au moins 6 jours consécutifs, à un seuil au moins égal à celui mesuré à la question précédente. Les normes françaises actuelles concernant les concentrations maximales en SO_2 atmosphérique sont :

- Valeur limite horaire : elle est de $350 \mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ à ne pas dépasser plus de 24 fois par an.
- Valeur limite journalière : elle est de $125 \mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ à ne pas dépasser plus de 3 jours par an.
- Objectif de qualité en moyenne annuelle : inférieur à $50 \mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Par ailleurs, un seuil de recommandation et d'information est situé à $300 \mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ en moyenne horaire et un seuil d'alerte à $500 \mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ sur 3 heures consécutives.

38. Commenter la valeur des concentrations en $\text{SO}_{2\text{gaz}}$ détectées à Lambeth durant le mois de décembre 1952.

D. Un exemple de pollution naturelle

En avril 1815, le mont Tambora a connu, en Indonésie, une éruption d'une violence sans précédent. L'Europe a connu l'année suivante un été particulièrement froid et pluvieux : on a parlé de l'année 1816 comme de l'année sans été. La dernière partie de ce problème propose de revenir sur cet épisode volcanique et son impact sur le climat.

Éjection de SO_2 suite à l'éruption du Mont Tambora

L'éruption volcanique du Mont Tambora a commencé le 5 avril 1815, avec une première éruption formant une énorme colonne de cendres et de gaz, appelée panache. Elle s'est poursuivie durant 10 jours avec un paroxysme au 10 avril. L'un des paramètres utilisés pour évaluer la violence d'une éruption est le volume de matériau éjecté. Dans le cas de l'éruption du Mont Tambora, la première phase éruptive, qui n'aurait produit qu'une partie du

volume total des cendres, est associée à un volume éjecté, en équivalent solide, de $11 \pm 2 \text{ km}^3$. Le volume total éjecté par l'épisode volcanique est, quant à lui, estimé $41 \pm 4 \text{ km}^3$.

39. Une relation empirique utilise le volume éjecté V (en équivalent solide) en km^3 pour évaluer la hauteur H du panache exprimée en km :

$$H = 25,9 \times \log V$$

Estimer la hauteur H du panache formé lors de la première phase éruptive du Mont Tambora. Nommer la couche atmosphérique atteinte par ce panache.

Le panache du volcan injecte une quantité importante de gaz, dont $\text{SO}_{2\text{gaz}}$, et de poussières dans l'atmosphère. Les poussières, sous l'effet de la gravité, retombent très vite et les espèces solubles comme le chlorure d'hydrogène sont lessivées par les nuages avant d'entrer dans la stratosphère. Le dioxyde de soufre a, quant à lui, une durée de vie plus longue. Il atteint la hauteur H évaluée précédemment, s'oxyde totalement en acide sulfurique H_2SO_4 en environ 1 mois, puis l'acide sulfurique H_2SO_4 et l'eau H_2O donnent :



pour former une couche de particules fines maintenues en suspension, appelée couche d'aérosols sulfatés. Des études ont montré que 55×10^6 tonnes de $\text{SO}_{2\text{gaz}}$ ont ainsi été injectées à cette altitude H .

40. Comparer cet apport en espèces soufrées aux quantités habituellement présentes hors épisode volcanique majeur. Ces dernières sont présentées dans le tableau suivant.

Réservoir	Forme du soufre	Stock en Gt
Troposphère	Sulfates (SO_4^{2-})	0,7
	SO_2	0,5
Stratosphère	Sulfates (SO_4^{2-})	0,5

Effet sur le climat

On présente ici un modèle simple pour estimer l'effet climatique d'une couche d'aérosols sulfatés stratosphérique. On suppose que le flux solaire incident, de puissance surfacique moyenne $F_s = 341 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, arrive perpendiculairement à la couche d'aérosols. Une partie du rayonnement solaire incident traverse directement la couche, on la note F_t . On pose $F_t = F_s \exp -\delta$ où δ est l'épaisseur optique (sans unité) caractéristique de la couche. Le reste du rayonnement est diffusé, soit vers les basses couches et sera noté F_d , soit vers l'espace. Il est alors noté F_u . On note β la fraction du rayonnement diffusé qui repart vers l'espace.

