Devoir de Sciences Physiques n°6 du 29-01-2024

— *Solutions* —

Problème nº 1 – Piégeage de molécules polaires

X PC 2005

A. Analyse des symétries

1. L'invariance par translation du système selon l'axe Oz provoque $\boxed{\text{l'indépendance en } z}$ du potentiel V et des composantes du champ $\vec{E}$.

2. Tout plan perpendiculaire à l'axe de la forme Mxy est un plan de symétrie Π^+. Le champ électrique appartient aux plans de symétries par conséquent, on peut conclure que : $\boxed{\vec{E} = E_r(r,\theta)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta}$.

3. Les trois plans passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées sont aussi des plans Π^+. Le champ y appartient. Comme il doit aussi appartenir au plan de symétrie précédent, on en déduit que le champ électrique est orienté selon l'intersection. Pour tout point M appartenant à une direction C_iC_{i+3} le champ électrique sera aligné sur cette direction : $\boxed{\vec{E} \in C_iC_{i+3}}$.

4. Tous les plans situés à égale distance des électrodes sont des plans d'antisymétrie Π^-. Or un champ électrique est perpendiculaire à un Π^- donc un tel plan est une $\boxed{\text{surface équipotentielle}}$ car $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ ce qui permet d'écrire que $\mathrm{d}V = \overrightarrow{grad}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$. Si $\vec{E}$ est perpendiculaire au déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l}$ alors on constate bien que $\mathrm{d}V = 0$.

5. De façon assez évidente, on constate que la période angulaire laissant le système invariant est de $\frac{2\pi}{3}$: on a donc $V(r,\theta) = V(r,\theta+\frac{2\pi}{3})$. À condition de pouvoir envisager de rechercher une solution à variables séparées, on peut proposer un développement en série de FOURIER sur la variable θ. La période fondamentale étant $\frac{2\pi}{3}$, cela correspond à une pulsation du fondamental de 3. Les harmoniques auront donc une pulsation de la forme $3n$ où $n \in \mathbb{N}$. On définira l'angle θ par rapport à l'axe Ox comme c'est le cas habituellement. On peut constater que puisque le plan Oxz est un Π^+ que le potentiel sera paire en θ : $V(r,\theta) = V(r,-\theta)$. Le développement en série de FOURIER sera donc uniquement constitué de cosinus. On peut proposer : $\boxed{V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\cos 3n\theta}$.

6. En appliquant le théorème de GAUSS à une surface fermée cylindrique centrée sur l'axe de la distribution, de hauteur h et de rayon r_i, on arrive aisément à : $2\pi r_i h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ ce qui permet de donner l'expression vectorielle : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_i}\vec{e}_{ri}$. Le potentiel pour un fil unique sera de la forme : $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_i}\vec{e}_{ri} = -\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}r_i}\vec{e}_{ri}$. On en déduit que : $\boxed{V_i = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_i + \alpha}$ où α est une constante d'intégration indéterminée à ce stade du calcul. Il suffit de poser $r_i = D_i$ pour répondre à la question posée.

7. Par le théorème de superposition, on arrive facilement à l'expression demandée à condition de choisir $V = 0$ sur l'axe Oz ce qui annule la constante d'intégration : $\boxed{V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5}\right)}$.

8. En travaillant dans le plan complexe, on peut écrire $C_1P = \underline{Z} - R$ où on a noté C_1 le centre de la distribution de charge correspondante. De la même façon, on aura $C_2P = \underline{Z} - jR$ et $C_3P = \underline{Z} - j^2R$. Le produit $C_1PC_2PC_3P$ donne après calcul : $C_1PC_2PC_3P = \underline{Z}^3 - (1+j+j^2)\underline{Z}^2R + j(1+j+j^2)\underline{Z}R^2 - j^3R^3$. Or d'après la définition de j, on voit aussitôt que $j^3 = 1$ comme cela est d'ailleurs indiqué dans l'énoncé. On peut aussi montrer que $1+j+j^2 = 0$ puisque $j = \exp i\frac{2\pi}{3}$ et $j^2 = \exp i\frac{4\pi}{3} = \exp -i\frac{2\pi}{3}$. Cela nous permet décrire que $1+j+j^2 = 1 + \exp i\frac{2\pi}{3} + \exp -i\frac{2\pi}{3} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} = 0$ puisque $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. On a donc : $D_1D_3D_5 = |C_1PC_2PC_3P| = |\underline{Z}^3 - R^3|$. Pour l'autre calcul, il suffit de changer R en $-R$ et on trouve, en tenant compte de $|\underline{Z}^3 - R^3| = |R^3 - \underline{Z}^3|$ que : $\boxed{\frac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5} = \left|\frac{R^3+\underline{Z}^3}{R^3-\underline{Z}^3}\right|}$.

