

## Devoir de Sciences Physiques n°7 pour le 24-02-2025

### Problème n° 1 – Flexion et flambage de systèmes mécaniques

*X MP*

2022

Nous nous proposons d'étudier quelques phénomènes mettant en oeuvre les propriétés d'élasticité de flexion de systèmes mécaniques particuliers. Dans une première partie, le système mécanique est une chaîne formée par un chapelet d'aimants sphériques. La cohésion de la chaîne est assurée par l'attraction magnétique que les aimants exercent les uns sur les autres. Dans une deuxième partie, la chaîne d'aimants est remplacée par une lame flexible. Dans ces deux situations, il s'agira de relier la hauteur maximale que peuvent atteindre la chaîne et la lame, érigées en édifice vertical, à leurs caractéristiques géométriques et mécaniques. La dernière partie est consacrée à la caractérisation des modes de vibration d'un verre apparaissant lors du passage d'un doigt humide sur son bord. Ces trois parties sont, en grande partie, indépendantes.

#### A. Chaîne d'aimants en interaction magnétique

Nous disposons d'un ensemble de billes sphériques aimantées identiques telles que celles représentées sur la figure 1(a) (leur moment magnétique est représenté par une flèche). Posées sur une table, si elles sont assez proches les unes des autres, elles s'attirent en alignant chacune leur moment magnétique selon une direction commune et forment ainsi une chaîne flexible illustrée par la figure 1(b). Si l'on cherche à placer la chaîne en position verticale, l'aimant inférieur étant maintenu fixe par un support rigide (amagnétique), on constate qu'il existe un nombre maximal  $N_c$  d'aimants en dessous duquel la chaîne reste rectiligne, verticalement, dans le champ de gravité  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ . Légèrement perturbée, elle oscille alors autour de cette configuration stable, comme l'illustre la figure 1(c). Au-delà de cette limite, la situation verticale devient instable et la chaîne fléchit, atteignant une nouvelle situation d'équilibre<sup>1</sup>, comme le représente la figure 1(d).

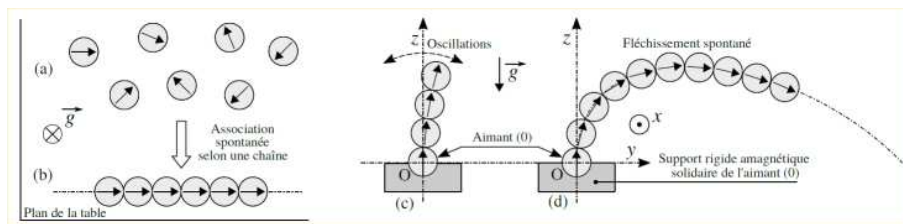


FIGURE 1 – (a) Ensemble d'aimants sphériques posés sur un plan horizontal. (b) Sous l'effet des interactions magnétiques, ces aimants s'attirent en formant une chaîne flexible. (c) Édifice vertical formé par une chaîne courte. Elle peut alors osciller autour de cette position stable. (d) Lorsque la chaîne est longue, la position verticale devient instable, l'édifice fléchit alors sous l'action de la gravité  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ .

Les billes (ou aimants) sont numérotées de 0 à  $N$ . Nous notons  $\vec{\mathcal{M}}_i = M_i\vec{u}_i$  ( $i \in [0, N]$ ) le moment magnétique de la bille ( $i$ ). Nous supposons, d'une part que  $\mathcal{M}_i = \mathcal{M} = \text{Cste} > 0 \forall i \in [0, N]$ , d'autre part que le vecteur unitaire  $\vec{u}_i$  conserve une direction fixe, relativement à la bille ( $i$ ). La bille (0) est fixée sur un support rigide amagnétique de telle manière que son moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}\vec{e}_z$  reste orienté selon l'axe vertical ascendant ( $Oz$ ). Nous considérons que la chaîne se déforme en restant dans le plan  $(O, y, z)$ , comme l'illustrent les figures 1 (c) et (d). Enfin, aucune cause de dissipation de l'énergie mécanique n'est prise en compte.

La figure 2 représente le système de coordonnées polaires  $\mathcal{R}_\theta = (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$  permettant le repérage d'un point  $P = P(r, \theta)$  du plan  $(O, y, z)$ .

#### Notations, données et formulaire.

Pour les applications numériques, nous adopterons les valeurs suivantes :

- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
- Module de l'accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Diamètre d'une bille :  $D = 13 \text{ mm}$
- Densité volumique de moment magnétique du matériau (ce matériau est du néodyme) constituant les aimants :  $M_v = 9 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$
- Masse volumique des billes :  $\rho = 7,5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

1. Cette situation fortement fléchie sort du cadre de la réponse linéaire que nous nous fixerons.

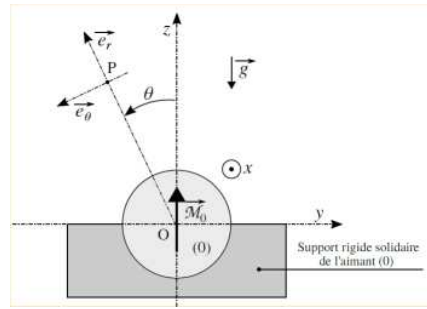


FIGURE 2 – Repérage d'un point  $P = P(r, \theta)$  du plan  $(O, y, z)$  dans le système de coordonnées polaires  $\mathcal{R}_\theta = (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$  choisi.

— Masse d'une bille :  $m = 10 \text{ g}$

Le développement à l'ordre  $N$ , au voisinage de zéro, de la fonction exponentielle s'exprime par la relation suivante :

$$\exp i\theta = \sum_{k=0}^N \frac{(i\theta)^k}{k!} \quad (i^2 = -1)$$

Le moment d'inertie  $J$  d'une bille homogène de masse  $m$  et de diamètre  $D$ , autour d'un axe passant par son centre, s'exprime selon la relation  $J = mD^2/10$ .

Le champ magnétique créé par une bille sphérique uniformément magnétisée est, dans tout l'espace extérieur à la bille, celui d'un dipôle magnétique ponctuel placé en son centre. En particulier, pour la bille (0) représentée à la figure 2, portant le moment magnétique  $\vec{M}_0 = M\vec{e}_z$ , il s'exprime selon la relation suivante :

$$\vec{B}_0(P) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r(\theta) + \sin \theta \vec{e}_\theta(\theta)) \quad \text{où} \quad r = \|\vec{OP}\| \geq D/2$$

Nous considérerons toutefois que cette expression reste valable pour toute distance  $r$  (non nulle). Ce qui revient à considérer que, d'un point de vue magnétique, le rayon des billes tend vers 0.

### Caractérisation du champ magnétique créé par un aimant

1. Représenter l'allure des lignes de champ (orientées) de l'aimant (0).
2. Exprimer, dans le repère  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ , le champ  $\vec{B}_0(P(r, \theta))$  correspondant à chacun des points suivants :  $P_1 = P(D, 0)$ ,  $P_2 = P(D, \pi/2)$ ,  $P_3 = P(D, \pi)$  et  $P_4 = P(D, 3\pi/2)$ .
3. Exprimer la composante  $\vec{B}_0(P_1) \cdot \vec{e}_z$  en fonction de  $\mu_0$  et  $M_v$ . Estimer sa valeur et la commenter brièvement.

