

Devoir de Sciences Physiques n°8 du 17-03-2025

— Solutions —

Problème n° 1 – Traitement de surfaces par faisceau laser

Centrale PSI

2012

A. Conductivité complexe du milieu métallique

1. Dans le référentiel galiléen du laboratoire, on a $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau_c} \vec{v}$.

2. On sait que dans le vide, la norme du champ magnétique est liée à la norme du champ électrique par $B = \frac{E}{c}$. On peut donc comparer la partie électrique de la force de LORENTZ à la partie magnétique qui sont respectivement eE et $e\frac{v}{c}E$. La force magnétique est très petite devant la force électrique lorsque $v \ll c$ ce qui correspond au cas des électrons non relativistes comme cela est proposé par l'énoncé. Dans ces conditions, la relation de la dynamique est $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau_c} \vec{v}$. Cette équation peut aussi s'écrire $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau_c} = -\frac{e}{m} \vec{E}$.

3. En régime ondulatoire de pulsation ω , on a $\frac{d\vec{v}}{dt} = i\omega\vec{v}$. Cela permet de relier la vitesse au champ électrique par la relation $\vec{v} = -\frac{e\tau_c}{m} \frac{\vec{E}}{1+i\omega\tau_c}$. La densité volumique de courant est définie par $\vec{j} = -ne\vec{v}$. On peut donc écrire que $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ en posant $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau_c}$ avec $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau_c}{m}$.

4. Il faut calculer le terme $\omega\tau_c$. On a $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, par conséquent on trouve que $\omega\tau_c = \frac{2\pi c\tau_c}{\lambda} = 1,42$. Cette valeur est de l'ordre de grandeur de la partie réelle du complexe qui vaut 1 dans $1+i\omega\tau_c$, il est donc bien impossible de faire une approximation dans la conductivité complexe. En multipliant haut et bas dans la conductivité complexe par le complexe conjugué, on arrive facilement à la forme $\underline{\gamma} = \gamma' - i\gamma''$ avec $\gamma' = \frac{\gamma_0}{1+\omega^2\tau_c^2}$ et $\gamma'' = \frac{\gamma_0\omega\tau_c}{1+\omega^2\tau_c^2}$.

5. En exécutant l'opérateur divergence sur l'équation de MAXWELL-AMPÈRE $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$, on obtient $\text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} = 0$. En utilisant l'équation de MAXWELL-GAUSS, on trouve alors l'équation de conservation de la charge $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

6. Avec la définition de la conductivité, on a $\underline{\gamma} \text{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Cette équation conduit à la forme du premier ordre suivante : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0$. La solution complexe est de la forme $\underline{\rho} = \rho_0 \exp -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} t$. On utilise l'expression complexe de $\underline{\gamma}$ pour arriver à $\underline{\rho} = \rho_0 \exp -\frac{\gamma'}{\varepsilon_0} t \exp i\frac{\gamma''}{\varepsilon_0} t$. On revient en réels selon $\rho = \rho_0 \exp -\frac{\gamma'}{\varepsilon_0} t \cos \frac{\gamma''}{\varepsilon_0} t$. Cela permet d'identifier les deux grandeurs $\tau_d = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} (1 + \omega^2 \tau_c^2)$ et $\omega_d = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \frac{\omega \tau_c}{1 + \omega^2 \tau_c^2}$.

7. On a $\tau_d = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} (1 + \frac{4\pi^2 c^2 \tau_c^2}{\lambda^2})$. On trouve $\tau_d = 1,3 \times 10^{-17} \text{ s}$. Ce temps est très faible devant la période de l'onde $\frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = 3,5 \times 10^{-14} \text{ s}$. En quelques τ_d , la charge volumique est nulle et comme $\tau_d \ll \frac{1}{f}$, on peut considérer que le conducteur est un milieu localement neutre à toute date.

8. Les équations de MAXWELL sont donc $\text{div} \vec{E} = 0$, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{div} \vec{B} = 0$ et $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0(\underline{\gamma} \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$.