9. On effectue un développement limité à l'ordre le plus bas non nul en $\frac{r}{R}$. On a donc : $\frac{R^3+\underline{Z}^3}{R^3-\underline{Z}^3} \simeq (1+\frac{\underline{Z}^3}{R^3})^2 \simeq 1 + 2\frac{r^3}{R^3}\exp i3\theta$. On développe selon : $\frac{R^3+\underline{Z}^3}{R^3-\underline{Z}^3} = 1 + 2\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta + i2\frac{r^3}{R^3}\sin 3\theta$. Le module vaudra : $\sqrt{(1+2\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta)^2 + 4\frac{r^6}{R^6}\sin^2 3\theta}$. On ne garde que les termes en $\frac{r^3}{R^3}$ et il vient alors : $|\frac{R^3+\underline{Z}^3}{R^3-\underline{Z}^3}| \simeq 1 + 2\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta$. Avec un développement limité du logarithme $\ln(1+\epsilon) = \epsilon$, on obtient : $\boxed{V(r,\theta) \simeq \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta}$.

10. On choisit par exemple de travailler avec C_1. La distribution de charge est équipotentielle, on se placera à la surface de C_1. On voit facilement que : $D_1 = a$, $D_4 = 2R$, $D_2 = D_6 = R$. Il reste $D_2 = D_5 = R\sqrt{3}$ que l'on obtient par des relations trigonométriques classiques des triangles à l'intérieur d'un losange de côté R. À l'aide de la formule exacte calculée précédemment, on trouve : $\boxed{V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2R}{3a}}$. Le potentiel des électrodes paires est $-V_0$ par antisymétrie.

11. Une unité de longueur du système correspond pour les électrodes positives à une charge $q_u = 3\lambda$ et à -3λ pour les autres. La différence de potentiel entre les trois électrodes positives et les trois électrodes négatives est : $V_0 - (-V_0) = 2V_0$. La capacité linéique du dispositif est donc : $\boxed{C = \frac{3\lambda}{2V_0}}$. On peut encore réécrire le potentiel au voisinage de l'axe selon : $V(r,\theta) = \frac{6V_0}{\ln\frac{2R}{3a}}\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta$.

12. On trouve : $\boxed{C = \frac{3\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2R}{3a}} = 4,4\times 10^{-11}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$.

B. Mouvement des molécules polaires dans un hexapôle électrostatique

13. On a : $E_{pot} = -\vec{d}\cdot\vec{E}$; avec la définition proposée : $\boxed{E_{pot} = -d_{eff}|\vec{E}|}$.

14. On a $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = \frac{3\lambda r^2}{\pi\varepsilon_0 R^3}[-cos3\theta\vec{e}_r + \sin 3\theta\vec{e}_\theta]$. Le module du champ s'écrit alors : $|\vec{E}| = \frac{3\lambda r^2}{\pi\varepsilon_0 R^3}$ d'où une énergie potentielle : $\boxed{E_{pot} = -d_{eff}\frac{3\lambda r^2}{\pi\varepsilon_0 R^3}}$. d_{eff} étant fixé, il n'y aura qu'une seule force radiale sur $\vec{e}_r$ puisque l'énergie potentielle ne dépend que de r. On trouve : $\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = \frac{d_{eff}6\lambda r}{\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{e}_r$.

15. En négligeant toute autre force que celle déterminée avant, on obtient l'équation différentielle : $m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + K\vec{r} = \vec{0}$ avec $K = -\frac{d_{eff}6\lambda}{\pi\varepsilon_0 R^3}$. Le mouvement sera borné et périodique uniquement si $K > 0$ c'est-à-dire si $d_{eff} < 0$. On interprétera la notion de fréquence angulaire par la notion traditionnelle de pulsation : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{-d_{eff}6\lambda}{m\pi\varepsilon_0 R^3}}}$. Les molécules ayant un $d_{eff} > 0$ vont avoir un mouvement divergent en exponentiel au voisinage de l'axe et vont quitter ce voisinage très rapidement pour ensuite posséder un mouvement plus complexe car l'expression générale de $V(r,\theta)$ et de $\vec{E}$ est elle aussi plus complexe. Quoi qu'il en soit, ces molécules ne repasseront pas par l'axe.