### Maillon formé de deux billes

Nous plaçons la bille (1) sur la bille fixe (0), comme le représente la figure 3(a). Par interaction magnétique, l'aimant (0) exerce alors sur l'aimant (1) une force ainsi qu'un moment. Ce dernier tend à aligner  $\vec{M}_1$  selon  $\vec{M}_0$ . La force d'attraction entre les aimants est suffisamment forte pour que nous puissions considérer, d'une part que les aimants restent toujours en contact ( $\forall \theta \in [-\pi, +\pi]$ ), d'autre part que le roulement de l'aimant (1) sur l'aimant (0), lorsqu'il se produit, s'effectue sans glissement. L'angle  $\theta$  suffit alors à caractériser la situation de la bille (1) (se reporter à la figure 3(b)).

Nous associons l'origine des énergies potentielles à la configuration représentée sur la figure 3(a), choisie comme référence.

4. En remarquant que les points  $I_0$  et  $I_1$ , représentés sur la figure 3(b), étaient initialement confondus (c'est-à-dire pour  $\theta = 0$ ), justifier que  $\theta_1 = 2\theta$ .
5. Établir l'inventaire des actions mécaniques qui s'exercent sur l'aimant (1). Il ne s'agit que d'un inventaire, on ne cherchera donc pas à expliciter chacune de ces actions mécaniques.
6. Justifier que l'énergie mécanique du système  $\{(0), (1)\}$  (en interaction gravitationnelle avec la Terre) est conservée.
7. Exprimer, en fonction de  $M$  et de l'angle  $\theta$ , le moment magnétique  $\vec{M}_1$  dans la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$ .
8. Exprimer l'énergie potentielle magnétique  $E_B$  de couplage entre les dipôles  $\vec{M}_0$  et  $\vec{M}_1$ . Nous l'écrirons sous la forme suivante :

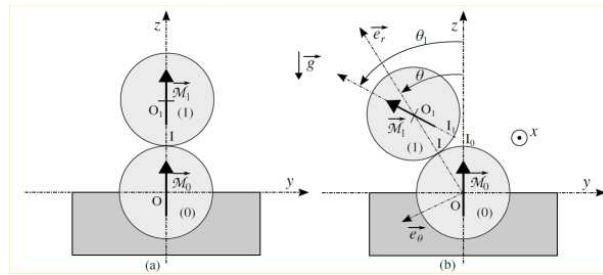


FIGURE 3 – (a) La bille (1) est posée sur la bille (0) fixe. (b) La situation de la bille (1) est caractérisée par les angles  $\theta$  et  $\theta_1 = \theta_1(\theta)$ .

$$E_B = \frac{1}{2}K(\sin \theta)^2$$

Le paramètre  $K$  est une constante positive que l'on exprimera en fonction de  $\mu_0$ ,  $M_v$  et  $D$ .

**9.** Lors du roulement de la bille (1) sur la bille (0) (fixe), le centre de masse  $O_1$  de la bille (1) décrit un arc de cercle de rayon  $D$  et d'angle au centre égal à  $\theta$  (se reporter à la figure 3(b)). Ce mouvement s'accompagne, parallèlement, de la rotation de l'angle  $\theta_1$  de la bille (1), déterminé en réponse à la question 4.. Exprimer l'énergie cinétique  $E_{c1}$  de la bille (1), somme des énergies cinétiques associées à chacune des composantes de mouvement que nous venons de présenter. On exprimera ce résultat en fonction de  $m$ ,  $D$ ,  $J$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\theta}_1$ .

**10.** Nous écrivons l'énergie  $E_{c1}$  sous la forme suivante :

$$E_{c1} = \frac{1}{2}J' \dot{\theta}^2$$

Exprimer  $J'$  en fonction de la masse  $m$  et du diamètre  $D$ .

**11.** Exprimer, en fonction des paramètres  $m$ ,  $g$ ,  $D$  et de l'angle  $\theta$ , l'énergie potentielle gravitationnelle  $E_{g1}$  de la bille (1) dans la situation représentée sur la figure 3(b).

**12.** Représenter, sur un graphe commun, l'allure graphique de la dépendance (qualitativement), vis-à-vis de l'angle  $\theta$ , de chacune des énergies potentielles  $E_B$  et  $E_{g1}$ , pour  $\theta \in [-\pi, +\pi]$  (c'est-à-dire sans tenir compte de la présence du support maintenant la bille (0)). Analyser ces résultats.

**13.** Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$ . On conservera les paramètres  $K$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $D$  et  $J'$ .

**14.** Déterminer à quelle condition la configuration correspondant à  $\theta = 0$  est stable (ou métastable<sup>2</sup>). On fera porter cette condition sur le paramètre  $S$  défini par le rapport suivant :

$$S = \frac{K}{mgD}$$

On proposera une interprétation physique de ce rapport.

**15.** Pour les valeurs des paramètres adoptées nous obtenons  $S \simeq 100$ . Conclure quant à l'état de stabilité de la configuration correspondant à  $\theta = 0$ .

**16.** Exprimer, en tenant compte de la valeur du paramètre  $S$ , la pulsation  $\omega_1$  des oscillations de la bille (1) autour de la configuration correspondant à  $\theta = 0$ , dans l'approximation linéaire. On exprimera cette pulsation en fonction de  $S$ ,  $g$  et  $D$ . Estimer la valeur de la fréquence  $f_1$  correspondante.

### Édifice formé de $N$ billes.

Nous considérons un édifice, constitué de  $N$  aimants, reposant sur l'aimant fixe (0), comme le représente la figure 1(c) pour  $N = 3$ . Il s'agit d'étudier la stabilité de cet édifice dans la configuration rectiligne verticale. Cette étude est conduite dans le cadre suivant :

- Nous nous plaçons dans des situations nous permettant de considérer que l'angle formé par les deux segments successifs reliant le centre  $O_i$  de l'aimant ( $i$ ) aux centres de ses voisins ( $i - 1$ ) et ( $i + 1$ ) ne dépend pas de  $i$  (hypothèse référencée  $H_\alpha$ ). Cet angle, défini sur la figure 4, est noté  $\alpha$ . Les centres  $O_i$  des billes se situent alors sur un arc de cercle de centre  $A$  et de rayon noté  $R$  ( $R$  est une grandeur algébrique, du signe de  $\alpha$ ). Sous l'hypothèse  $H_\alpha$ , le problème à  $N$  solides est réduit à un problème à un seul degré de liberté que l'on peut choisir comme étant l'angle  $\alpha$ . Naturellement, cet angle et, corrélativement, le rayon  $R$ , dépendent du temps  $t$  lorsque l'édifice oscille ou fléchit.