9. Compte tenu des valeurs mises en jeu, on peut écrire que $|\underline{\gamma}| \simeq \gamma_0$. On compare donc $\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}$ à $2\pi f = \omega$. Cette comparaison revient à la même chose que celle effectuée précédemment, on constate que $\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \simeq 10^{17} \text{ s}^{-1}$ alors que $2\pi f \simeq 10^{13} \text{ s}^{-1}$. On va donc se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires en négligeant le courant de déplacement. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE se réduit donc à $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E}$.

10. On a $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ à cause de la neutralité locale du conducteur démontrée avant. D'autre part, on peut écrire que $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. L'équation de propagation du champ électrique est plutôt une équation de diffusion mais la qualification d'équation de propagation est quand même acceptable à condition de ne pas la confondre avec une équation de D'ALEMBERT. On a $\Delta \vec{E} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

11. La relation de dispersion est $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \underline{\gamma} \omega$.

12. On remplace \underline{k} par son expression complexe et on obtient facilement $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \exp i(\omega t - k'z + \varphi_0) \exp -k''z$. Si on passe en réels, on obtient $\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \exp -k''z \cos(\omega t - k'z + \varphi_0)$.

13. On a $\underline{k}^2 = -i\mu_0(\gamma' - i\gamma'')\omega = -\mu_0\gamma''\omega - i\mu_0\gamma'\omega$. Si l'on développe l'expression de \underline{k}^2 , on obtient aussi $\underline{k}^2 = k'^2 - k''^2 - i2k'k''$. La comparaison des deux formes complexes donne alors $2k'k'' = \mu_0\gamma'\omega$ qui est un réel positif. Dans ces conditions, on voit que k' et k'' doivent posséder le même signe : $k'k'' > 0$;

B. Aspect énergétique

14. On a $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{e}_z \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \exp -2k''z \left[k' \cos^2(\omega t - k'z + \varphi_0) + \frac{k''}{2} \sin 2(\omega t - k'z + \varphi_0) \right]$. La moyenne temporelle du vecteur de POYNTING est donc $\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \vec{e}_z \frac{k' E_0^2}{2\mu_0 \omega} \exp -2k''z$. On identifie alors $I'_0 = \frac{k' E_0^2}{2\mu_0 \omega}$.

15. La longueur caractéristique d'absorption en intensité apparaît directement dans l'expression précédente, on a $L_a = \frac{1}{2k''}$. On a posé $\underline{k} = k' - ik'' = \frac{\omega}{c}n' - i\frac{\omega}{c}n''$ d'où $k'' = \frac{\omega}{c}n''$. On peut donc écrire que $L_a = \frac{c}{2n''\omega}$.

16. Si on considère une surface S normale à la direction de propagation de l'onde, la puissance volumique dissipée dans le volume Sdz est $P_v(z)Sdz = SI'_0(\exp -2k''z - \exp -2k''(z + dz))$. On constate donc facilement que $P_v(z) = I'_0 \left(-\frac{\partial(\exp -2k''z)}{\partial z} \right)$. On trouve alors que $P_v(z) = 2k'' I'_0 \exp -\frac{z}{L_a}$ ce qui permet de conclure que :

$$P_v(z) = \frac{I'_0}{L_a} \exp -\frac{z}{L_a}.$$

17. Les lois de DESCARTES indiquent que tous les rayons sont contenus dans le plan d'incidence que les angles repérés par rapport à la normale au dioptre vérifie l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence $i_r = i_1$ sans prendre en compte l'algébrisation des angles. Pour la réfraction, on a la célèbre loi $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Si $n_2 > n_1$, on a $i_2 < i_1$. Le rayon lumineux se rapproche de la normale lorsqu'il entre dans un milieu plus réfringent.

18. Si l'incidence est normale, les champs sont alors contenus dans le plan Oxy qui est le plan du dioptre. Les propriétés de continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et normales de \vec{B} imposent que les directions des champs des ondes réfléchies et réfractées soient dans le plan Oxy .

