

# Devoir de Sciences Physiques n°5 du 06-01-2025

– Solutions –

## Problème n° 1 – Systèmes de particules

ENS Ulm PC 2024

### Introduction

#### A. Un atome dans un piège optique

1. On passe en coordonnées cartésiennes, l'énergie potentielle est donc  $U(x, y, z) = U_0 + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$ . La force est  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$ . On trouve la force de rappel  $\vec{F} = -kx\vec{e}_x - ky\vec{e}_y - kz\vec{e}_z$ . On applique la relation de la Dynamique dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen subissant la force  $\vec{F}$ . On a donc  $m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z) = -kx\vec{e}_x - ky\vec{e}_y - kz\vec{e}_z$ . On obtient sur les trois composantes la même équation différentielle d'oscillateur harmonique que nous illustrerons avec la coordonnée  $x$  :  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ .

2. On peut donc travailler directement en vecteurs sur l'équation différentielle  $\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = \vec{0}$ . Cette équation différentielle possède la solution harmonique générale suivante  $\vec{r} = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t$ . On détermine les deux constantes d'intégration qui vont avec une équation différentielle du second ordre en utilisant les conditions initiales. À la date  $t = 0$ , on a  $\vec{r}(0) = \vec{A}$ . Pour la vitesse, on calcule  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\vec{A}\omega \sin \omega t + \vec{B}\omega \cos \omega t$ . Cela nous conduit à l'instant initial à écrire  $\vec{v}(0) = \vec{B}\omega$ . La solution de l'équation est donc :  $\vec{r} = \vec{r}(0) \cos \omega t + \frac{\vec{v}(0)}{\omega} \sin \omega t$ .

3. Le faisceau 1 se propage sur l'axe  $Ox$  dans le sens des  $x$  croissants, le champ électrique est polarisé rectilignement selon  $\vec{e}_y$ . On peut décliner pour les deux autres champs électriques proposés : 2 à  $y$  croissant et polarisé selon  $\vec{e}_z$  et 3 à  $z$  croissant et polarisé selon  $\vec{e}_x$ .

4. Le calcul du carré du champ électrique total est  $E^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$  puisque les trois champs sont perpendiculaires deux à deux. On en déduit par linéarité de l'intégrale qui permet le calcul de la moyenne que  $\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + \langle E_3^2 \rangle$ . Prenons le premier champ électrique  $E_1^2 = a^2(y, z) \cos^2(qx - \Omega t + \varphi_1)$ . Par calcul de moyenne, on obtient  $\langle E_1^2 \rangle = \frac{1}{2}a^2(y, z) = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 \exp -\frac{2(y^2+z^2)}{\sigma^2}$ . Pour les autres termes, on a exactement le même calcul mis à part la permutation circulaire des coordonnées. On a :  $U = -\frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2[\exp -\frac{2(y^2+z^2)}{\sigma^2} + \exp -\frac{2(x^2+z^2)}{\sigma^2} + \exp -\frac{2(x^2+y^2)}{\sigma^2}]$ .

5. La condition  $r \ll \sigma$  signifie aussi que  $x^2 + y^2 + z^2 \gg \sigma^2$  mais que  $y^2 + z^2 \ll \sigma^2$  aussi. On peut donc faire des développements limités des exponentielles comme pour  $\exp -\frac{2(y^2+z^2)}{\sigma^2} \simeq 1 - \frac{2(y^2+z^2)}{\sigma^2}$ . En calculant de la même façon les autres facteurs, on arrive à  $U = -\frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2(3 - \frac{4}{\sigma^2}(x^2 + y^2 + z^2))$ . Cela permet d'écrire que  $U(\vec{r}) - U(\vec{0}) = \frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}kr^2$ . Cela permet d'identifier la constante de raideur :  $k = \frac{4\gamma\mathcal{E}^2}{\sigma^2}$ .

6. La période du mouvement est  $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . On trouve  $\tau \simeq 6 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

7. À  $t = 0$ , l'atome se trouve à l'origine  $\vec{r}(0) = \vec{0}$  avec une vitesse  $v(0) = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . La solution du mouvement est  $\vec{r} = \frac{\vec{v}(0)}{\omega} \sin \omega t$ . On calcule  $\omega = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  donc l'amplitude du mouvement est  $\frac{v(0)}{\omega} = 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$ . On constate sans difficulté que  $\frac{v(0)}{\omega} \ll \sigma$  puisque l'on compare  $1 \mu\text{m}$  avec  $\sigma = 60 \mu\text{m}$ . On a toujours  $r \ll \sigma$ .

8. Si la polarisation n'est pas contrôlée, on aura une contribution non nulle des doubles produits scalaires que l'on a comme  $2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ . Pour éliminer leur influence, puisque l'on calcule leur moyenne, on sait que  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  va intervenir. Si on les déphase correctement, on peut contrer le défaut de polarisation. Par exemple  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ .

#### B. Une particule soumise à une force $\alpha/x^3 - kx$

9. On écrit  $\vec{F} = (\frac{\alpha}{x^3} - kx)\vec{e}_x = -\overrightarrow{\text{grad}}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$ . On en déduit que l'énergie potentielle ne dépend pas de  $y$  et  $z$  puisque  $\frac{\partial U}{\partial y} = 0 = \frac{\partial U}{\partial z}$ . On a donc  $\frac{dU}{dx} = kx - \frac{\alpha}{x^3}$  qui permet d'obtenir  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\alpha}{2x^2}$  si l'on ne considère pas de constante d'intégration. On peut identifier  $A = \frac{\alpha}{2}$  et  $B = \frac{1}{2}k$ .