16. En passant en coordonnées cartésiennes et en projetant l'équation différentielle, on obtient deux équation équivalentes : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$. La solution pour x est de la forme : $x = \alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t$. Les conditions initiales sont $x = 0$ et $\dot{x} = v_{0x}$. Elles sont complètement équivalentes sur y et finalement la solution obtenue est : $\boxed{x = \frac{v_{0x}}{\omega_0}\sin\omega_0 t \text{ et } y = \frac{v_{0y}}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$. Il n'y a pas de force sur l'axe Oz, le mouvement y est donc uniforme et $\boxed{z = v_{0z}t}$.

17. On a déjà vu que les molécules possédant $d_{eff} > 0$ ne pouvait pas se refocaliser. Pour les autres, la durée et par conséquent la distance de refocalisation sera différente puisque la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ dépend de d_{eff}. Cette distance de refocalisation sera obtenue lorsque la molécule repasse par l'axe ($x = 0$ et $y = 0$), cela se produit après une demi-période $\frac{T_0}{2}$. La distance parcourue sur l'axe z sera : $\boxed{L = \frac{v_{0z}\pi}{\omega_0}}$.

18. On a : $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v} = Av^2\exp-\frac{mv^2}{2k_BT}$. La vitesse la plus probable correspond au maximum de cette fonction. Pour le trouver, il faut calculer sa dérivée en v c'est-à-dire : $\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}v^2}$. On trouve que $\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}v^2} = A\exp-\frac{mv^2}{2k_BT}[2v - \frac{mv^3}{k_BT}] = 0$ conduit à $\frac{1}{2}mv_{ppb}^2 = k_BT$ ce qui donne enfin : $\boxed{v_{ppb} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}}$. On appelle vitesse quadratique la vitesse moyenne à l'équilibre thermique. Ici, on envisage le problème de la translation avec 3 degrés de liberté de mouvement (x, y et z) et on sait qu'il y a $\frac{1}{2}k_BT$ par degré de liberté pour l'énergie cinétique. La vitesse quadratique moyenne est donc donnée par $\frac{1}{2}mv_q^2 = \frac{3}{2}k_BT$ ce qui donne : $v_q = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$. On constate bien que la vitesse quadratique et la vitesse la plus probable diffèrent : $\boxed{v_q = \sqrt{\frac{3}{2}}v_{ppb}}$.

19. On remarque tout d'abord que : $\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} = \frac{2V_0}{\ln\frac{2R}{3a}}$. Cela permet d'exprimer la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{|d_{eff}|12V_0}{mR^3\ln\frac{2R}{3a}}} = 1,04\times 10^3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. La fréquence est donc : $\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 165\,\mathrm{Hz}}$. La vitesse la plus probable est : $v_{ppb} = 262\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. En supposant que cette vitesse la plus probable correspond à l'ordre de grandeur de v_{0z}, on en déduit que l'abscisse du premier de retour sur l'axe est : $\boxed{z_P = \frac{v_{ppb}}{2f_0} \simeq 0,8\,\mathrm{m}}$.

Problème n° 2 – Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Centrale MP 2016

A. Aurores polaires terrestres

1. Les $\boxed{\text{particules cosmiques frappent des molécules de l'atmosphère}}$ qui changent de niveau d'énergie et qui, en revenant, dans leur niveau fondamental émettent des photons dans le visible.

2. Une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît simultanément à une aurore australe car il y a une symétrie par rapport au flux solaire. De plus, les particules cosmiques vont $\boxed{\text{suivre les lignes de champ magnétique}}$ et arriver aux deux pôles.

3. Les lignes de champ sont déformées sous l'effet du vent solaire mais on reste relativement proche des $\boxed{\text{lignes de champ du dipôle magnétostatique}}$.

B. Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

4. La norme de la force gravitationnelle est $F_g = \frac{\mathcal{G}mm_T}{R_T^2} \simeq 10^{-29}\,\text{N}$. Il faut comparer cette force à la partie magnétique de la force de Lorentz $F = ev_0B_0$. L'ordre de grandeur de B_0 est de $10^{-5}\,\text{T}$, la vitesse $v_0 \simeq 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On peut très raisonnablement proposer $F \simeq 10^{-17}\,\text{N}$. On constate bien que l'on a $\boxed{F_g \ll F}$.