2. C'est-à-dire stable que sur un certain intervalle autour de  $\theta = 0$ .

- Nous considérons que l'interaction magnétique se limite aux deux plus proches voisins de chaque aimant (hypothèse référencée  $H_{ppv}$ ).
- Comme dans la sous-section précédente, nous supposons que le roulement de chaque bille ( $i$ ) sur la bille ( $i - 1$ ) n'est accompagné d'aucun glissement.
- nous supposons que  $|N\alpha| \ll 1$  (hypothèse référencée  $H_{DL}$ ). Tous les résultats seront alors donnés à l'ordre le plus bas non nul, vis-à-vis de l'angle  $\alpha$ .
- Nous associons l'origine des énergies potentielles à la configuration de référence correspondant à un édifice rectiligne vertical.

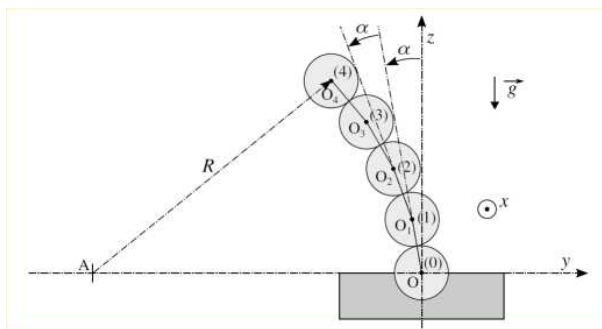


FIGURE 4 – Paramétrage géométrique du fléchissement de l'édifice, sous l'hypothèse ( $H_\alpha$ ) qu'il se déforme selon un arc de cercle de rayon  $R$ .

**17.** Préciser quelle restriction à la généralité de cette étude introduit l'hypothèse  $H_\alpha$ . On réfléchira, en particulier, à la situation où l'édifice oscille autour de la verticale. La réponse attendue est brève, il s'agit simplement d'indiquer quelle situation ne peut être décrite, sous cette hypothèse.

**18.** Indiquer l'argument qui justifie l'hypothèse  $H_{ppv}$ .

**19.** Exprimer l'énergie potentielle magnétique  $E_{BN}$  de l'édifice en fonction de  $N$ ,  $K$  et  $\alpha$ .

On notera que cette énergie peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$E_{BN} = \frac{1}{2} \kappa_B \left( \frac{1}{R} \right)^2 \quad \text{où} \quad \kappa_B = \kappa_B(N, K, D) \geq 0$$

Ce résultat n'est pas à établir.

**20.** Exprimer, en fonction de  $D$  et  $\alpha$ , la variation d'altitude  $\Delta z_1$  de la bille (1), depuis sa situation de référence. Rappelons que l'on se place systématiquement sous l'hypothèse  $H_{DL}$ .

**21.** Exprimer, en fonction de  $D$  et  $\alpha$ , la variation d'altitude  $\Delta z_2$  de la bille (2), depuis sa situation de référence.

**22.** En généralisant les deux résultats précédents, exprimer, en fonction de  $D$ ,  $\alpha$  et  $n$ , la variation d'altitude  $\Delta z_n$  de la bille ( $n$ ), depuis sa situation de référence.

**23.** En déduire l'expression, en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $D$ ,  $N$  et  $\alpha$ , de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{gN}$  de l'ensemble de l'édifice formé de  $N$  billes reposant sur la bille (0). On utilisera l'approximation<sup>3</sup> (grossière) suivante :

$$\sum_{i=1}^I i^\beta \simeq \int_0^I x^\beta dx$$

**24.** Établir la condition de stabilité de l'édifice dans sa configuration de référence, rectiligne verticale. On fera porter cette condition sur  $N$  et le paramètre  $S$  introduit dans la question **14.**. Commenter brièvement ce résultat vis-à-vis de l'approximation adoptée, définie par la relation précédente.

**25.** Estimer la valeur du nombre critique d'aimants,  $N_c$ , correspondant à la hauteur maximale d'un édifice vertical stable.

3. Cette approximation ne deviendrait justifiable que dans la limite  $I \gg 1$ .

## B. Instabilité de flambage d'une lame

Nous nous proposons de définir les conditions d'apparition du fléchissement d'une lame élastique souple, érigée en position verticale, sous l'action de son propre poids. Ce phénomène est une instabilité dite de flambage.

### Caractérisation du comportement élastique du matériau.

Nous considérons un barreau homogène de longueur  $a$ , lorsqu'il n'est soumis à aucune force, et de section droite  $S$ . Sous l'action de deux forces  $(-\vec{F}, +\vec{F})$  appliquées à ses extrémités, selon son axe  $\Delta$ , sa longueur s'accroît (algébriquement) de  $u$ , comme le représente la figure 5.

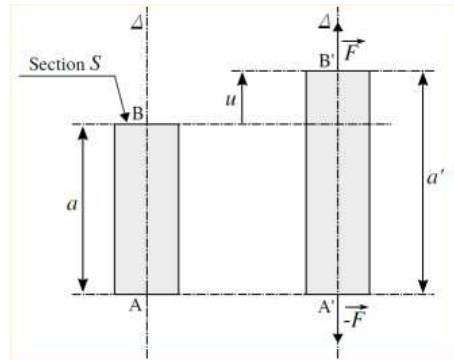


FIGURE 5 – Allongement (algébrique)  $u$  d'un barreau ( $a, S$ ) soumis à deux efforts axiaux  $(-\vec{F}, +\vec{F})$ . Les points  $A$  et  $A'$  ont été ramenés dans le même plan perpendiculaire à l'axe  $\Delta$ .

Dans l'approximation linéaire, l'élongation  $u$  et la composante  $F$  de la force  $\vec{F} = F\vec{e}_\Delta$  sont liées par la relation suivante (il s'agit de la loi de HOOKE) :

$$\frac{F}{S} = Y \frac{u}{a}$$

La constante réelle  $Y$  représente le module d'YOUNG du matériau constituant le barreau.

**26.** Indiquer à quelle condition l'approximation linéaire associée à la loi de HOOKE se justifie.

**27.** Établir l'expression de l'énergie potentielle d'origine élastique  $E_{Y,b}$  emmagasinée par le barreau au cours de l'évolution de sa longueur de  $a$  à  $a' = a + u$  (selon les notations de la figure 5). On exprimera ce résultat en fonction des paramètres  $Y, S, a$  et de l'allongement  $u$ .

### Étude du flambage

La lame, de masse volumique uniforme  $\rho$ , se présente sous la forme d'un parallélépipède occupant le volume  $[-b/2, +b/2] \times [-e/2, +e/2] \times [0, L]$ , relativement au repère  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ , comme le représente la figure 6(a) (lame non déformée). Elle n'est soumise qu'au champ de pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  et à l'action de son support qui maintient la base rigidement encastree ( $z \leq 0$ ). Comme dans le cas de la chaîne de billes, nous considérons que la lame se déforme dans le plan  $(O, y, z)$  et selon un arc de cercle dont nous notons  $A$  le centre et  $R$  le rayon (se reporter à la figure 7). La figure 6(b) représente la lame ainsi fléchie. Le déplacement de son extrémité supérieure  $Q_0$  est défini par le vecteur  $\overrightarrow{Q_0Q}$ . Le rayon  $R$  est une grandeur algébrique de signe opposé à celui de l'ordonnée du point  $Q$  (il est donc positif pour la configuration représentée sur la figure 6(b)).