10. Comme la force dérive d'une énergie potentielle, on a conservation de l'énergie mécanique. En écrivant que  $\frac{dE}{dt} = 0$ , on arrive à l'équation du mouvement. Il est vraisemblable qu'ici, malgré le passage à  $g(t) = x^2(t)$ , la démarche sera la même. L'énergie mécanique de la particule est  $E = E_c + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ . On passe à  $g$  facilement pour l'énergie potentielle mais pour l'énergie cinétique, il faut être prudent. On a  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kg + \frac{\alpha}{2g}$ . On a  $g = x^2$  et, comme  $x > 0$  est assuré, on peut écrire  $x = \sqrt{g}$ . On dérive par rapport au temps pour obtenir  $\dot{x} = \frac{\dot{g}}{2\sqrt{g}}$ . L'énergie cinétique est donc  $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{m\dot{g}^2}{8g}$ . L'expression de l'énergie est  $E = \frac{m\dot{g}^2}{8g} + \frac{1}{2}kg + \frac{\alpha}{2g}$ . La

dérivée par rapport au temps est nulle :  $\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{m}{8} \frac{2\dot{g}\ddot{g}g - \dot{g}^3}{g^2} + \frac{1}{2}k\dot{g} - \frac{\alpha\dot{g}}{2g^2}$ . On multiplie par  $g^2$  cette équation d'où  $\frac{m}{8}(2\ddot{g}g - \dot{g}^2) + \frac{1}{2}kg^2 - \frac{\alpha}{2}$ . On peut continuer en divisant par  $g$  pour obtenir  $\frac{m}{4}\ddot{g} = \frac{m\dot{g}^2}{8g} + \frac{\alpha}{2g} - \frac{1}{2}kg$ . Mais en reprenant l'expression de l'énergie, on constate que  $\frac{m\dot{g}^2}{8g} + \frac{\alpha}{2g} = E - \frac{1}{2}kg$ . On peut conclure le calcul en obtenant l'équation différentielle  $m\ddot{g} = 4(E - kg)$ .

11. Il est préférable de réécrire l'équation différentielle précédente sous la forme  $m\ddot{g} + 4kg = 4E$ . C'est encore plus intéressant sous la forme  $\ddot{g} + 4\omega^2g = \frac{4E}{k}$ . La solution est  $g(t) = A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t + \frac{E}{k}$ . À la date  $t = 0$ ,  $g_0 = A + \frac{E}{k}$ . Si l'on dérive, on obtiendra  $\dot{g} = 2\omega(\frac{E}{k} - g_0) \sin 2\omega t + 2B\omega \cos \omega t$ . Ainsi on peut voir que  $h_0 = 2\omega B$ . On en déduit la forme de la solution  $g(t) = (g_0 - \frac{E}{k}) \cos 2\omega t + \frac{h_0}{2\omega} \sin 2\omega t + \frac{E}{k}$ .

12. Comme  $x > 0$  et  $h_0 = 0$  d'après les hypothèses de l'énoncé, on obtient  $x(t) = \sqrt{(g_0 - \frac{E}{k}) \cos 2\omega t + \frac{E}{k}}$ . La période de  $x(t)$  est celle de  $\cos 2\omega t$ , c'est  $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$ .

13. Dans le cadre d'une force linéaire, classiquement de rappel élastique comme  $-kx$ , on obtient un oscillateur harmonique et une période indépendante de l'amplitude du mouvement à condition qu'il n'y ait pas de limite à l'élasticité linéaire du système et donc qu'il n'y ait pas de limite à l'existence de la force  $-kx$ . En pratique, on sait très bien que si on allonge trop un ressort il va à un moment donné quitter le domaine de la linéarité en se déformant de façon irréversible ou même carrément se casser. Plaçons-nous dans un cadre purement théorique  $-kx$  est harmonique sur  $x(t)$  et ce qui n'est pas nécessairement imaginable a priori est que  $\frac{\alpha}{x^3}$  soit harmonique pour  $x^2(t)$ .

14. Avec  $g_0 = x_0^2$ , on peut écrire que  $x(t) = \sqrt{(x_0^2 - \frac{E}{k}) \cos 2\omega t + \frac{E}{k}}$ . Pour déterminer  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ , il faut être vigilant par rapport au signe de  $x_0^2 - \frac{E}{k}$ . Compte tenu des conditions initiales, l'énergie est  $E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{\alpha}{2x_0^2}$ . Par conséquent,  $\frac{E}{k} = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{\alpha}{2kx_0^2}$ . On peut donc modifier l'expression de  $x(t)$  pour obtenir  $x(t) = \sqrt{(\frac{x_0^2}{2} - \frac{\alpha}{2kx_0^2}) \cos 2\omega t + \frac{x_0^2}{2} + \frac{\alpha}{2kx_0^2}}$ . On discute le signe de  $\frac{x_0^2}{2} - \frac{\alpha}{2kx_0^2}$  qui s'annule pour  $x_c = (\frac{\alpha}{k})^{1/4}$ . Supposons que  $x_0 > x_c$ , on a alors  $x_{\max} = x_0$  et  $x_{\min} = \frac{x_c^2}{x_0}$ . Si au contraire  $x_0 < x_c$  alors, on permute les rôles  $x_{\max} = \frac{x_c^2}{x_0}$  et  $x_{\min} = x_0$ .

15. L'énergie potentielle est  $U(x) = \frac{1}{2}k(x^2 + \frac{\alpha}{kx^2}) = \frac{1}{2}k(x^2 + \frac{x_c^4}{x^2})$ . Cette forme est plus intéressante. Commençons par chercher le minimum  $\frac{dU}{dx} = k(x - \frac{x_c^4}{x^3}) = 0$ , cela se produit pour  $x = x_c$ . Supposons que  $x_0 > x_c$ , on sait que  $x_0$  représentera  $x_{\max}$  et donc la position initiale extrême du mobile. La valeur de l'énergie est fixée  $E = kx_0^2 + \frac{\alpha}{x_0^2} = kg_0 + \frac{\alpha}{g_0}$ . Pour trouver l'autre extrémité, on peut se baser sur le calcul précédent ou bien directement résoudre l'équation de conservation de l'énergie mécanique  $kg_0 + \frac{\alpha}{g_0} = kg + \frac{\alpha}{g}$ . On obtient l'équation  $k(g - g_0) = \alpha(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{g}) = \alpha \frac{g - g_0}{gg_0}$ . Comme on recherche une solution  $g \neq g_0$ , la solution est  $gg_0 = \frac{\alpha}{k} = x_c^4$  d'où  $x^2x_0^2 = x_c^4$ . On retrouve bien  $x_{\min} = \frac{x_c^2}{x_0}$ . Le graphique montre la zone des  $x$  accessibles au mouvement pour une énergie donnée  $E$  sur la figure 1.