5. Si la vitesse initiale de la particule s'écrit $\vec{v}_0 = v_{Oz}\vec{e}_z$, la force de Lorentz est nulle car son expression vectorielle est $\vec{F} = -e\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}$ car la vitesse et le champ sont colinéaires. Le mouvement de la particule est donc $\boxed{\text{rectiligne uniforme}}$. Elle suit donc la ligne de champ magnétique supposée rectiligne. Toutefois, il faut comprendre que tout change si la ligne de champ magnétique se courbe.

6. Le mouvement va rester dans le plan Oxy puisqu'il n'y a pas de vitesse initiale sur $\vec{e}_z$ et comme le champ magnétique est sur $\vec{e}_z$, il n'y aura jamais de force orientée sur $\vec{e}_z$. On applique la relation de la Dynamique à un électron dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen en supposant qu'il ne subit que la force magnétique. On a donc $m\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y\right) = -e(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y) \wedge B_0\vec{e}_z$. On obtient les deux équations suivantes : $m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -ev_yB_0$ et $m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = ev_xB_0$. Si on dérive la première par rapport au temps et qu'on injecte la seconde, on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e^2B_0^2}{m^2}v_x = 0$. On met bien en évidence la pulsation dite pulsation cyclotron : $\boxed{\omega_c = \frac{eB_0}{m}}$. On a vu que le champ magnétique dipolaire évoluait selon $B_{dip} = \frac{\alpha}{r^3}$. Si l'on se place en orbite géostationnaire, le champ sera plus faible. Si on note B_T le champ magnétique à la surface de la Terre, on a $B_TR_T^3 = B_{\text{géo}}(R_T+h)^3$ où h est l'altitude d'un satellite géostationnaire. Il nous faut donc évaluer l'expression de l'altitude h. Le satellite est supposé en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation correspondant à la rotation de la Terre sur elle même $\omega_s = \frac{2\pi}{1\text{ jour}}$. La relation de la Dynamique appliquée au satellite permet d'écrire que $-\frac{\mathcal{G}m_sm_T}{(R_T+h^2)^2}\vec{e}_r = -m_s\omega_s^2(R_T+h)\vec{e}_r$. On en déduit que $R_T + h = \left(\frac{\mathcal{G}m_T}{\omega_s^2}\right)^{1/3}$. On trouve numériquement $h = 35\,900\,\text{km}$. À partir de là, on peut proposer $B_T = 5\times10^{-5}\,\text{T}$ et trouver $B_{\text{géo}} = B_0 = 1,7\times10^{-7}\,\text{T}$. On en déduit que $\omega_c = \frac{eB_0}{m} = 3\times10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ce qui correspond à une fréquence : $\boxed{f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 4,7\,\text{kHz}}$.

7. Avec le travail effectué avant, on a la même forme d'équation différentielle pour v_x et pour v_y. Les solutions sont donc de la forme $v_x = A\cos\omega_ct + B\sin\omega_ct$ et $v_y = C\cos\omega_ct + D\sin\omega_ct$. À la date $t=0$, on a $v_x = v_{0x}$, cela nous permet d'écrire que $A = v_{0x}$ et $C = 0$. Toujours à la date $t = 0$, on $m\left.\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -ev_y(t=0)B_0 = 0$. On en déduit que $B = 0$. On effectue le même raisonnement sur v_y à la date $t = 0$: $m\left.\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = ev_x(t=0)B_0 = ev_{0x}B_0$. Cela nous permet de calculer la dernière constante d'intégration : $D = v_{0x}$. Finalement, on obtient $v_x = v_{0x}\cos\omega_ct$ et $v_y = v_{0x}\sin\omega_ct$. On intègre et en tenant compte de la position initiale de l'électron à l'origine du repère choisi, on trouve $x = \frac{v_{0x}}{\omega_c}\sin\omega_ct$ et $y = \frac{v_{0x}}{\omega_c}(1-\cos\omega_ct)$. Nous avons établi les équations paramétriques d'un cercle de centre $C(0, \frac{v_{0x}}{\omega_c})$ et de rayon $R_c = \frac{v_{0x}}{\omega_c}$. Son équation cartésienne est : $\boxed{x^2 + (y - \frac{v_{0x}}{\omega_c})^2 = \frac{v_{0x}^2}{\omega_c^2}}$.

8. Une puissance correspond à une force multipliée par une vitesse. On a donc comme dimension pour l'ensemble de l'expression $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On a utiliser la loi de Coulomb pour prendre en compte la dimension de $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. En effet, on a $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$. On en déduit que la dimension de $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ est $\frac{N\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$. On en déduit une équation dimensionnelle : $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = \frac{N\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}e^\alpha c^\beta m^2\cdot\text{s}^{-4}$. On peut donc en conclure que l'expression dimensionnelle $e^{\alpha-2}c^{\beta-1}m^4\cdot\text{s}^{-4}$ est sans dimension. Il faut donc que $\boxed{\alpha = 2 \text{ et } \beta = -3}$.