Cette étude est conduite dans le cadre suivant :

- Les déformations sont telles que la relation  $\frac{F}{S} = Y \frac{u}{a}$  est applicable. Ce point sera discuté dans la question **29.**
- Les déformations sont telles que  $\|\overrightarrow{Q_0Q}\| \ll L$ .
- Nous ne tenons compte que de la déformation en flexion de la lame (donc, pas celle due à sa compression). Ainsi, nous considérons que les fibres<sup>4</sup> situées dans le plan  $(O, z, x)$ , lorsque la lame n'est pas déformée, conservent leur longueur  $L$  lorsque la lame est fléchie. Cet ensemble de fibres définit la surface neutre  $(OQ)$ .
- Nous associons l'origine des énergies potentielles à la configuration de référence correspondant à la lame non déformée (situation correspondant à la figure 6).

4. Une fibre est toute ligne reliant les sections extrêmes de la lame et qui est parallèle à la ligne  $(OQ_0)$ , lorsque la lame n'est pas déformée.

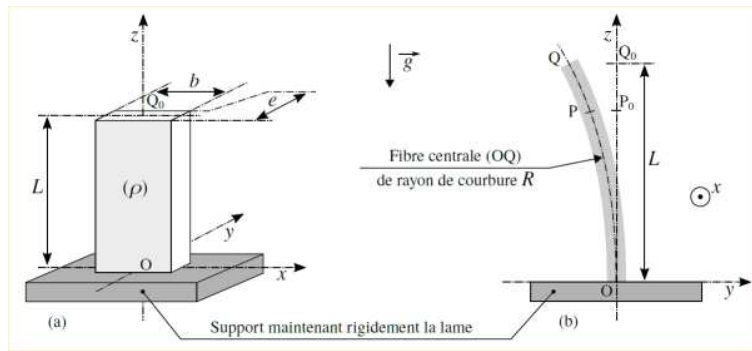


FIGURE 6 – (a) Géométrie de la lame mince (non fléchie, c'est-à-dire dans sa situation de référence). (b) La lame est déformée selon un arc de cercle de rayon  $R$ . Ces deux figures ne sont pas représentées à la même échelle ni selon les mêmes proportions.

La figure 7 représente la lame fléchie (en exagérant son épaisseur  $e$ ), depuis sa situation de référence représentée sur la figure 6(a) (c'est-à-dire pour  $|\theta| \rightarrow 0$  et  $|R| \rightarrow \infty$ ). Ce fléchissement peut être la conséquence de l'action de la pesanteur et, éventuellement, celle d'oscillations. La variable  $h$  ( $h \in [-e/2, +e/2]$ ) situe une fibre ( $MN$ ) (ou la surface de fibres ( $MN$ )) de la lame par rapport à sa surface neutre ( $OQ$ ). Nous considérons, comme le représente la figure 7, que chaque section droite de la lame reste plane et (localement) orthogonale à la surface neutre ( $OQ$ ). Nous notons  $Y$  le module de YOUNG du matériau constituant la lame.

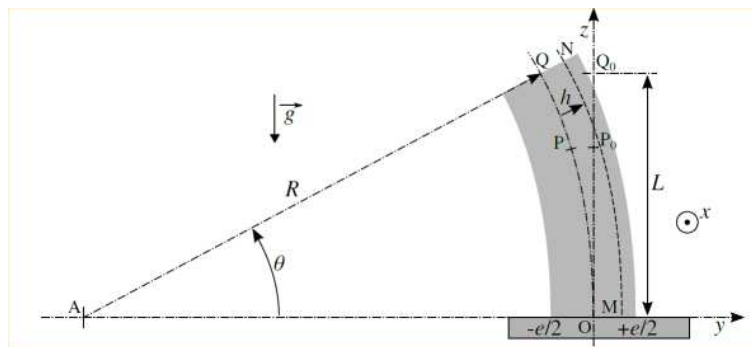


FIGURE 7 – Le paramètre  $h$  situe une fibre ( $MN$ ) de la lame par rapport à sa surface neutre ( $OQ$ ) (qui conserve sa longueur  $L$ ).

**28.** En adaptant le calcul effectué en réponse à la question **27.**, exprimer l'énergie élastique  $E_Y$  emmagasinée par la lame dans l'état caractérisé par le rayon de courbure  $R$ . On exprimera ce résultat en fonction des paramètres  $Y$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $L$  et de l'angle  $\theta$  (défini sur la figure 7).

On notera que cette énergie peut s'écrire sous une forme analogue à celle de l'équation  $E_{BN} = \frac{1}{2} \kappa_B \left( \frac{1}{R} \right)^2$ , la constante positive  $\kappa_Y$  (fonction de  $Y$ ,  $b$ ,  $e$  et  $L$ ) se substituant ici à  $\kappa_B$ . Ce résultat n'est pas à établir.

**29.** Indiquer comment se traduit, dans le cadre de la flexion, la condition de linéarité donnée en réponse à la question **26.**. On fera porter cette condition sur  $e$  et  $|R|$ .

**30.** Exprimer, en fonction des paramètres  $\rho$ ,  $g$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $L$  et de l'angle  $\theta$ , l'énergie potentielle d'origine gravitationnelle  $E_g$  de la lame, dans l'état caractérisé par le rayon de courbure  $R$ . Rappelons que, dans le cadre des hypothèses que nous nous sommes fixé,  $|\theta| \ll 1$ .

**31.** Dédurre des calculs qui précèdent que la longueur critique  $L_c$  de la lame, au-delà de laquelle sa configuration de référence devient instable, peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\frac{L_c}{e} = F(Y, \rho, g, e)$$

On définira la fonction  $F$ . Justifier l'absence de la largeur  $b$  dans cette relation.

**32.** Aurions-nous pu accéder à la fonction  $F$  à partir d'une analyse dimensionnelle ? Cette question, en particulier, attend une argumentation claire et rigoureuse.

**33.** La figure 8 représente une expérience réalisée avec une bande de papier découpée dans une feuille A4 (21 cm  $\times$  29,7 cm, épaisseur  $e \simeq 0,01$  cm), selon sa longueur. La longueur de la bande située au dessus de son point de maintien excède très légèrement la longueur critique  $L_c$ . Après avoir donné une estimation de la masse volumique du papier, déterminer l'ordre de grandeur de la valeur de son module de YOUNG  $Y$ .

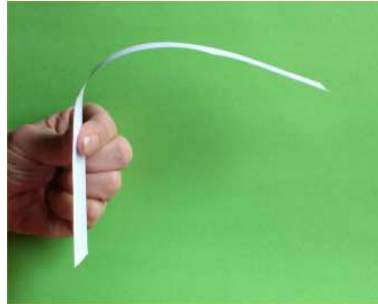


FIGURE 8 – Expérience réalisée avec une bande de papier : la longueur située au dessus de son point de maintien excède très légèrement la longueur critique  $L_c$ .

Nous nous plaçons dans le cas où  $L < L_c$ . Nous souhaitons exprimer la pulsation des oscillations de la lame autour de sa situation de référence (lame non fléchie et verticale). Nous considérons que chacun des points de la lame se déplace horizontalement (c'est-à-dire selon l'axe  $(Oy)$ ). Nous notons  $\delta(z) = y(P) - y(P_0)$  ( $z \in [0, L]$ ) le déplacement d'un point  $P_0$  situé à l'altitude  $z$  (se reporter aux figures 6 et 7).