19. Comme la surface du conducteur réfléchit une partie non négligeable... de l'intensité incidente, la puissance absorbée est uniquement fonction de l'intensité transmise qui est $I'_0 = (1-R)I_0$. La puissance volumique absorbée est donc $P_v(z) = \frac{(1-R)I_0}{L_a} \exp -\frac{z}{L_a}$.

20. On trouve $R = 0,915$. On constate que seulement 8,5% de la puissance du laser va être dissipée dans le conducteur. La majorité de l'énergie est réfléchie.

Problème n° 2 – Capteurs photovoltaïques

Centrale PC 2022

A. Énergie photovoltaïque

1. La puissance en régime continu (indépendant du temps) est $P = UI$. On peut s'intéresser au graphique $P(U) = I(U)U$. En observant la caractéristique de la pile solaire, on voit que l'intensité est constante $I = I_c$ pour $U \leq 0,4V$. Le graphique $P(U)$ sera une fonction affine. Ensuite, il va continuer à augmenter un peu puis descendre rapidement. Le sommet est obtenu pour $\frac{dP}{dU} = \frac{dI(U)}{dU}U + I(U) = 0$. Cela est réalisé lorsque $\frac{dI(U)}{dU} = -\frac{I(U)}{U}$. Tant que la décroissance de l'intensité avec U n'est pas trop marqué pour que $|\frac{dI(U)}{dU}| = \frac{I(U)}{U}$, on reste avec une croissance de la puissance. Ensuite, la puissance diminue très vite. On peut estimer sur le graphique que le maximum de puissance s'obtient lorsque la tension U est voisine de 0,50V et l'intensité de 2,7A. La puissance maximum est donc $P_m \simeq 1,35W$. On constate que l'on est très proche de la valeur nominale de 1,32W. Cela est normal car la chute de l'intensité avec la tension est très rapide.

2. L'efficacité énergétique est le rapport de la puissance électrique fournie sur la puissance lumineuse reçue. $\eta = \frac{P_{elec}}{P_{lum}} = \frac{P_{elec}}{\epsilon_i S}$. Comme $S = 10^{-2}m^2$, on trouve $\eta = 13,2\%$. Cette valeur est une valeur courante des panneaux photovoltaïques commercialisés.

3. La caractéristique $I(U)$ de la cellule est fournie à la figure 1. Les produits $U_n I_n$ et $U_v I_c$ sont des **rectangles**. Compte tenu de sa définition le facteur de forme est forcément majoré par 1. Cela se produirait si le modèle de caractéristique de la cellule photovoltaïque était modélisable par un générateur idéal de courant $I = I_c$ pour $U < U_v$ puis par un générateur idéal de tension $U = U_v$ pour $I < I_c$.

4. On a donc $FF = \frac{P_n}{U_v I_c} = 0,73$.

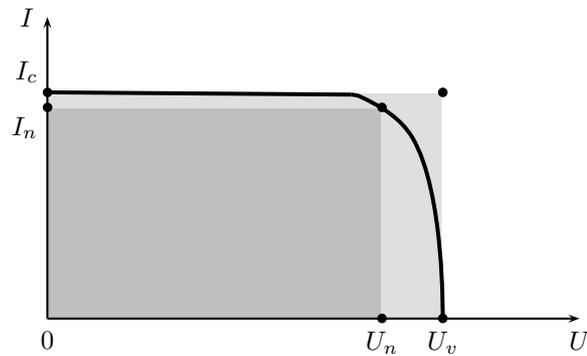


FIGURE 1 – Visualisation du facteur de forme

B. Conduction, jonction, effet photovoltaïque

Conduction électrique

5. $m \frac{d\vec{v}}{dt}$ est la dérivée de la quantité de mouvement ou encore le produit de la masse par l'accélération. $-e\vec{E}$ est la force électrique et $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$ la force de **frottement fluide**. Cette force est une modélisation des interactions de la charge avec son environnement lorsqu'elle se déplace.