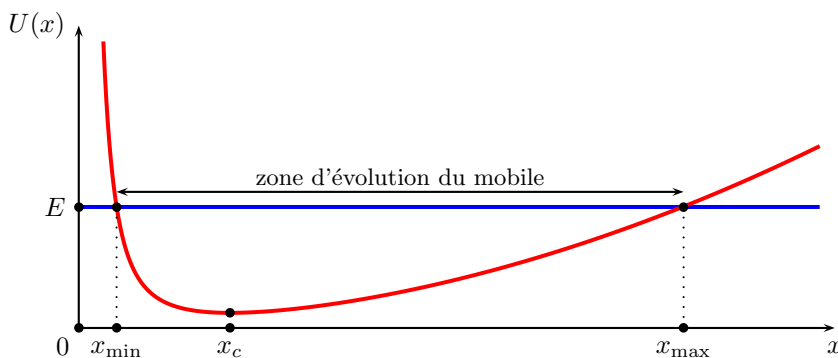


FIGURE 1 - Énergie potentielle et intervalle d'évolution du mobile

### C. N particules interagissant par une force en $1/r^3$

#### Potentiel extérieur quelconque

16. On a  $\vec{F}_{ext,i} = -\overrightarrow{grad}_i U_{ext}(\vec{r}_i) = -\frac{\partial U_{ext}}{\partial \vec{r}_i} \vec{e}_{r_i}$ .

17. La force est répulsive et possède la direction des positions des deux points en interaction. Comme  $\alpha > 0$

et que les vecteurs des positions sont  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ , on peut écrire la force exercée par  $j$  sur  $i$  selon la formule :

$$\vec{F}_{j \rightarrow i} = -\frac{\alpha}{r_{ij}^3} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}} \text{ ce qui devient : } \boxed{\vec{F}_{j \rightarrow i} = \frac{\alpha}{r_{ij}^4} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$$

18. On a  $G = \sum_i \vec{r}_i^2$ , pour obtenir  $\ddot{G}$ , il faut deux dérivations successives sous les sommes. Commençons par la dérivée première  $\dot{G} = 2 \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ . Ainsi  $\ddot{G} = 2 \left( \sum_i \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 + \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right)$ . Toutes les particules pour  $i = 1 \rightarrow N$  étant identiques de masse  $m$ , l'énergie cinétique du système est  $E_{cin} = \sum \frac{1}{2} m \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2$ . On peut donc faire évoluer le calcul en écrivant que  $\ddot{G} = \frac{4}{m} E_{cin} + 2 \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ . Il est préférable de multiplier par  $m$  pour obtenir  $m\ddot{G} = 4E_{cin} + 2 \sum_i \vec{r}_i \cdot m \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ . On voit clairement apparaître la relation de la Dynamique pour chacune des particules. On a  $m \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_{ext \rightarrow i} + \sum_{j \in S_i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$ . L'équation différentielle devient ainsi  $m\ddot{G} = 4E_{cin} + 2 \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i + 2 \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i$ . On va profiter de la loi des actions réciproques pour écrire que  $2 \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{r}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  puisque  $\vec{F}_{j \rightarrow i} = -\vec{F}_{i \rightarrow j}$ . La dernière expression nous permet d'utiliser l'expression vue avant de la force exercée par  $j$  sur  $i$ . On a donc  $2 \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha}{r_{ij}^4} r_{ij}^2 = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha}{r_{ij}^2}$ . On peut sortir  $\alpha$  de la somme et remarquer que  $2 \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i = \alpha \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}^2} = 4E_{int}$ . Si l'on reprend au départ notre équation, on obtient  $m\ddot{G} = 4E_{cin} + 2 \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i + 4E_{int}$ . La formule finale est :  $\boxed{m\ddot{G} = 4(E_{cin} + E_{int}) + 2 \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i}$ .

### Potentiel extérieur harmonique

19. Dans l'étude faite avant, on avait une équation différentielle du type  $m\ddot{g} = 4(E - kg)$ . Il faut que l'on retrouve quelque chose d'équivalent. Puisque le potentiel extérieur est harmonique, la force est une force de rappel de la forme générale  $\vec{F}_{ext \rightarrow i} = -k\vec{r}_i$ . Ainsi  $\vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i = -kr_i^2$ . Dans l'étude de la question précédente, on peut en déduire que  $2 \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i = -2k \sum_i r_i^2 = -2kG$ . On a donc  $m\ddot{G} = 4(E_{cin} + E_{int}) - 2kG$ . Ce n'est pas encore la forme attendue mais nous sommes assez proche. En effet, on va soustraire et ajouter  $2kG$ . cela donne  $m\ddot{G} = 4(E_{cin} + E_{int}) - 4kG + 2kG$  mais on sait que  $U_{ext} = \frac{1}{2} k \sum_i r_i^2 = \frac{1}{2} kG$ , cela fait que  $2kG = 4U_{ext}$ . L'équation devient  $m\ddot{G} = 4(E_{cin} + E_{int} + U_{ext}) - 4kG$ . Or, l'énergie du système de particules est  $E_{cin} + E_{int} + U_{ext} = E$ . On obtient bien l'équation différentielle sous la forme attendue :  $\boxed{m\ddot{G} = 4(E - kG)}$ . Nous n'avons plus qu'à transposer la solution trouvée pour  $g$  à celle pour  $G$ . On peut écrire que  $G(t) = (G_0 - \frac{E}{k}) \cos 2\omega t + \frac{H_0}{2\omega} \sin 2\omega t + \frac{E}{k}$ .

20. Il n'y a pas d'interaction intérieures, on a donc uniquement une force élastique et un oscillateur harmonique spatial. On peut donc reprendre la forme de solution vue précédemment  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(0) \cos \omega t + \frac{\vec{v}_i(0)}{\omega} \sin \omega t$ . On passe au carré  $\vec{r}_i^2 = \vec{r}_i^2(0) \cos^2 \omega t + \frac{\vec{v}_i^2(0)}{\omega^2} \sin^2 \omega t + 2 \frac{\vec{r}_i(0) \cdot \vec{v}_i(0)}{\omega} \cos \omega t \sin \omega t$ . En utilisant  $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$  et  $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$  ainsi que  $G = \sum_i r_i^2$ ,  $\dot{G}(0) = H_0 = \sum_i 2\vec{r}_i(0) \cdot \vec{v}_i(0)$ , on fait progresser le calcul pour obtenir  $G = \frac{1}{2} G(0)(1 + \cos 2\omega t) + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\vec{v}_i^2(0)}{\omega^2} (1 - \cos 2\omega t) + \frac{H_0}{2\omega} \sin 2\omega t$ . On écrit alors la conservation de l'énergie  $E = \sum_i \frac{1}{2} k \vec{r}_i^2(0) + \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2(0)$  d'où  $\frac{E}{k} = \frac{1}{2} G(0) + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\vec{v}_i^2(0)}{\omega^2}$ . On peut remplacer dans l'expression donnant  $G$  pour aboutir à  $G(t) = \frac{1}{2} G(0)(1 + \cos 2\omega t) + \left( \frac{E}{k} - \frac{1}{2} G(0) \right) (1 - \cos 2\omega t) + \frac{H_0}{2\omega} \sin 2\omega t$  ce qui permet de retrouver la formule établie avant :  $\boxed{G = (G_0 - \frac{E}{k}) \cos 2\omega t + \frac{H_0}{2\omega} \sin 2\omega t + \frac{E}{k}}$ .