**34.** Établir, en fonction de  $z$ ,  $\theta$  et  $L$ , l'expression de la fonction  $\delta = \delta(z)$ . On notera que l'angle  $\theta$  est orienté, sur la figure 7.

**35.** Exprimer, en fonction des paramètres  $\rho$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $L$  et de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , l'énergie cinétique  $E_{ct}$  de la lame en ne considérant que l'effet de la translation décrite par le déplacement  $\delta = \delta(z)$ .

**36.** Comme dans le cas de l'édifice de billes magnétiques (se reporter à la question **9.**), le déplacement  $\delta = \delta(z)$  de la tranche élémentaire ( $b \times e \times dz$ ) de la lame située à l'altitude  $z$  s'accompagne d'une rotation. L'énergie cinétique de rotation correspondante s'exprime selon la relation suivante :

$$E_{cr} = \frac{\rho b e^3 L}{72} \dot{\theta}^2$$

Indiquer à quelle condition il se justifie de ne considérer que la composante  $E_{ct}$  de l'énergie cinétique. Dans la suite, nous considérerons que cette condition est satisfaite.

**37.** Exprimer la pulsation  $\omega$  des oscillations de la lame autour de sa situation de référence. On exprimera ce résultat en fonction des paramètres  $g$ ,  $L$  et du rapport  $q = L/L_c$  où  $L_c$  est la longueur critique introduite dans la question **31.**. Analyser ce résultat.

**38.** Nous nous plaçons dans le cas où  $L > L_c$ . Indiquer, sur la base des calculs précédents, comment accéder au temps caractéristique  $\tau$  de déstabilisation de la lame. Exprimer  $\tau$  en fonction des paramètres  $g$ ,  $L$  et du rapport  $q = L/L_c$ . Analyser ce résultat.

### C. Le chant d'une flûte à champagne

En faisant glisser un doigt humide sur le bord d'un verre il est possible d'exciter des modes de vibration qui se manifestent par l'émission d'un son très nettement audible. Cette dernière section est consacrée à l'étude de ce phénomène.

Le verre est modélisé géométriquement par une coque cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de hauteur  $b$ , d'épaisseur  $e$  et de rayon moyen  $a_0$ . La figure 9 représente cette coque dans sa situation de référence, c'est-à-dire non déformée (ainsi  $a = a_0$ ). Nous notons  $Y$  le module de YOUNG du verre et  $\rho$  sa masse volumique. L'effet de la pesanteur, non déterminant dans cette étude, n'est pas pris en compte.

Un point  $M_0$  appartenant au cylindre de rayon  $a_0$  est repéré par rapport à l'axe  $(Ox)$ , choisi arbitrairement, par l'angle  $\theta$  et, par rapport au plan  $(O, x, y)$ , par son altitude  $z$  (se reporter à la figure 9). Les vibrations de la coque considérées sont décrites par le champ de déplacement radial  $\overline{M_0 \vec{M}} = (a(\theta, t) - a_0) \vec{u}_r(\theta)$  tel que :

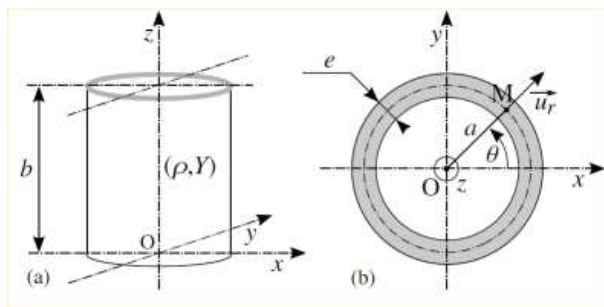


FIGURE 9 – Verre représenté par une coque cylindrique  $(a_0, b, e)$  d’axe  $(Oz)$ . (a) : Vue latérale. (b) Vue de dessus du verre non déformé ( $a = a_0$  et  $M = M_0$ ). Ces vues ne sont pas représentées à la même échelle.

$$a(\theta, t) = a_0(1 + \varepsilon(t) \sin k\theta) \quad \forall z \in [0, b] \quad \text{où } \varepsilon(t) \in \mathbb{R} \quad |\varepsilon(t)| \ll 1 \quad \text{et } \theta \in [0, 2\pi[$$

Le paramètre  $k$  ( $k \in \mathbb{R}_+^*$ ) caractérise angulairement le mode de vibration du verre considéré. La fonction  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  décrit l’évolution temporelle de son amplitude.

**39.** Définir l’ensemble des valeurs que peut prendre le paramètre  $k$  pour décrire effectivement des modes vibratoires de flexion de la coque cylindrique. Préciser la nature, propagative ou stationnaire, de l’onde décrite par  $a(\theta, t)$ . Représenter, en superposition de la situation de référence (représentée sur la figure 9(b)), l’aspect de la déformation du verre pour le mode  $k = 2$ , dans le cas où  $\varepsilon(t) > 0$  puis dans celui où  $\varepsilon(t) < 0$ .

Il apparut, dans les questions **19.** et **28.**, que l’énergie élastique emmagasinée par une structure fléchie est liée à son rayon de courbure  $R$ . En adaptant à la situation qui nous intéresse le résultat établi en réponse à la question **28.**, l’énergie élastique emmagasinée par une portion de verre délimitée par le secteur angulaire élémentaire  $d\theta$  s’exprime par la relation suivante :

$$dE_Y = \frac{1}{2} k_Y F(R(\theta)) d\theta \quad \text{où} \quad k_Y = \frac{Y b e^3 a_0}{12}$$

$R(\theta)$  est ici un rayon de courbure local.

**40.** Nous associons l’origine de l’énergie élastique à la configuration du verre non déformé. Indiquer alors, sur la base d’une argumentation, quelle est la forme de la fonction  $F$  à retenir parmi les deux propositions (a) et (b) suivantes :

$$(a) \quad F(R) = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{a_0^2} \quad ; \quad (b) \quad F(R) = \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a_0} \right)^2$$

**41.** Le rayon de courbure local  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\theta)$  d’une courbe plane, décrite en coordonnées polaires par l’équation  $r = r(\theta)$ , s’exprime par la relation suivante :

$$\mathcal{R} = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - r r''} \quad \text{où} \quad r' = \frac{dr}{d\theta} \quad \text{et} \quad r'' = \frac{d^2r}{d\theta^2}$$

Déterminer, au premier ordre par rapport à l’amplitude  $\varepsilon$ , la fonction rayon de courbure  $R = R(\theta, \varepsilon)$  correspondant à l’équation polaire  $a(\theta, t)$ .

**42.** Exprimer, en fonction des paramètres  $Y, b, e, a_0$  et  $k$ , l’énergie potentielle élastique  $E_Y$  emmagasinée par le verre, au second ordre par rapport à l’amplitude  $\varepsilon$ .

**43.** Exprimer, en fonction des paramètres  $\rho, b, e, a_0$  et de la dérivée temporelle  $\dot{\varepsilon}$ , l’énergie cinétique  $E_c$  de l’ensemble de coque vibrante.