41. Montrer que F_u et F_d peuvent s'écrire :

$$F_u = F_s \beta (1 - \exp -\delta) \quad \text{et} \quad F_d = (1 - \beta) F_s (1 - \exp -\delta)$$

42. On définit l'albédo de la couche d'aérosols sulfatés comme le rapport du flux repartant vers l'espace sur le flux incident $A^* = \frac{F_u}{F_s}$. Exprimer A^* en fonction de β et δ .

Dans le cas de l'éruption du Mont Tambora, on trouve dans la littérature des mesures d'une grandeur Δm , proportionnelle à l'épaisseur optique δ (pour des longueurs d'onde appartenant au domaine du visible), en fonction du temps écoulé depuis l'éruption du Tambora. Voir la figure 10.

43. Estimer la valeur de l'albédo de la couche d'aérosols sulfatés pour l'été 1816 aux latitudes moyennes de l'hémisphère nord, sachant que les aérosols sulfatés sont caractérisés par une fraction du rayonnement diffusé $\beta = 0,17$ dans le domaine du visible.

44. Donner l'expression du flux F_u repartant vers l'espace en fonction de A^* et F_s , ainsi que l'expression de l'ensemble des flux repartant vers le sol $F_s \exp -\delta + F_d$ en fonction de A^* et F_s .

45. Évaluer numériquement la proportion du flux solaire incident, traversant effectivement la couche d'aérosols et repartant vers le sol.

On modélise le comportement radiatif de la Terre en présence d'une couche d'aérosols sulfatés d'origine volcanique : les basses couches de l'atmosphère sont considérées avec un albédo $A_0 = 0,31$ et la couche d'aérosols est placée au-dessus des basses couches de l'atmosphère. La couche d'aérosols est considérée avec un albédo A^* . On envisage les réflexions multiples entre la couche d'aérosols et les basses couches de l'atmosphère.

46. En considérant que les réflexions multiples entre la couche d'aérosols et les basses couches de l'atmosphère se poursuivent infiniment, montrer que les calculs conduisent à un albédo total A_T donné par la formule :

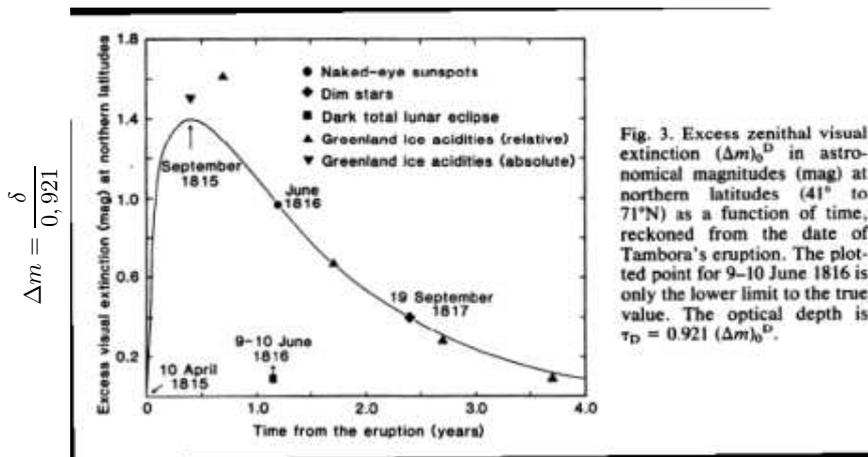


Fig. 3. Excess zenithal visual extinction $(\Delta m)_0^D$ in astronomical magnitudes (mag) at northern latitudes (41° to $71^\circ N$) as a function of time, reckoned from the date of Tambora's eruption. The plotted point for 9-10 June 1816 is only the lower limit to the true value. The optical depth is $\tau_D = 0.921 (\Delta m)_0^D$.