21. On a des forces internes, cela ne devrait pas donner lieu a priori à des solutions harmoniques. C'est sans doute cela qui est assez extraordinaire. On arrive aussi à avoir une solution au comportement d'ensemble du système de  $N$  particules puisque  $G = \sum_i r_i^2$  obéit à une loi précise ce qui représente un comportement global prévisible si l'on peut dire ainsi.

### Boîte sphérique

22. L'allure de la fonction  $U_{ext}(r)$  est fournie à la figure 2.



FIGURE 2 – Énergie potentielle extérieure

**23.** On a  $|\dot{G}(t)| = |\sum_i 2\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i|$ . Comme le module d'une somme est nécessairement inférieur à la somme des modules, on écrira que  $|\dot{G}(t)| \leq 2 \sum_i |\vec{r}_i| |\dot{\vec{r}}_i|$ . Comme toutes les particules sont dans le boule de rayon  $\ell$ , on a forcément  $|\vec{r}_i| \leq \ell$ . On a donc  $|\dot{G}(t)| \leq 2\ell \sum_i |\dot{\vec{r}}_i|$ . Mais  $|\dot{\vec{r}}_i|$  représente le module de la vitesse de la particule  $i$ , on peut écrire que  $|\dot{\vec{r}}_i| = \sqrt{\frac{2E_{c,i}}{m}}$ . En sommant sur toutes les particules, on obtient une formule identique avec l'énergie cinétique du système  $\sum_i |\dot{\vec{r}}_i| = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$ . On a donc maintenant  $|\dot{G}(t)| \leq 2N\ell \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$ . L'énergie cinétique est forcément dépendante puisque on peut avoir une transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle, la formule obtenue n'est pas encore satisfaisante. Nous remarquons que  $E = E_c + E_{pot}$  et  $E_{pot} > 0$  puisque la force est répulsive. On constate que  $E > E_c$ . On peut donc proposer l'inégalité  $|\dot{G}(t)| \leq 2N\ell \sqrt{\frac{2E}{m}}$

qui convient puisque l'énergie mécanique est constante. On a  $\ddot{G} = \frac{d\dot{G}}{dt}$ . Si on calcule la moyenne, on va avoir  $\langle \ddot{G} \rangle = \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} \frac{d\dot{G}}{dt} dt = \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} d\dot{G}$ . On peut donc écrire que  $\langle \ddot{G} \rangle = \frac{1}{t_{\max}} (\dot{G}(t_{\max}) - \dot{G}(0))$ . Chaque terme de la différence est borné supérieurement, la différence sera aussi bornée. On divise cette valeur par  $t_{\max} \rightarrow \infty$ . On peut conclure sans hésitation que  $\langle \ddot{G} \rangle = 0$ .

**24.** Le potentiel est uniquement dépendant de  $r$ , le problème est à symétrie sphérique. La force exercée par la paroi est indépendante des angles  $(\theta, \varphi)$  des coordonnées sphériques. La pression ne peut dépendre que de  $r$ . On a  $P = P(r)$ .

**25.** On peut considérer que  $\ell_* \ll \ell$  parce que cette longueur est liée à la portée des interactions entre les atomes des différentes entités. Ces forces ont une portée plutôt courte située à l'échelle microscopique plutôt que l'échelle macroscopique.

**26.** On a simplement  $\vec{F}_{ext,i} = -F_{ext,i} \vec{e}_i$  puisque la force est répulsive.

**27.** Une pression est le rapport d'une force sur une surface, on a donc  $\vec{F}_{ext,\mathcal{R}} = -P \ell_\Sigma^2 \vec{e}_r$ . Pour que cette expression, il faut que  $\ell_\Sigma$  soit de l'ordre de la taille de l'échelle mésoscopique pour qu'il y ait assez de particules de telle sorte que la pression traduise une moyenne des chocs de toutes les particules. On peut situer  $\ell_\Sigma \simeq 1 \mu\text{m}$ .

**28.** On a  $\sum_{i \in \mathcal{S}_\mathcal{R}} F_{ext,i} = P \ell_\Sigma^2$  puisque l'on traduit l'effet de toutes les particules contenues dans  $\mathcal{R}$ .

**29.** On effectue une somme de norme de forces, il suffit de considérer tous les secteurs comme  $\mathcal{R}$ . En faisant cela, on somme toutes les particules dans contenues dans la boule de rayon  $\ell$ . On a donc  $\sum_{i=1}^N F_{ext,i} = P 4\pi \ell^2$ .

**30.** Nous avons vu que  $\langle \ddot{G} \rangle = 0 = 4U + 2 \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i$  puisque  $U = (E_{cin} + E_{int})$ . Ainsi  $U = -\frac{1}{2} \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i$ . Nous avons vu que la force extérieure n'existait que pour une toute petite zone d'espace de taille  $\ell_*$  et donc qu'elle était nulle pour l'essentiel de la distance  $\ell$ . En plus, son expression est  $-P \ell_\Sigma^2 \vec{e}_i$  alors  $\vec{r}_i \simeq \ell \vec{e}_i$ . On voit donc que le produit scalaire est de la force par le rayon vecteur est donc  $-P \ell_\Sigma^2 \times \ell$  pour le petit volume  $\mathcal{R}$ . Par sommation sur toute la boule, on va trouver  $-P 4\pi \ell^2 \times \ell$ . On peut donc écrire que  $\sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i \simeq -4\pi \ell^3$ . L'énergie interne est alors  $U = 2\pi \ell^3 P$ . Le volume de l'enceinte est  $V = \frac{4}{3}\pi \ell^3$ . Ainsi  $2\pi \ell^3 = \frac{3}{2}V$ . On a donc bien la relation :  $U \simeq \frac{3}{2}PV$ .