6. En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$. On obtient immédiatement : $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$. La mobilité des électrons de conduction est donc $\mu_e = -\frac{e\tau}{m}$.

7. La densité volumique de courant est $\vec{j} = n_e(-e)\vec{v} = -n_e e \mu_e \vec{E}$. La loi d'OHM locale est $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où la conductivité électrique est : $\gamma = \frac{n_e^2 \tau}{m}$.

8. On nous donne la mobilité des électrons dans le silicium, celle des trous et la conductivité. La conductivité est $\gamma = e(n_p \mu_p - n_e e \mu_e)$ avec dans ce cas-là $n_e = n_p$. On peut en déduire la densité volumique d'électrons de conduction. On trouve $n_e = \frac{\gamma}{(\mu_p - \mu_e)e} = 1,4 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$. Pour pouvoir trouver la proportion d'atomes de silicium qui libère un électron, il faut trouver la densité volumique d'atomes de silicium dans le réseau cristallin. On utilise la masse volumique du silicium en écrivant que : $n_{\text{Si}} = \frac{\rho_{\text{Si}}}{M_{\text{Si}}} N_A = 5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$. La proportion est donc $\frac{n_e}{n_{\text{Si}}} = 2,7 \times 10^{-13}$. C'est très peu, le silicium n'est pas un bon conducteur comparativement aux conducteurs habituels. On le qualifie de semi-conducteur. Ses qualités viennent ensuite du dopage que l'on va étudier.

Semi-conducteur dopé

9. Il faut regarder la position de ces éléments dans le tableau périodique. S'ils se trouvent une colonne avant celle du silicium, ils présentent un électron de valence de moins et s'ils se situent une colonne après, ils possèdent un électron de valence de plus. Dans ces conditions **B et Ga sont P** et **P et As sont N**.

10. On rapporte cela à la densité volumique d'atomes de silicium calculée avant. Le taux de dopage est donc $\frac{10^{22}}{5 \times 10^{28}} = 2 \times 10^{-7}$. Ce résultat paraît faible mais cela suffit pour obtenir des fonctionnalités suffisamment intéressantes pour avoir une place quasi-hégémonique dans le domaine de l'électronique.

11. Le bore est de type P. Il va être à l'origine de $n_p = 10^{22}$ porteurs mobiles de charge. C'est beaucoup plus que les électrons de conduction intrinsèque du silicium puisque l'on avait trouvé $n_e = 1,6 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$. On peut faire l'hypothèse que la conductivité est uniquement due aux trous. On aura donc $\gamma_{dop} = n_p e \mu_p$. On trouve numériquement $\gamma_{dop} = 72 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

12. Cela favorise l'apparition d'une **intensité élevée**.

Jonction PN

13. C'est le **gradient de concentration** des électrons de conduction et celui des trous qui sera le moteur de la diffusion particulière dictée par la loi de FICK : $\vec{j}_{par} = -D \overrightarrow{\text{grad}} c_{par}$.

14. La zone 1 est chargée par les trous lié à la densité n_N et la 2 par les électrons à la densité n_P . On a donc : $\rho_1 = n_N e$ et $\rho_2 = -n_P e$.

15. La neutralité globale de la zone de déplétion impose $\rho_1 z_1 + \rho_2 (-z_2) = 0$. La jonction PN n'est chargée globalement, on part d'un milieu neutre, les charges sont la conséquence des déplacements des électrons libres et

des trous. La zone se polarise en quelque sorte. Compte tenu des expressions des charges volumiques, on arrive à la relation : $n_N z_1 = -n_P z_2$.