**44.** Dédurre des résultats qui précèdent l’expression de la pulsation  $\omega_k$  des oscillations associée au mode  $k$ .

**45.** La figure 10 représente le signal temporel électrique  $s = s(t)$  délivré par un microphone soumis au son émis par un verre de forme générale cylindrique présentant les caractéristiques suivantes :  $b \simeq 6$  cm,  $e = 1,4$  mm,  $a_0 = 26$  mm et  $\rho = 3\,000$  kg · m<sup>-3</sup>.

Estimer le module de Young  $Y$  du verre en considérant que le mode (majoritairement) excité est celui de plus basse fréquence. Indiquer, sur la base d’une argumentation, si le modèle géométrique simple du verre qui a été choisi conduit à une sous-estimation ou une surestimation de la valeur du module de YOUNG.



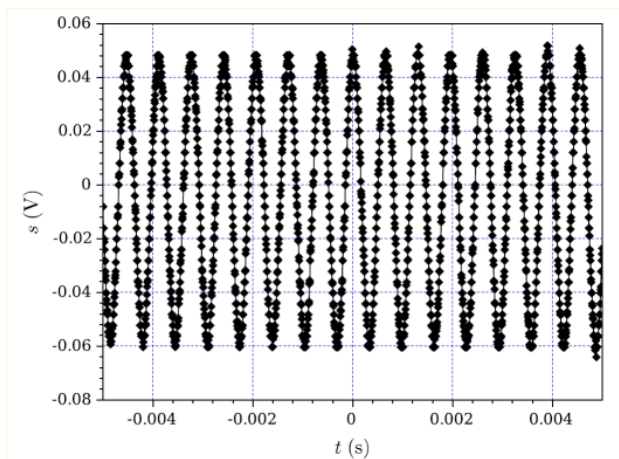


FIGURE 10 – Signal temporel électrique  $s = s(t)$  délivré par un microphone détectant le son émis par un verre en vibration.

## Problème n° 2 – Les ceintures de Van Allen

Centrale TSI 2005

**Problème à remettre à votre camarade prévu dans DMscope pour une correction croisée, retour de la correction croisée le 28/02 au plus tard.**

La Terre est entourée de zones, appelées « ceintures de VAN ALLEN », où des particules chargées, de haute énergie, sont piégées par le champ magnétique terrestre. Dans ces zones, les trajectoires des particules s'enroulent autour des lignes de champ terrestre. Au fur et à mesure que les particules se rapprochent des pôles magnétiques de la terre, les trajectoires se resserrent et la composante longitudinale de la vitesse des particules le long des lignes de champ diminue; elle peut finir même par s'annuler et les particules correspondantes repartent alors en sens inverse vers l'autre pôle où le même rebroussement se produit. Ces particules oscillent ainsi entre deux points  $M_0$  et  $M'_0$  appelés points miroirs (cf. fig. 11).

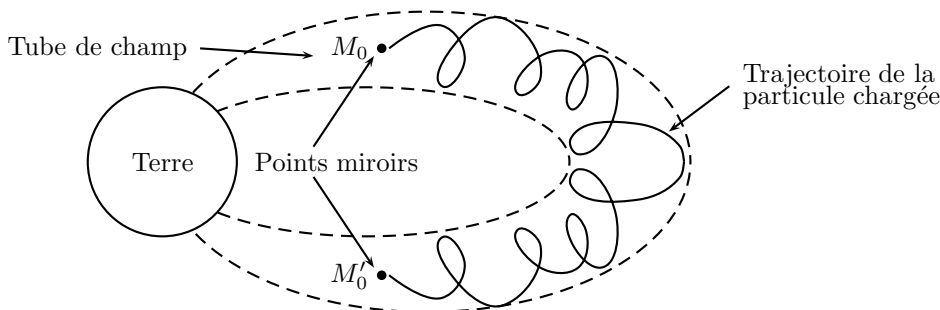


FIGURE 11 – Trajectoires de particules chargées

Le problème qui suit se propose d'expliquer la présence des ceintures de VAN ALLEN autour de la Terre. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que la force magnétique.

Données numériques :

$$\begin{aligned}
 \text{Charge de l'électron (module)} : & e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \\
 \text{Masse d'un proton} : & m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} \\
 \text{Masse d'un électron} : & m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \\
 \text{Rayon terrestre} : & R_T = 6\,400 \text{ km} \\
 & \mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \\
 & 1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \\
 & \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

## A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule, de masse  $m$  et de charge  $q$ , est soumise à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et permanent (indépendant du temps), dans le référentiel  $\mathcal{R}(Oxyz)$  supposé galiléen. On appelle respectivement  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  les vecteurs unitaires des axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ .

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est colinéaire à  $(Oz)$  :  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ,  $B > 0$ . On pose  $\omega = \frac{qB}{m}$ . La vitesse  $\vec{v}$  de la particule a pour composantes  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_L$  :  $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_L\vec{e}_z$ ; on pose  $\vec{v}_\perp = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$  et  $\vec{v}_L = v_L\vec{e}_z$ ;  $\vec{v}_\perp$  et  $\vec{v}_L$  désignent ainsi les composantes de la vitesse respectivement perpendiculaire et parallèle au champ  $\vec{B}$ . La norme du vecteur  $\vec{v}_\perp$  est notée  $v_\perp = \|\vec{v}_\perp\|$ . À l'instant initial, la particule se trouve en  $O$  avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_{\perp 0}\vec{e}_x + v_{L0}\vec{e}_z$ , avec  $v_{\perp 0} > 0$  et  $v_{L0} > 0$ .

1. Montrer que l'énergie cinétique  $E_c$  de la particule est une constante du mouvement.

2. Montrer que  $\vec{v}_L$  est une constante du mouvement. En déduire que  $v_\perp$  est également constant au cours du mouvement.

On pose  $E_{c\perp} = \frac{1}{2}mv_\perp^2$ . On étudie la projection du mouvement de la particule dans le plan  $P_\perp$  perpendiculaire à  $\vec{B}$ .

3. Déterminer les composantes  $v_x$  et  $v_y$  de la vitesse de la particule en fonction de  $v_{\perp 0}$ ,  $\omega$  et du temps  $t$ .

4. En déduire les coordonnées  $x$  et  $y$  de la particule à l'instant  $t$ .

5. Montrer que la projection de la trajectoire de la particule dans le plan  $P_\perp$  est un cercle  $\Gamma$  de centre  $C$  (centre guide) et de rayon  $a$  (rayon de giration). Déterminer les coordonnées  $x_C$  et  $y_C$  de  $C$ , le rayon  $a$  et la période de révolution  $T_1$  de la particule sur ce cercle en fonction de  $v_{\perp 0}$  et  $\omega$ .

6. Tracer, avec soin, le cercle  $\Gamma$  dans le plan  $P_\perp$ , dans le cas d'un proton, puis dans le cas d'un électron. Préciser en particulier les sens de parcours de chaque particule sur  $\Gamma$ .