**31.** Dans le cas où  $\alpha = 0$ , il n'y a aucune interaction entre les particules. Cela correspond au modèle du gaz parfait. Pour ce dernier, on sait que  $U = \frac{3}{2}nRT$  si l'on raisonne pour  $n$  moles. La loi des gaz parfaits est  $PV = nRT$ . Il devient évident alors que l'on a  $U = \frac{3}{2}PV$ . La question précédente a montré que si l'on était avec des interactions à courte distance au niveau de la paroi alors on est très proche du modèle du gaz parfait.

## Problème n° 2 – SO<sub>2</sub> atmosphérique

Concours Général 2023

### A. Sonder l'atmosphère avec un ballon

#### Préparation et décollage du ballon-sonde stratosphérique (B.S.O.) Spirale

1. La loi des gaz parfaits pour une quantité de matière infinitésimale est  $PdV = dnRT$ . Avec  $dn = dm/M$ , on montre que la masse volumique du gaz est donnée par  $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{MP}{RT}$ . Si les conditions de pression et de température sont les mêmes, on voit alors que le rapport des masses volumiques correspond au rapport des masses molaires. On a donc bien  $\frac{\rho_h(z)}{\rho_a(z)} = \frac{M_h}{M_a}$ . Il ne faut pas oublier que la masse molaire de l'air est une moyenne qui dépend de la composition locale de l'air. Cette masse molaire dépend donc de l'altitude puisque si l'on introduit les fractions molaires, on aurait une formule du type  $M_a = x_{N_2}M_{N_2} + x_{O_2}M_{O_2} + x_{CO_2}M_{CO_2} + x_{SO_2}M_{SO_2} + \dots$  avec  $\sum_i x_i = 1$ . Comme N<sub>2</sub> et O<sub>2</sub> sont largement dominants, on peut considérer que la masse volumique de l'air est une constante et vaut  $29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

2. On a  $\rho_h(z=0) = \frac{M_h}{M_a}\rho_0$  et  $m_h = \rho_h(z=0)V_0$ . On trouve  $m_h = 1,83 \times 10^3 \text{ kg}$ .

3. La poussée d'ARCHIMÈDE correspond à la **résultante des forces de pression** exercées par l'air situé autour du ballon sur toute la surface du ballon. Cette force est égale, en situation d'équilibre, au poids du volume d'air déplacé, c'est-à-dire du volume d'air correspondant au volume du ballon contenant l'hélium.

4. On étudie le ballon dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il subit son poids  $(m_h + m_b)\vec{g}$ , la poussée d'ARCHIMÈDE  $\vec{\Pi}_A$  et la force de réaction du sol  $\vec{R}$ . Au moment du décollage, on a  $\vec{R} = \vec{0}$ . Pour décoller, il faut que la poussée d'ARCHIMÈDE compense le poids et le dépasse même ! On  $\Pi_A = \rho_0 V_{0,\min} g = (m_h + m_b)g$ . La masse d'hélium dépend de la masse volumique de l'hélium au niveau du sol :  $m_h = \frac{M_h}{M_a}\rho_0 V_{0,\min}$ . On arrive à

$V_{0,\min} = \frac{m_b}{\rho_0(1 - \frac{M_h}{M_a})}$ . On trouve numériquement  $V_{0,\min} = 1,13 \times 10^3 \text{ m}^3$ . Comme  $V_0 = 1,08 \times 10^4 \text{ m}^3$ , le ballon est sûr de décoller.

#### Modélisation des propriétés physiques de la troposphère et la basse stratosphère

5. La loi de la statique des fluides est  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho_a(z)\vec{g}$ . En utilisant la loi des gaz parfaits, on peut écrire que  $\frac{dP}{dz} = -\rho_a(z)g$  avec  $\rho_a(z) = \frac{M_a P(z)}{RT(z)}$ . En utilisant la loi d'évolution de la température fournie, on arrive à l'équation différentielle  $\frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{RT_0} \frac{dz}{1 - \frac{b}{T_0}z}$ . On intègre entre  $z = 0$  et une altitude  $z$  quelconque :  $\ln \frac{P}{P_0} = \frac{M_a g}{Rb} \ln(1 - \frac{b}{T_0}z)$ . Cette expression correspond à la loi proposée  $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{b}{T_0}z\right)^\alpha$  avec  $\alpha = \frac{M_a g}{Rb}$ .

6. À l'aide de la loi des gaz parfaits, on peut écrire  $\rho_a(z) = \frac{M_a P(z)}{RT(z)}$ . On obtient  $\rho_a(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{b}{T_0}z\right)^{\alpha-1}$ .

7. Dans cette partie de l'atmosphère, on a une température constante  $T_1$ . La loi de la statique des fluides s'écrit  $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_a g}{RT_1} P$ . On pose  $H = \frac{RT_1}{M_a g}$  la hauteur caractéristique d'évolution de la pression dans cette atmosphère isotherme. La loi est donc  $P(z) = P_1 \exp\left(-\frac{z-z_1}{H}\right)$ .

8. Toujours avec la loi des gaz parfaits :  $\rho_a(z) = \frac{M_a P_1}{RT_1} \exp\left(-\frac{z-z_1}{H}\right)$ .

#### Plafond atteint par le ballon-sonde

9. Par définition de la masse volumique  $\rho_h(z)V(z) = m_h$ . Sous les conditions d'équilibre mécanique et thermique, on peut utiliser  $\rho_h(z) = \rho_a(z)\frac{M_h}{M_a}$ . On obtient l'expression du volume recherché :  $V(z) = \frac{m_h M_a}{M_h \rho_a(z)}$ .

10. Au début de la montée dans la troposphère, on a vu que  $\rho_a(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{b}{T_0}z\right)^{\alpha-1}$ . On peut donc exprimer le volume  $V(z) = V_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{T_0}z\right)^{\alpha-1}}$ . On constate que le **volume du ballon augmente** lorsque  $z$  augmente puisque  $\alpha - 1 = 4,8 > 0$ .