16. Il y a invariance selon les translations d'axe Ox et Oy . Dans ces conditions, pour un point M quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie (Π^+) de la distribution de charge. De la même façon, le plan $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est aussi un plan Π^+ . Le champ électrique appartient donc à l'intersection de ces deux plans. Il est donc dirigé selon l'axe Oz . Et il ne dépend que de la variable z : $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$. Dans ces conditions, l'équation locale de MAXWELL-GAUSS devient $\text{div } \vec{E} = \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$. Comme la densité volumique de charge est soit nulle, soit constante, le champ électrique sera respectivement soit constant, soit affine. C'est exactement ce que l'on voit sur le graphique. Toutefois, en dehors de la zone de déplétion, le champ électrique est nul. Pour bien le comprendre, on peut se placer en dehors de la zone de déplétion sur l'axe Oz , à l'infini pour faire bonne mesure. Comme la distribution de charge est globalement neutre, le champ électrique doit être nul. Comme il est constant il sera nul sur tout l'espace en dehors de la zone de déplétion. On peut terminer en faisant remarquer qu'il y a continuité du champ électrique ce qui est logique avec un niveau de modélisation 3D de la distribution de charge.

17. Dans la zone 1 chargée positivement, on a donc $\frac{dE_z}{dz} = \frac{n_N e}{\epsilon}$. En intégrant et en appliquant la condition de continuité au champ électrique en $z = z_1$ où il est nul, on obtient $E_z = \frac{n_N e}{\epsilon}(z - z_1)$. Le maximum est obtenu en $z = 0$ puisque de l'autre côté la charge volumique étant négative, le champ électrique sera décroissant - ce qui est conforme avec ce que l'on peut voir sur le graphique. On a donc : $E_{max} = \frac{n_N e z_1}{\epsilon}$. Avec la relation établie avant entre les densités volumiques de porteurs et les cotes de la zone de déplétion, on peut encore écrire que $E_{max} = -\frac{n_P e z_2}{\epsilon}$.

18. Comme nous sommes en situation statique, avec des distributions de charges indépendantes du temps, on a $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dz}\vec{e}_z$. On intègre la fonction affine pour obtenir une loi parabolique pour le champ électrique. On pose $V(z = 0) = 0$ et on arrive à $V(z) = \frac{n_N e}{2\epsilon}[z_1^2 - (z - z_1)^2]$. On arrive à la même chose - en respectant la continuité du potentiel en $z = 0$ - de l'autre côté : $V(z) = \frac{n_P e}{2\epsilon}[(z - z_2)^2 - z_2^2]$. La différence de potentiel est $V_0 = V(z_1) - V(z_2)$. On trouve $V_0 = \frac{n_N e}{2\epsilon}z_1^2 + \frac{n_P e}{\epsilon}z_2^2$. En utilisant les deux expressions de E_{max} établies à la question précédente, on arrive à $V_0 = \frac{E_{max}}{2}(z_1 - z_2)$.

19. On a $w = z_1 - z_2 = \frac{\epsilon E_{max}}{e}(\frac{1}{n_N} + \frac{1}{n_P})$. Or, $E_{max} = \frac{2V_0}{z_1 - z_2}$. En utilisant cette expression, on arrive à : $w = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{e}(\frac{1}{n_N} + \frac{1}{n_P})}$.

20. L'application numérique donne : $w = 0,33 \mu\text{m}$.

Effet photovoltaïque

21. Il faut que l'énergie apportée par le photon soit supérieure à l'énergie de création de la paire électron-trou. On doit donc avoir $eV_0 \leq \frac{hc}{\lambda}$ d'où $\lambda \leq \lambda_{min}$ avec $\lambda_{min} = \frac{hc}{eV_0} = 1,5 \mu\text{m}$. On se situe dans l'infrarouge, donc une partie de l'infrarouge proche, tout le visible et a fortiori l'UV va permettre de créer des paires électron-trou.

22. Le schéma de la cellule est réalisé à la figure 2.

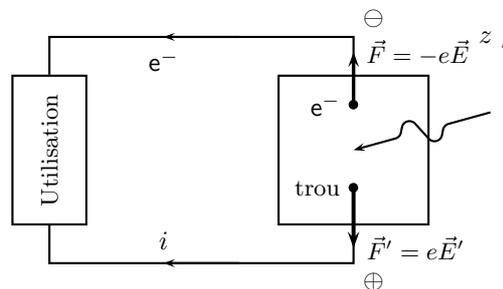


FIGURE 2 – Structure de la cellule photovoltaïque

C. Traitement antireflet de la cellule

Réflexion sur le silicium

23. On a $\vec{k}_i = n_v \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$, $\vec{k}_r = -n_v \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$ et $\vec{k}_t = n_s \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$.