FIGURE 10 – Évolution de $\Delta m = \frac{\delta}{0,921}$ en fonction du temps écoulé depuis l'éruption du Mont Tambora pour les latitudes Nord (41° à 71°).

$$A_T = A^* + \frac{A_0(1 - A^*)^2}{1 - A_0A^*}$$

Calculer numériquement l'albédo total A_T décrivant le comportement radiatif de la Terre en présence de la couche d'aérosols sulfatés. Commenter.

En l'absence de la couche d'aérosols, la puissance qui n'est pas réfléchiée par la couche d'albédo A_0 est d'abord absorbée par la surface de la Terre, qui se comporte comme un corps chaud de température uniforme T_T émettant un rayonnement infrarouge en direction de l'atmosphère. L'atmosphère absorbe une fraction f de ce rayonnement infrarouge. Elle ré-émet à son tour un rayonnement infrarouge identique en direction de l'espace et de la Terre. La surface de la Terre absorbe à son tour tout le rayonnement infrarouge provenant de l'atmosphère. L'ensemble du rayonnement qui sera visible par un satellite qui pointerait en direction de la Terre vaut alors $F_{out} = (1 - \frac{f}{2})\sigma T_T^4 + A_0 F_s$.

47. En exploitant l'équilibre thermique en l'absence d'aérosols, évaluer littéralement puis numériquement la fraction f du rayonnement infrarouge terrestre absorbé par l'atmosphère.

À la suite de l'éruption volcanique du Tambora, une couche d'aérosols s'est formée, modifiant l'albédo de la Terre. Le nouvel albédo A_T , est pris égal à $A_T = 0,36$. Un déséquilibre entre les flux arrivant et repartant de la Terre apparaît brisant l'équilibre thermique. On suppose dans un premier temps que la température de surface de la Terre n'a pas encore eu le temps d'évoluer. On suppose également que la couche d'aérosols est transparente aux infra-rouges de sorte que la fraction de rayonnement infrarouge terrestre absorbé par l'atmosphère en présence de la couche d'aérosols vaut encore f . On a noté F_{out} le rayonnement partant sans couche d'aérosols. On note $F_{out} - \Delta F$ ce même rayonnement lors d'une éruption volcanique majeure. ΔF correspond au forçage radiatif induit par la présence de la couche d'aérosols.

48. Donner l'expression littérale du forçage radiatif ΔF en fonction de F_s et des albédos A_0 et A_T . Faire l'application numérique dans le cas de l'éruption du Tambora et commenter son signe.

Si le forçage radiatif dure suffisamment longtemps, un nouvel équilibre thermique peut être atteint. On note $T_T + \Delta T$ la nouvelle température de surface de la Terre, où $\Delta T \ll T_T$ est la variation de température moyenne de surface de la Terre induite par la présence de la couche d'aérosols sulfatés lorsque l'équilibre thermique est établi.

49. Montrer que la variation de température ΔT est liée au forçage radiatif ΔF par la relation :

$$\Delta T = \frac{\Delta F}{4\sigma(1 - \frac{f}{2})T_T^3}$$

50. Évaluer numériquement la variation de température de la Terre attendue dans le cadre de ce modèle pour l'éruption volcanique du Tambora.

51. On propose trois documents aux figures 11, 12, 13. S'appuyer notamment sur ces documents pour discuter de la pertinence des résultats établis précédemment et des éventuelles limites du modèle utilisé.