11. La troposphère se termine à  $z = z_1 = 12 \text{ km}$ . On voit sur le graphique de la masse volumique de l'air que  $\rho_a(z_1) = 0,35 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On en déduit que  $V(z_1) = \frac{m_h}{\rho_h(z_1)} = \frac{M_a}{M_h} \frac{m_h}{\rho_a(z_1)}$ . On trouve  $V(z_1) = 3,79 \times 10^4 \text{ m}^3$ . Cette valeur est inférieure à  $V_{\max} = 19,6 \times 10^4 \text{ m}^3$ . Le ballon n'atteint pas son volume maximal.

12. On est nécessairement dans la basse stratosphère. La masse volumique correspondante est  $\rho_a(z_2) = \frac{M_a}{M_h} \frac{m_h}{V_{\max}} = 0,068 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Il faut utiliser le modèle de la basse stratosphère  $\rho_a(z_2) = \frac{M_a P_1}{RT_1} \exp\left(-\frac{z_2 - z_1}{H}\right)$ . On en déduit que  $z_2 = z_1 + H \ln \frac{M_a P_1}{\rho_a(z_2) RT_1}$ . Il faut encore calculer  $P_1$  soit par la formule donnant la pression

$P_1 = P_0(1 - \frac{b}{T_0}z_1)$ , soit en lisant sur le graphique. On trouve  $P_1 = 19700$  Pa. Cela permet de conclure que  $z_2 = 21,8$  km. C'est bien la masse stratosphère.

13. Le poids est  $(m_h + m_b)g = 2,7 \times 10^4$  N, la poussée d'ARCHIMÈDE est  $\rho_a(z_2)V_{\max}g = 1,3 \times 10^5$  N. On constate que la poussée d'ARCHIMÈDE est toujours supérieure au poids. Le mouvement du ballon sonde est accéléré.

14. La masse du ballon doit être égale à la masse d'air déplacée d'où  $m_b + \rho_a(z_{\max})\frac{M_b}{M_a}V_{\max} = \rho_a(z_{\max})V_{\max}$  d'où  $\rho_a(z_{\max}) = \frac{m_b}{(1 - \frac{M_b}{M_a})V_{\max}} = 7,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

15. On trouve  $z_{\max,ref} = 34,5$  km. On peut calculer  $\frac{z_{\max,ref} - z_{\max,mes}}{u(z_{\max,mes})} = 1,25$ . C'est plutôt satisfaisant.

### Vitesse de croisière dans la troposphère

16. Durant la phase 2, dans la troposphère, le mouvement se déroule à une vitesse quasi constante jusqu'à 12 km. Dans la basse stratosphère, on a à nouveau une vitesse quasi constante jusqu'à 30 km d'altitude. De 30 à 34 km, c'est beaucoup plus perturbé.

17. L'équation différentielle du mouvement du ballon dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projetée sur un axe vertical, est  $(m_h + m_b)\frac{dv}{dt} = -(m_h + m_b)g + \rho_a(z)V(z)g - k_0v^2$ . On a vu que  $V(z) = m_h\frac{M_a}{M_b}\frac{1}{\rho_a(z)}$  d'où  $\rho_a(z)V(z) = m_h\frac{M_a}{M_b}$ . La vitesse limite est obtenue lorsque  $\frac{dv}{dt} = 0$ , on peut donc obtenir l'expression de la vitesse limite  $v_{t,ref} = \sqrt{(m_h(\frac{M_a}{M_b} - 1) - m_b)\frac{g}{k_0}}$ . On trouve  $v_{t,ref} = 7,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

18. On calcule  $\frac{v_{t,ref} - v_{t,mes}}{u(v_{t,mes})} = 0,44$ . Ce résultat est tout à fait satisfaisant.

## B. Mesure du profil vertical de la concentration en $\text{SO}_{2,gaz}$

19. Les deux demi-équations rédox sont  $\text{O}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$  et  $2\text{I}^- \rightleftharpoons \text{I}_2 + 2\text{e}^-$ . Le bilan réactionnel est  $\text{O}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{I}^- \rightleftharpoons \text{O}_2 + \text{I}_2 + \text{H}_2\text{O}$ .

20. On a  $V = \mathcal{D}_v \Delta t$ .

21. D'après la stœchiométrie de la réaction, on a  $n_{\text{O}_3} = n_{\text{I}_2}$ .

22. On a une oxydation à l'anode  $3\text{I}^- \rightleftharpoons \text{I}_3^- + 2\text{e}^-$  et une réduction à la cathode  $\text{I}_2 + 2\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{I}^-$ . Le bilan réactionnel de la pile est la complexation de  $\text{I}_2$  par  $\text{I}^-$  selon le bilan :  $\text{I}_2 + \text{I}^- \rightleftharpoons \text{I}_3^-$ .

23. Il y a un transfert de 2 moles d'électrons pour chaque mole de  $\text{I}_2$  présente. On a donc  $n_1 = 2n_{\text{I}_2} = 2n_{\text{O}_3}$ .

24. On suppose que le courant est stable sur la durée  $\Delta t$  proposée au départ - on pourrait raisonner sur une durée infinitésimale  $dt$  sans cette hypothèse - et cela correspond à une circulation de  $n_1$  moles d'électrons. L'intensité est donc  $i_1 = \frac{n_1 \mathcal{N}_A e}{\Delta t} = \frac{2n_{\text{O}_3} \mathcal{F}}{\Delta t} = 2\frac{n_{\text{O}_3}}{V} \mathcal{F} \mathcal{D}_v$ . L'intensité est par conséquent :  $i_1 = 2C_{\text{O}_3} \mathcal{F} \mathcal{D}_v$ .

25. L'oxydation de  $\text{SO}_2$  est :  $\text{SO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e}^-$ .

26. Dans ce processus, il y a aussi 2 électrons de transférés. Au départ, on a  $n_{\text{I}_2} = n_{\text{O}_3}$  mais ensuite, il y a seulement  $n_{\text{I}_2} - n_{\text{SO}_2} = n_{\text{I}_2}^{\text{restant}}$  qui sera responsable du courant dans la pile. On a donc  $n_2 = 2n_{\text{I}_2}^{\text{restant}}$ . On en déduit que  $n_2 = 2(n_{\text{O}_3} - n_{\text{SO}_2})$ . En suivant la même démarche qu'à la question précédente, on arrive à :

$$i_2 = 2(C_{\text{O}_3} - C_{\text{SO}_2}) \mathcal{F} \mathcal{D}_v$$

27. On obtient rapidement par soustraction des deux intensités :  $C_{\text{SO}_2} = \frac{i_1 - i_2}{2\mathcal{F} \mathcal{D}_v}$ .