7. Application numérique :  $B = 0,5 \mu\text{T}$ . On suppose  $v_{\perp 0}^2 = 10v_{L0}^2$ .

Calculer, pour un électron d'énergie cinétique  $E_c = 55 \text{ keV}$ , le module  $v$  de sa vitesse, le rayon  $a$  et la période  $T_1$ ; que pensez-vous de la valeur de  $v$ ? Mêmes questions pour un proton d'énergie cinétique  $E_c = 0,55 \text{ MeV}$ .

8. L'orbite circulaire  $\Gamma$  peut être assimilée à une petite spire de courant; déterminer l'intensité  $i$  de ce courant associé au mouvement de la particule sur  $\Gamma$  et en déduire le moment dipolaire magnétique  $\vec{M} = -M\vec{e}_z$  correspondant. Exprimer  $M$  ( $M > 0$ ) en fonction de  $E_{c\perp}$  et  $B$  puis en fonction de  $q$ ,  $m$  et du flux  $\Phi$  du champ  $\vec{B}$  à travers l'orbite circulaire  $\Gamma$ .

9. Quelle est la trajectoire de la particule chargée? Expliquer pourquoi elle s'enroule sur un tube de champ de  $\vec{B}$ .

10. On peut décomposer le mouvement de la particule en un mouvement sur un cercle dont le centre  $C$  se déplace à la vitesse  $\vec{v}_L$  le long de  $(Oz)$ . Quelle distance  $b$  parcourt le centre  $C$  sur  $(Oz)$  durant la période  $T_1$ ?

Exprimer  $b$  en fonction de  $v_L$  et  $\omega$ . Comparer  $b$  et  $a$  dans le cas où  $v_{L0}^2 = \frac{v_{\perp 0}^2}{10}$ .

## B. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique non uniforme

On suppose que le champ  $\vec{B}$  n'est plus tout à fait uniforme, ses variations restant très faibles sur une distance de l'ordre du rayon de giration  $a$  ou de la distance  $b$ . Le champ  $\vec{B}$  présente la symétrie de révolution autour de l'axe  $(Oz)$ ; en outre, on admet que la composante  $B_z$  du champ  $\vec{B}$  ne dépend que de  $z$  dans la zone située au voisinage de l'axe  $(Oz)$  où se déplace la particule chargée et dans laquelle il n'y a aucun courant. On suppose en outre  $B_z$  positive. Un point  $M$  de cette zone est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ .

11. Montrer que la composante orthoradiale  $B_\theta$  du champ  $\vec{B}$  est nulle.

12. En exprimant le flux du champ  $\vec{B}$  à travers un petit cylindre judicieusement choisi, déterminer la composante radiale  $B_\rho$  du champ  $\vec{B}$  au point  $M$  en fonction de  $\rho$  et de la dérivée  $\frac{dB_z}{dz}$ .

En considérant le champ  $\vec{B}$  « localement » uniforme, on peut utiliser certains résultats de la partie 45 : dans ce champ, une particule chargée décrit un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire à  $\vec{B}$ , autour d'un centre guide  $C$  se déplaçant le long de  $(Oz)$ ; mais, puisque  $\vec{B}$  varie d'un point à un autre, le rayon  $a$  du cercle, la période  $T_1$  de révolution (dont les expressions trouvées à la partie 45 restent valables en remplaçant  $B$  par  $B_z$ ) varient également au cours du mouvement et le déplacement de  $C$  sur  $(Oz)$  n'est plus uniforme (les vitesses  $v_L$  et  $v_\perp$  ne sont plus constantes).

13. Montrer que la composante  $F_z$  sur l'axe  $(Oz)$  de la force qui agit sur la particule chargée a pour expression

$$F_z = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z} \frac{dB_z}{dz}.$$

14. En utilisant l'expression de  $M$  obtenue à la question 8 dans laquelle  $B$  est remplacé par  $B_z$ , calculer  $\frac{dM}{dt}$ ;

en déduire que  $M$  est une constante du mouvement. Peut-on encore dire que la particule s'enroule sur un tube de champ du champ  $\vec{B}$  au cours de son mouvement ?

15. Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$  de la particule en fonction de  $m$ ,  $v_L$ ,  $M$  et  $B_z$ .

16. En déduire que la particule chargée ne peut entrer dans une zone où la composante  $B_z$  du champ dépasse une valeur maximale  $B_{\max}$  que l'on exprimera en fonction de  $E_c$  et  $M$ .

Sur la figure 12, ont été représentées plusieurs lignes de champ dans le plan méridien passant par  $(Oz)$ . On constate que le plan  $(Oxy)$  est un plan de symétrie pour la distribution de courants créant le champ  $\vec{B}$ .

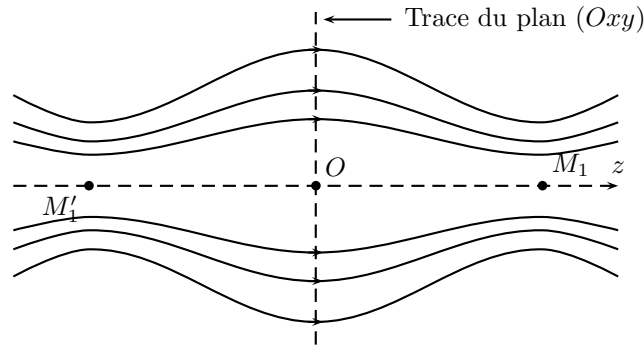


FIGURE 12 – Lignes de champ

17. Comment varie l'intensité du champ  $\vec{B}$  du point  $O$  au point  $M_1$  ? Justifier brièvement la réponse. Même question du point  $O$  au point  $M'_1$ . Que peut-on dire de l'intensité  $B_0$  du champ en  $O$  ? Les points  $M_1$  et  $M'_1$  étant symétriques par rapport à  $O$  sur l'axe  $(Oz)$  le champ y a même intensité  $B_1$ .

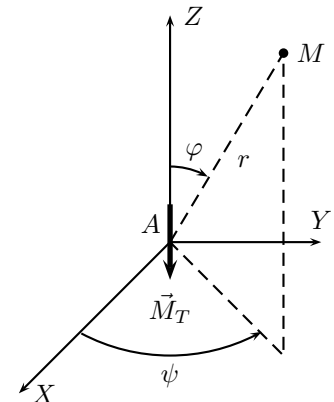
18. On suppose  $B_{\max}$  compris entre  $B_0$  et  $B_1$ . Montrer que, dans ces conditions, le centre guide  $C$  oscille périodiquement entre deux points  $M_0$  et  $M'_0$  symétriques par rapport au point  $O$ , d'abscisses respectives  $z_0 > 0$  et  $-z_0$  ( $M_0$  est situé entre  $O$  et  $M_1$ ,  $M'_0$  est situé entre  $O$  et  $M'_1$ ) et que la période  $T_2$  de ce mouvement est donnée par  $T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2M}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{B_{\max} - B(z)}}$  où  $B(z)$  représente l'intensité du champ magnétique en un point  $M$  variable de l'axe  $(Oz)$  situé entre  $O$  et  $M_0$ .

### C. Étude du champ magnétique terrestre

On admet que le champ magnétique terrestre  $\vec{B}$  est assimilable au champ magnétique d'un dipôle magnétique situé au centre  $A$  de la terre, de moment  $\vec{M}_T = -M_T \vec{e}_Z$ .