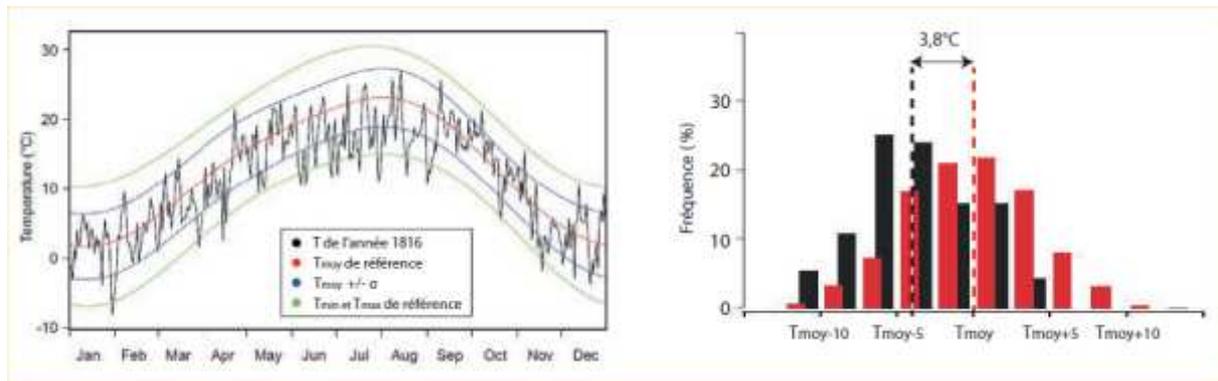


FIGURE 11 – À gauche : température journalière mesurée à Genève à 14h00 durant l'année 1816 (courbe noire), température journalière moyenne mesurée à Genève à 14h00 sur la période de référence (de 1799 à 1821 en excluant les années de 1809 à 1811 et de 1815 à 1817 perturbées par des épisodes volcaniques) (courbe rouge), courbes distantes d'un écart-type σ de cette température moyenne de référence (courbes bleues), températures journalières minimales et maximales mesurées à Genève à 14h00 durant la période de référence. À droite : distribution des températures journalières mesurées entre juin et août durant l'année 1816 (en noir) et sur la période de référence (en rouge).

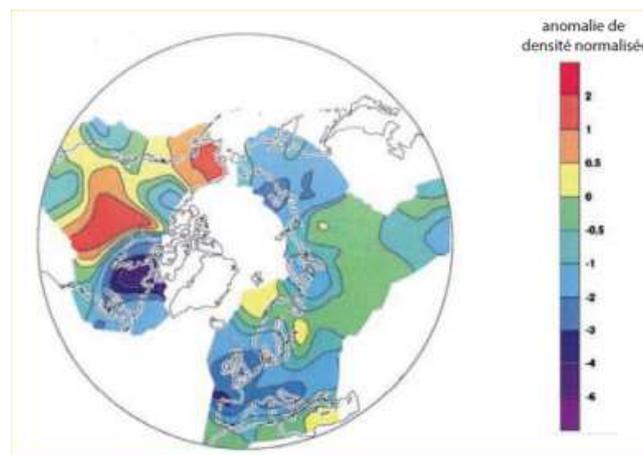


FIGURE 12 – Étude de la densité des cernes de croissance des arbres, en des lieux variés de l'hémisphère Nord, pour en déduire la température moyenne en ces lieux durant l'été 1816 et la comparer à la température moyenne en ces mêmes lieux durant les étés d'une période de référence (allant de 1881 à 1960). Représentation, à l'aide d'un code couleur, de l'anomalie de densité des cernes normalisée entre l'année 1816 et la période de référence.

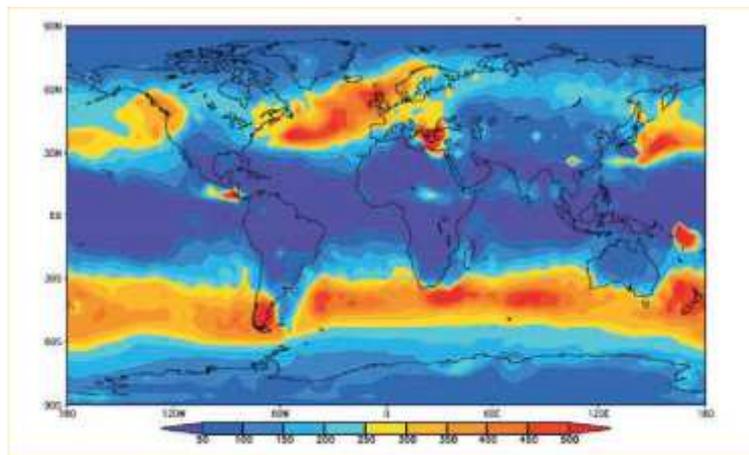


FIGURE 13 – Simulation numérique de la distribution des dépôts soufrés d'origine volcanique (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$) après l'éruption du Mont Tambora en 1815. Le modèle suppose une injection de 55×10^6 tonnes de SO_2 à 24 – 32 km d'altitude.