28. Pour une altitude  $h = 1$  km, on lit  $C_{\text{SO}_2} = 75 \text{ ppbv} = 2,87 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$ . On obtient alors  $i_1 - i_2 = C_{\text{SO}_2} 2\mathcal{F} \mathcal{D}_v$ . L'application numérique donne  $i_1 - i_2 \simeq 1 \mu\text{A}$ . Cette intensité est faible, il faut un micro-ampèremètre sensible pour mesurer correctement la concentration en dioxyde de soufre atmosphérique.

## C. Un exemple de pollution anthropique

29.  $\text{H}_2\text{SO}_3$  est l'espèce dominante jusqu'à  $pH = 1,8$ . Ensuite pour  $1,8 \leq pH \leq 7,2$ , c'est  $\text{HSO}_3^-$ . Au-delà de  $pH = 7,2$ , ce seront les ions sulfites  $\text{SO}_3^{2-}$ . À  $pH = 4,5$ , l'espèce prédominante est  $\text{HSO}_3^-$ .

30. L'acide sulfureux perd un proton :  $\text{H}_2\text{SO}_3 \rightleftharpoons \text{HSO}_3^- + \text{H}^+$ .

31. L'oxydation des ions hydrogénosulfites est  $\text{HSO}_3^- + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{SO}_4^{2-} + 3\text{H}^+ + 2\text{e}^-$ . La réduction de l'eau

oxygénée est  $\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{H}_2\text{O}$ . Le nombre d'électrons transférés étant le même dans chaque processus, on effectue la somme des deux demi-équations pour obtenir le bilan  $\boxed{\text{H}_2\text{O}_2 + \text{HSO}_3^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{SO}_4^{2-} + \text{H}^+}$ .

32. En combinant les trois équations précédentes, on a  $\boxed{\text{SO}_{2\text{gaz}} + \text{H}_2\text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{H}^+ + \text{SO}_4^{2-}}$ .

33. Une mole de dioxyde de soufre fait apparaître deux moles d'ions  $\text{H}^+$  qui viennent s'ajouter à celles initialement présentes dans la solution de  $pH = pH_i = 4,5$ . On a donc  $\boxed{n_{\text{H}^+} = 2n_{\text{SO}_2} + C^\circ V_0 10^{-pH_i}}$  où  $C^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  est la concentration de référence standard.

34. On ne peut pas réaliser un dosage acido-basique traditionnel parce que l'on va doser en même temps  $\boxed{\text{H}_2\text{CO}_3}$  qui est la conséquence de la présence du dioxyde de carbone dans l'atmosphère.

35. La dissolution du borax est :  $\boxed{\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 2\text{Na}^+ + \text{B}_4\text{O}_7^{2-} + 10\text{H}_2\text{O}}$ .

36. La réaction produit autant de forme acide que de forme basique, on a  $\boxed{pH = pK_A(\text{H}_3\text{BO}_3/\text{B}(\text{OH})_4^-) = 9,2}$ .

37. À  $pH_i = 4,5$ ,  $\text{H}_2\text{CO}_3$  reste sous forme acide, il ne libère pas d'ions  $\text{H}^+$ . Comme  $\text{SO}_2$  produit des ions  $\text{H}^+$ , le  $pH$  a tendance à baisser ce qui le maintient dans le domaine de prédominance de  $\text{H}_2\text{CO}_3$ . Le dioxyde de carbone ne perturbe donc pas la mesure. On utilise une solution de borax de concentration  $C_{\text{borax}} = \frac{m_{\text{borax}}}{M_{\text{borax}} V} = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On retrouve le  $pH$  initial pour  $V_{\text{borax}} = 9,4 \text{ mL}$ . Cela correspond à  $n_{\text{borax}} = 9,4 \times 10^{-7} \text{ mol}$ . Cela constitue un apport de  $\text{B}(\text{OH})_4^-$  de  $n_{\text{B}(\text{OH})_4^-} = 2n_{\text{borax}} = 1,88 \times 10^{-6} \text{ mol}$ . Il y a  $2n_{\text{SO}_2} = n_{\text{H}^+}^{\text{libérés}}$  et comme lors de la réaction on a  $\text{B}(\text{OH})_4^- + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{H}_3\text{BO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ , on a  $n_{\text{B}(\text{OH})_4^-} = n_{\text{H}^+}^{\text{libérés}} = 2n_{\text{SO}_2}$ . On trouve donc que  $n_{\text{SO}_2} = \frac{n_{\text{B}(\text{OH})_4^-}}{2} = 9,4 \times 10^{-7} \text{ mol}$ . C'est cette quantité de matière qui a été captée par la solution dans le barboteur pendant les 15 minutes de pompage. On a donc  $m_{\text{SO}_2} = n_{\text{SO}_2} M_{\text{SO}_2} = 60 \mu\text{g}$ . Cette masse provient du volume d'air  $V_{\text{air}} = D_a \Delta t_{\text{exp}} = 45 \text{ L}$ . On a donc  $\boxed{[\text{SO}_2]_{\text{gaz,air}} = 1330 \mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}}$  d'air.

38. La valeur obtenue de la concentration en  $\text{SO}_{2\text{gaz}}$  détectées à Lambeth durant le mois de décembre 1952 est  $\boxed{\text{considérable}}$ . En effet, elle représente 10 fois la limite journalière et cela sur 6 jours consécutifs ! C'est dangereux pour la santé.

## D. Un exemple de pollution naturelle

### Éjection de $\text{SO}_2$ suite à l'éruption du Mont Tambora

39. On a  $\boxed{H = 25,9 \times \log 11 = 27,0 \text{ km}}$  avec  $u(H) = 25,9 \frac{u(V)}{V} = 4,7 \text{ km}$ . On se situe dans la basse stratosphère.