$M_T$  est positif et  $\vec{e}_Z$  désigne le vecteur unitaire de l'axe géomagnétique de la terre qui est légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre : le signe moins tient compte du fait que sud et nord magnétiques sont inversés par rapport au sud et nord géographiques. Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \varphi, \psi)$  par rapport à l'axe géomagnétique.

En un point  $M$  suffisamment éloigné de  $A$ , les composantes du champ magnétique  $\vec{B}$  s'écrivent  $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\varphi \vec{e}_\varphi + B_\psi \vec{e}_\psi$  avec  $B_r = -\frac{\mu_0 M_T}{4\pi} \frac{2 \cos \varphi}{r^3}$ ,  $B_\varphi = -\frac{\mu_0 M_T}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{r^3}$  et  $B_\psi = 0$ ;  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  et  $\vec{e}_\psi$  sont les vecteurs unitaires sphériques.



19. Établir l'équation différentielle d'une ligne de champ. En intégrant cette équation, montrer que l'équation d'une ligne de champ est donnée par l'expression  $r = r_0 \sin^2 \varphi$  où  $r_0$  désigne une constante.

20. Tracer l'allure de quelques lignes de champ dans un plan méridien (plan défini par  $\psi = \text{constante}$ ) sans oublier d'y indiquer le sens du champ. Que représente la distance  $r_0$  pour une ligne de champ ?

21. Calculer l'intensité  $B = B(\varphi)$  du champ magnétique sur une ligne de champ; en désignant par  $B_0$  l'intensité correspondante dans le plan équatorial magnétique (plan défini par  $\varphi = \pi/2$ ), écrire  $B$  sous la forme  $B = B_0 f(\varphi)$ .

Exprimer  $B_0$  en fonction de  $M_T$ ,  $r_0$  et  $\mu_0$  et expliciter la fonction  $f(\varphi)$ .

22. Pour quelle valeur  $\varphi$  l'intensité  $B(\varphi)$  du champ est-elle minimale ? Exprimer la valeur  $B_{\min}$  correspondante en fonction de  $B_0$ .

23. Vérifier que  $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$ . Représenter le graphe de  $f(\varphi)$  en précisant le domaine de variation de  $\varphi$ .

On se propose de déterminer, en un point  $P$  (défini par l'angle  $\varphi = \varphi_P$ ) situé à la surface de la terre, l'intensité de la composante horizontale  $B_h = |B_\varphi|$  du champ magnétique terrestre en mesurant les petites oscillations dans un plan horizontal d'une aiguille aimantée.

L'aiguille aimantée est un petit solide qui peut tourner sans frottement autour de son axe vertical. Elle est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{M}_a$  horizontal et de moment d'inertie  $J$  par rapport à son axe de rotation. On pose  $\alpha = (\vec{e}_\varphi, \vec{M}_a)$ .

**24.** Quelle est la position d'équilibre stable de l'aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre ? Justifier brièvement la réponse.

**25.** Établir l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille soumise au champ magnétique terrestre.

**26.** En déduire la période  $\tau_0$  des petites oscillations de cette aiguille en fonction de  $B_h$ ,  $J$  et la norme  $M_a$  de  $\vec{M}_a$ .

**27.** Les valeurs de  $M_a$  et  $J$  n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique  $\vec{B}_e$  créé par une bobine parcourue par un courant électrique pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine telle que  $\vec{B}_e$  et la composante horizontale du champ terrestre soient parallèles et de même sens et on mesure la période  $\tau_1$  des petites oscillations de l'aiguille aimantée. On change ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur  $\tau_2$  de la période des petites oscillations. En déduire  $B_h$  en fonction de l'intensité  $B_e$  du champ  $\vec{B}_e$  créé par la bobine et du rapport  $\tau_1/\tau_2$  (on supposera  $B_h < B_e$ ).

**28.** Application numérique : en un point  $P$  défini par  $\varphi_P = 50^\circ$ , on mesure  $B_e = 100 \mu\text{T}$  et  $\tau_1/\tau_2 = 0,78$ . Calculer  $B_h$ .

En déduire le moment magnétique terrestre  $M_T$ . Dans quel intervalle l'intensité du champ magnétique terrestre sur la surface de la terre varie-t-elle ?

#### D. Piégeage des particules chargées par le champ magnétique terrestre

Dans cette partie, on utilise les notations des parties précédentes. En négligeant l'influence de la courbure des lignes de champ terrestre, on peut utiliser tous les résultats de la partie 10 : une particule chargée dans l'espace, soumise à l'action du champ terrestre, s'enroule sur un tube de champ défini par le paramètre  $r_0$  et on suppose qu'elle est piégée entre les points miroirs  $M_0$  et  $M'_0$  définis respectivement par les angles  $\varphi_0$  et  $\pi - \varphi_0$ .

**29.** Expliquer brièvement que l'expression de la période  $T_2$  d'oscillations entre  $M_0$  et  $M'_0$ , obtenue à la question 18 peut s'écrire maintenant  $T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2M}} \int_{\pi/2}^{\varphi_0} \frac{ds}{\sqrt{B_{\max} - B(\varphi)}}$ . Exprimer le module de l'élément d'abscisse curviligne  $ds$  de la ligne de champ considérée en fonction de  $r_0$  et  $\varphi$ .

**30.** Montrer que, si  $\varphi_0$  reste voisin de  $\pi/2$ , l'expression ci-dessus devient  $T_2 \simeq \gamma r_0 \sqrt{\frac{m}{MB_0}}$ . Quelle est l'unité du coefficient  $\gamma$  ? Justifier la réponse. Quelle est sa valeur numérique ?

Application numérique : on reprend les valeurs numériques des questions précédentes. La particule chargée, d'énergie cinétique  $E_c$ , s'enroule autour d'une ligne de champ définie par le paramètre  $r_0 = 4R_T$ . On suppose qu'à un instant pris comme instant initial, cette particule se trouve dans le plan équatorial magnétique ( $\varphi = \pi/2$ ), avec une vitesse dont les composantes  $\vec{v}_\perp$  et  $\vec{v}_L$  vérifient  $\frac{\|\vec{v}_L\|^2}{\|\vec{v}_\perp\|^2} = \frac{1}{10}$ .

**31.** Calculer  $B_{\min}$  sur la ligne de champ.

**32.** Calculer la valeur de  $B_{\max}$  pour cette particule. Vérifier que les conditions de piégeage sont effectivement satisfaites et que  $\varphi_0$  reste voisin de  $\pi/2$ . Moyennant cette dernière remarque, déterminer la valeur de  $\varphi_0$ .

**33.** En déduire les valeurs de  $T_2$  pour un électron d'énergie  $E_c = 55 \text{ keV}$  et un proton d'énergie  $E_c = 0,55 \text{ MeV}$ . Que pensez-vous des valeurs trouvées sachant que des mesures donnent des valeurs de l'ordre de 100 ms pour l'électron et de l'ordre de 10 s pour le proton ?

**34.** Quels sont les effets des particules chargées sur un vaisseau spatial qui traverserait les ceintures de VAN ALLEN ?