24. Le champ magnétique est donné par la relation de structure $\vec{B}_i = \frac{1}{\omega} \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i$ puisque l'on travaille en modèle onde plane progressive. Pour rappel, cette relation vient de l'équation de MAXWELL-FARADAY $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

En utilisant les expressions des vecteurs d'ondes et en ne prêtant attention qu'aux amplitudes, on arrive à

$\vec{E}_{0i} = \frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0i}$. Les autres expressions des amplitudes des champs magnétiques sont tout à fait similaires : $\vec{B}_{0r} = -\frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0r}$ et $\vec{B}_{0t} = \frac{n_s}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0t}$.

25. Les milieux considérés sont des isolants non porteurs de densité surfacique de charge, ni de densité surfacique de courant. Le champ électrique et le champ magnétique doivent être continus à l'interface en $z = 0$, cette continuité est assurée $\forall t$. On en déduit donc que $\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$ et, pour le champ magnétique, la relation $\vec{e}_z \wedge n_v(\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r}) = \vec{e}_z \wedge n_s \vec{E}_{0t}$. Comme les champs ne peuvent pas avoir de composantes colinéaires à \vec{e}_z , on en déduit que $n_v(\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r}) = n_s \vec{E}_{0t}$. En résolvant le système de deux équations, on arrive à $\vec{E}_{0t} = \frac{2n_v}{n_v+n_s} \vec{E}_{0i}$ et surtout à $\vec{E}_{0r} = \frac{n_v-n_s}{n_v+n_s} \vec{E}_{0i}$. Le coefficient de réflexion est $r_{vs} = \frac{n_v-n_s}{n_v+n_s}$.

26. Pour des considérations énergétiques, il faut s'intéresser au vecteur de POYNTING. Considérons l'onde incidente. On a $\vec{\Pi}_i = \vec{E}_i \wedge \frac{\vec{B}_i}{\mu}$ où μ est la perméabilité magnétique du milieu. Grâce aux résultats établis avant, on se rend compte que l'amplitude du vecteur de POYNTING est proportionnelle à l'amplitude du carré du champ électrique puisque $\vec{\Pi}_i = \vec{e}_z \frac{n_v}{\mu c} E_i^2$. Le coefficient de réflexion énergétique est donc le rapport de $\frac{\vec{E}_{0r}^2}{\vec{E}_{0i}^2}$. On a

donc : $R = r_{vs}^2 = \left(\frac{n_v-n_s}{n_v+n_s} \right)^2$. On trouve que $R = 0,20$. Cela signifie que 20% de l'énergie incidente est réfléchie par le panneau photovoltaïque, c'est un peu dommage. Ici, on oublie qu'il y a déjà une réflexion au niveau de l'interface air - verre (protecteur) du panneau.

Couche antireflet

27. Il faut écrire, comme dans la question précédente, les continuités du champ électrique et du champ magnétique à l'interface en $z = e$. On obtient donc $\vec{E}_{01} \exp -ik_d e + \vec{E}_{02} \exp ik_d e = \vec{E}_{0t} \exp -ik_t e$. Pour le champ magnétique, on transpose la relation écrite avant dans le contexte de l'interface en $z = e$. Cela donne : $n_s(\vec{E}_{01} \exp -ik_d e - \vec{E}_{02} \exp ik_d e) = n_s \vec{E}_{0t} \exp ik_d e$. En éliminant l'amplitude du champ transmis du système des deux équations, on obtient $\vec{E}_{02} = \left(\frac{n_d-n_s}{n_d+n_s} \right) \vec{E}_{01} \exp -2k_d e$. On peut donc conclure sur la relation