40. Il y a dans la stratosphère 500 millions de tonnes de  $\text{SO}_4^{2-}$ , cela représente  $500 \times \frac{M_{\text{SO}_2}}{M_{\text{SO}_4^{2-}}} = 334$  millions de tonnes de  $\text{SO}_2$ . Si on envoie 55 millions de tonnes, c'est  $\boxed{1/6}$  de la masse déjà présente. Il n'est pas étonnant que cela ait des répercussions importantes.

### Effet sur le climat

41. On raisonne toujours en régime permanent. La conservation du flux solaire impose que ce qui n'est pas transmis est  $F_s(1 - \exp(-\delta))$ . Ce flux est soit diffusé vers le haut  $F_u$ , soit diffusé vers le bas  $F_d$ . On a donc  $F_s(1 - \exp(-\delta)) = F_d + F_u$ . Ce flux total diffusé est tel qu'une fraction  $\beta$  est diffusée vers l'espace, on a donc  $\boxed{F_u = F_s \beta(1 - \exp(-\delta))}$  et  $\boxed{F_d = (1 - \beta)F_s(1 - \exp(-\delta))}$ .

42. Avec la réponse précédente, on obtient  $\boxed{A^* = \beta(1 - \exp(-\delta))}$ .

43. Pour l'été 1816 aux latitudes moyennes de l'hémisphère nord, on lit  $\Delta m = \frac{\delta}{0,921} = 0,85$ . On en déduit que  $\delta = 0,78$  et comme  $\beta = 0,17$ , on arrive à  $\boxed{A^* \simeq 0,092}$ .

44. On a  $\boxed{F_u = A^* F_s}$ . La couche d'aérosols étant en régime permanent, elle ne stocke pas d'énergie, elle n'en perd pas non plus. Le flux arrivant sur le sol est donc  $\boxed{(1 - A^*) F_s}$ .

45. Comme  $A^* \simeq 0,09$ , on a environ  $\boxed{91\%}$  du flux qui repart vers le sol.

46. Le flux solaire va subir des divisions successives à chaque réflexion-transmission sur la couche d'aérosols et sur les basses couches de l'atmosphère. La première réflexion entraîne un coefficient  $A^*$ . C'est le premier terme de la série de termes composant  $A_T$ . Le flux transmis  $(1 - A^*)$  arrive sur les basses couches de l'atmosphère et s'y réfléchit avec le coefficient  $A_0$ . Il revient donc vers la couche d'aérosols. La partie transmise est  $(1 - A^*)$ . Nous tenons le second terme. On a donc  $A_T = A^* + A_0(1 - A^*)^2 + \dots$ . Revenons au flux qui a subi une

réflexion avec  $A_0$  revenant sur la couche d'aérosols, il est réfléchi avec  $A^*$ , retourne sur les basses couches où il se réfléchira avec  $A_0$  et reviendra à nouveau vers la couche d'aérosols où il sera transmis avec  $(1 - A^*)$  ou réfléchi. Le flux transmis sera de la forme  $A_0^2(1 - A^*)^2 A^*$ . Nous venons de trouver le terme suivant. On peut écrire que  $A_T = A^* + A_0(1 - A^*)^2 + A_0^2(1 - A^*)^2 A^* + \dots$ . Avec un schéma représentant les divisions successives du flux initial, on peut généraliser  $A_T = A^* + A_0(1 - A^*)^2 + A_0^2(1 - A^*)^2 A^* + A_0^3(1 - A^*)^2 A^{*2} + \dots$ . On peut encore écrire cette somme sous la forme  $A_T = A^* + A_0(1 - A^*)^2(1 + A_0 A^* + (A_0 A^*)^2 + (A_0 A^*)^3 + \dots)$ . Comme  $A_0 A^* < 1$ , la parenthèse de la formule précédente est une somme géométrique infinie qui converge et qui possède comme limite  $\frac{1}{1 - A_0 A^*}$ . Cela conduit au résultat demandé :  $A_T = A^* + \frac{A_0(1 - A^*)^2}{1 - A_0 A^*}$ . On trouve  $A_T = 0,355$ . L'effet de la couche d'aérosols est notable puisqu'au départ, on avait  $A_0 = 0,31$  et on se retrouve avec  $A_T \simeq 0,36$ .

47. En l'absence d'aérosols, on traduit le fait que toute l'énergie qui arrive doit repartir. On a donc la relation de conservation  $F_s = A_0 F_s + (1 - \frac{f}{2})\sigma T_T^4$ . On en déduit que  $f = 2[1 - (1 - A_0)\frac{F_s}{\sigma T_T^4}]$ . On trouve  $f = 0,79$ .

48. On a  $F_{out} - \Delta F = A_T F_s + (1 - \frac{f}{2})\sigma T_T^4$ . Mais nous venons de voir que  $(1 - A_0)F_s = (1 - \frac{f}{2})\sigma T_T^4$ . Comme l'équilibre thermique impose  $F_{out} = F_s$ , on peut donc en déduire que  $\Delta F = (A_0 - A_T)F_s$ . Comme  $A_0 < A_T$ , le forçage radiatif est négatif. On trouve  $\Delta F = -17 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

49. On écrit la condition d'équilibre thermique à  $T_T + \Delta T$  avec  $\Delta T \ll T_T$ . On a donc  $F_s = A_T F_s + (1 - \frac{f}{2})\sigma(T_T + \Delta T)^4$ . On effectue un développement limité à l'ordre 1 de la loi de température en  $\Delta T$ . On obtient  $(T_T + \Delta T)^4 \simeq T_T^4 + 4\Delta T T_T^3$ . En utilisant cette relation et le fait que  $(1 - A_0)F_s = \sigma T_T^4$ , on arrive effectivement à la formule  $\Delta T = \frac{\Delta F}{4\sigma(1 - \frac{f}{2})T_T^3}$ .

50. Avec ce modèle, on trouve  $\Delta T = -5^\circ \text{C}$ .

51. Le résultat précédent donne une valeur un peu grande de la baisse de température puisqu'elle dépasse la baisse de température à Genève qui était de  $3,8^\circ \text{C}$  en moyenne. L'utilisation des cernes des arbres n'est pas convaincante parce que sans doute les pluies importantes ont sans doute favorisé la croissance compensant en partie (au moins) la baisse de température. On peut aussi critiquer ce modèle parce que l'on n'a pas tenu compte de la variation de  $A_0$ . En effet, si les températures baissent, on a plus de surfaces enneigées qui visent à renforcer  $A_0$ .