9. On peut faire l'hypothèse d'un mouvement de l'électron quasi-circulaire, son accélération est $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{v^2}{R_c}\vec{e}_r$ où R_c est le rayon du cercle. Le mouvement est uniforme car la force magnétique ne travaille pas puisqu'elle est toujours perpendiculaire à la vitesse. L'expression de la puissance rayonnée est donc $\mathcal{P} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\frac{v^4}{R_c^2}$. De plus, le rayon du cercle $R_c = \frac{mv}{eB_0}$ permet d'exprimer la puissance et l'énergie cinétique : $\mathcal{P} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\frac{e^4 B_0^4 R_C^2}{m^4}$ et $E_c = \frac{e^2 B_0^2 R_C^2}{2m}$. Par le théorème de la puissance cinétique, on a $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = -P$. On en déduit que $R_c\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^4 B_0^2 R_c^2}{m^3 c^3}$. Après simplification et introduction de la pulsation cyclotron, on arrive à l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{6\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_c^3}{B_0 c^3} R_c$. On obtient bien l'équation différentielle proposée avec le temps caractéristique τ : $\boxed{\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} + \frac{R_c}{\tau} = 0}$. La solution est $R_c(t) = R_{c0} \exp -\frac{t}{\tau}$. Très rapidement, en quelques τ, le mouvement circulaire de l'électron va diminuer de rayon et la trajectoire devenir une droite aligné sur la ligne de champ qui est selon $B_0\vec{e}_z$. Les charges ont tendance à s'enrouler autour de la ligne de champ en étant de plus en plus serrées autour de la ligne de champ. On peut évaluer l'ordre de grandeur de $\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 B_{\text{géo}}}{e\omega_c^3}$. Avec $\omega_c = 3\times 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $B_{\text{géo}} = 1,7\times 10^{-7}\,\mathrm{T}$, on trouve $\tau \simeq 10^{14}\,\mathrm{s}$. L'amortissement du rayon du cercle est très lent. Il ne sera pas perceptible même si une particule suit une ligne de champ qui va du pôle Sud au pôle Nord. La puissance rayonnée est négligeable dans cette étude.

10. Il faut superposer les deux études précédentes : un mouvement rectiligne uniforme sur Oz et un mouvement circulaire dans le plan Oxy. On obtient un mouvement hélicoïdal. La trajectoire est une $\boxed{\text{hélice régulière}}$ d'axe Oz.

C. Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et non uniforme

11. L'équation de MAXWELL-THOMSON encore appelée MAXWELL-flux est $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$. En utilisant l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques et en tenant compte du fait de l'invariance par rotation autour de l'axe Oz, on obtient $\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. On peut réécrire cette équation selon $\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -r\frac{\partial B_z}{\partial z}$. On suppose que $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ est à peu près constant sur le domaine d'intégration en r que l'on envisage. On arrive alors $rB_r = -\frac{r^2}{2}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} + \mathrm{Cte}$. Il n'y a aucune raison pour que le champ magnétique diverge en $r=0$. On peut donc en déduire que $\mathrm{Cte} = 0$. On obtient bien l'équation proposée par l'énoncé : $\boxed{B_r = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}}$.

12. Si L est la longueur caractéristique sur l'axe Oz, on peut écrire que $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} = \frac{B_z}{L}$. On en déduit que $B_r \simeq -\frac{r}{2L}B_z$. Le champ magnétique radial est considéré comme une perturbation si $B_r \ll B_z$. Cela correspond à la condition : $\boxed{r \ll L}$.

13. Les calculs du début du problème sont suffisants pour répondre à la question $R(z) = \frac{mv_\theta}{eB_z}$.

14. Le moment cinétique est $\mathcal{L}_z$ vient de la définition vectorielle $\vec{\mathcal{L}} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}$. On obtient facilement $\mathcal{L}_z = mR(z)v_\theta$. On a supposé ici que l'électron tournait autour de l'axe Oz dans le trigonométrique. À son mouvement correspond un courant i orienté dans l'autre sens que l'on évalue en disant qu'il correspond à une charge e qui passe en un endroit donné une fois par période $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ où ω_c est toujours la pulsation cyclotron. On a donc $i = -\frac{e}{T_c} = -\frac{e\omega_c}{2\pi} = -\frac{e^2 B_z}{2\pi m}$. Le moment magnétique correspondant est sur $\vec{e}_z$. On a $\mathcal{M}_z = i\pi R(z)^2 = -\frac{e^2 B_z R(z)^2}{2m}$. On démontre bien ainsi la propriété : $\boxed{\mathcal{M}_z = -\frac{e}{2m}\mathcal{L}_z}$.