$$\vec{E}_{02} = \vec{E}_{01} r_{ds} \exp -j\varphi.$$

28. On écrit à nouveau les conditions de continuités des champs électrique et magnétique en $z = 0$. On a, en l'absence, d'onde réfléchie $\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02}$. Cela permet d'écrire que $\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{01}(1 + r_{ds} \exp -i\varphi)$. Pour le champ magnétique, on arrive à $n_v \vec{E}_{0i} = n_d(\vec{E}_{01} - \vec{E}_{02})$ ce qui permet d'écrire que $\vec{E}_{0i} = \frac{n_d}{n_v}(1 - r_{ds} \exp -i\varphi) \vec{E}_{01}$. La comparaison des deux relations amène à écrire l'égalité $n_d - n_d r_{ds} \exp -j\varphi = n_v + n_v r_{ds} \exp i\varphi$. On a donc une égalité entre deux nombres complexes qui est satisfaite lorsque les parties réelles sont égales ainsi que les parties imaginaires. En développant un peu le calcul, on arrive à $n_d^2 + n_d n_s - n_d(n_d - n_s)(\cos \varphi - i \sin \varphi) = n_v n_d + n_v n_s + n_v(n_d - n_s)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. La comparaison des parties imaginaires permet d'écrire que $n_d(n_d - n_s) \sin \varphi = n_v(n_d - n_s) \sin \varphi$. Si $\varphi \neq n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$, on peut diviser par $\sin \varphi$. On obtient alors l'équation du second degré $n_d^2 - (n_s n_v) n_d + n_v n_s = 0$. Cette équation possède deux racines réelles $n_d = n_v$ et $n_d = n_s$. Ces deux solutions n'ont aucun intérêt car cela revient à dire que le dépôt est toujours soit du verre, soit du silicium et on revient dans le cas précédent avec 20% d'énergie réfléchie. On a donc $\sin \varphi = 0$ d'où $\cos \varphi = \pm 1$. Commençons par choisir $\cos \varphi = 1$ et donc $\varphi = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. La comparaison des parties réelles donne alors $n_d^2 + n_d n_s - n_d^2 + n_d n_s = n_v n_d + n_v n_s + n_v n_d - n_v n_s$. En effectuant toutes les simplifications possibles, on arrive à $n_s = n_v$. Cette situation n'est pas envisageable dans le cadre de l'étude du panneau photovoltaïque. Il ne reste plus que $\cos \varphi = -1$ qui provoque la phase attendue $\varphi = (2p+1)\pi$ toujours avec $p \in \mathbb{Z}$. Le changement de signe amène la relation voulue puisque l'on tombe sur $n_d^2 = n_s n_v$. On a donc bien : $n_d = \sqrt{n_v n_s}$. On trouve que pour obtenir l'effet anti-reflet, on doit avoir $n_d = 2,45$.

29. Pour la conversion photovoltaïque du rayonnement solaire, il est indispensable d'exploiter au maximum l'énergie du rayonnement. Il faut donc minimiser les effets de la réflexion. Il faut être conscient que la solution trouvée est intéressante mais qu'elle possède ses limites puisqu'ici, on a raisonné en situation monochromatique. Le rayonnement solaire est bien sûr largement polychromatique. On ne pourra pas adapter la largeur du dépôt à toutes les longueurs d'onde. En effet, l'indice de réfraction dépend de ω (c'est la dispersion) et donc $(2p+1)\pi = \pi = \frac{2n_d(\omega)e\omega}{c}$ montre que e dépend de façon non simple avec ω . Dans l'expression précédente, on a fait $p = 0$ pour avoir l'épaisseur de dépôt la plus petite qui soit.