15. On considère maintenant l'électron comme un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique. Il subit le couple $\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B}$. Comme $\vec{\mathcal{M}}$ est orienté sur $\vec{e}_z$ et que $\vec{B}$ est lui aussi orienté sur $\vec{e}_z$, le couple subi est nul. Le théorème du moment cinétique est donc $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B} = \vec{0}$. On a donc $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = 0$. Le moment cinétique sur $\vec{e}_z$ est donc constant. On a donc automatiquement $\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}_z}{\mathrm{d}t} = 0}$.

16. On assimile l'électron à un moment dipolaire de masse m qui se déplace uniquement sur l'axe Oz plongé dans le champ magnétique $\vec{B}$. L'électron possède alors l'énergie potentielle $-\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B} = -\mathcal{M}_z B_z = \frac{eB_0}{2m}\mathcal{L}_z(1+\frac{z^2}{L^2})$. Son énergie mécanique est $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{eB_0}{2m}\mathcal{L}_z(1+\frac{z^2}{L^2})$. Elle est constante puisqu'il n'y a pas de forces non conservatives. En la dérivant par rapport au temps, on obtient une équation d'oscillateur harmonique $\ddot{z} + \frac{eB_0\mathcal{L}_z}{m^2L^2}z = 0$. Les solutions sont de la forme $z(t) = A\cos(\omega_m t + \varphi)$ avec $\boxed{\omega_m = \frac{\sqrt{eB_0\mathcal{L}_z}}{mL}}$. On voit bien que z va être compris entre $-A$ et A qui sont les deux positions des miroirs magnétiques. Ces positions dépendent des conditions initiales. Pour évaluer la pulsation et donc la fréquence du mouvement, il va falloir proposer une évaluation de $\mathcal{L}_z$. On a $eB_0\mathcal{L}_z = eB_0 mRv_\theta$ Or, $R = \frac{mv_\theta}{eB_0}$. On en déduit que $\omega_m = \frac{\sqrt{m^2 v_\theta^2}}{mL}$. On trouve $\omega_m = \frac{v_\theta}{L}$. La période est $T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi L}{v_\theta}$. La longueur parcourue correspond à l'aller et au retour, cela représente un parcours $L = 2\pi R_T$. On a donc une période qui s'exprime selon : $T_m = \frac{4\pi^2 R_T}{v_\theta}$. Nous allons prendre comme vitesse raisonnable pour l'électron $v_\theta = 10^7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, cela le maintient dans le domaine classique et c'est un bon ordre de grandeur. On trouve alors $T_m = 25\,\mathrm{s}$.

17. La puissance rayonnée donnée par l'énoncé est proportionnelle au carré de l'accélération, ce qui fait qu'elle est proportionnelle au champ magnétique au carré. Ce sont donc les régions où les lignes de champ sont les plus resserrées qui sont celles où le champ est le plus élevé qui vont être plus propice à l'émission. On aura donc des régions plutôt proches des pôles. Sur le plan spectral, il s'agit de la pulsation cyclotron en altitude par rapport à la Terre. On avait trouvé une fréquence $\boxed{\text{inférieure à } 1\,\text{MHz}}$. Ces fréquences ne peuvent pas se propager dans l'atmosphère puisqu'il faut, en général, une fréquence supérieure à 9 MHz (fréquence plasma). Le signal ne vient pas vers la surface de la Terre. Ces ondes ne vont être vues que par les satellites qui sont suffisamment au-dessus de la Terre.

D. Ceintures de Van Allen

18. Si on prend un électron de 100 MeV, cela correspond à une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 1,6 \times 10^{-11}\,\text{J}$ pour l'électron. Si on effectue l'application numérique, on trouve $v = 6 \times 10^9\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$! Cette vitesse, supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, n'est pas acceptable. La formule que l'on doit utiliser pour l'énergie cinétique est $\boxed{\text{relativiste}}$: $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. On ne doit pas faire des calculs classiques mais des calculs relativistes, ce qui a été fait depuis le début du problème n'est pas adapté à des électrons aussi énergétiques que ceux évoqués par l'énoncé.