D. Bandes d'énergie dans un semi-conducteur

Équation de Schrödinger à une dimension

30. L'équation différentielle de la fonction d'onde peut s'écrire sous la forme $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(x)\psi = -\frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t}$. L'équation différentielle sans second membre est de type oscillateur harmonique et donc linéaire si $V(x)$ ne dépend pas explicitement de x en étant une fonction constante par morceaux. Si $V(x) = \text{Cte}$, sans prendre la même valeur dans tous les domaines, on aura la possibilité d'avoir une solution harmonique du type $\psi(x, t) = \psi_0 \exp i(kx - \omega t)$. En testant une telle forme dans l'équation de SCHRÖDINGER, on obtient $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0$. Cette équation évolue car d'après la relation de PLANCK-EINSTEIN, on sait que l'énergie du quanton est $E = \hbar\omega$. On peut donc encore écrire la relation de dispersion sous la forme : $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$.

31. On sait de plus que la quantité de mouvement du quanton est $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. On peut donc transformer la relation de dispersion pour écrire $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_0$. On retrouve l'expression de l'énergie cinétique d'une particule quantique classique (non relativiste) $E_c = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. L'équation obtenue est la conservation de l'énergie mécanique : $E = E_c + V_0$.

32. En utilisant la solution d'un état stationnaire de la particule quantique dans l'équation de SCHRÖDINGER, on obtient $i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \chi(t) + V(x)\varphi(x)\chi(t)$. En séparant dans un membre tout ce qui dépend de x et dans l'autre tout ce qui dépend de t , on obtient $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{1}{\varphi(x)} + V(x) = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{1}{\chi(t)}$. Cette équation est vraie $\forall t, \forall x$, chaque membre est égal à la même constante. On peut donc écrire que $i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = K\chi(t)$ d'où l'équation différentielle du premier ordre $\frac{\partial \chi}{\partial t} + i\frac{K}{\hbar}\chi(t) = 0$. Les solutions sont de la forme $\chi(t) = \chi_0 \exp -i\frac{K}{\hbar}t$. $\frac{K}{\hbar} = \omega$ ne peut que représenter la pulsation associé à la particule quantique. On a donc $K = \hbar\omega$, K n'est rien d'autre que l'énergie E de la particule quantique. Si l'on reprend maintenant l'équation de la fonction d'onde spatiale, on peut lui donner la forme $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x) = 0$.

Gaz d'électrons sur un segment

33. On a choisi $V(x) = 0$ dans le puits comme l'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique strictement positive et de l'énergie potentielle (nulle ici), on aura systématiquement une énergie positive : $E > 0$.

34. L'équation différentielle est de la forme $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$. On a donc des solutions harmoniques de la forme $\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx$ avec $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Comme le potentiel tend vers l'infini en $x = 0$ et $x = L$, la fonction d'onde doit s'annuler en ces deux points. On a donc $\varphi(x = 0) = 0$ qui impose que $A = 0$ et ensuite $\varphi(x = L) = 0$ qui conduit à $B \sin kL = 0$. La solution $B = 0$ n'aurait pas de sens physique car la fonction d'onde serait nulle partout. Il ne reste plus qu'à imposer $\sin kL = 0$ ce qui s'obtient pour $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc des fonctions d'onde de la forme $\psi_n(x, t) = \underline{B}_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp -\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} t$. Cela correspond bien à ce qui était attendu avec $k = nk_1$ où $k_1 = \frac{\pi}{L}$.

35. À la figure 3, on peut voir illustrée la relation $E = f(k)$ pour les trois états stationnaires de plus faible énergie qui correspondent à $n = 1, n = 2$ et $n = 3$. On a $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(n^2 \frac{\pi^2}{L^2})$. On peut écrire que $E = n^2 E_1$ avec $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$.

36. On trouve $E_1 = 3,8 \times 10^{-7}$ eV et $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T = 3,9 \times 10^{-2}$ eV. Les niveaux d'énergie sont tellement serrés puisque $E_1 \ll \langle E_c \rangle$ que l'on peut parler de continuum.

37. On raisonne sur une seule dimension, on évalue le nombre d'électrons à $N_0^{1/3} L$ et on en place 2 par niveaux d'énergie. Le nombre de niveaux d'énergie remplis est $n_F = \frac{1}{2} N_0^{1/3} l$. Comme l'énergie du niveau n_F est $n_F^2 E_1$, on en déduit l'énergie du niveau de FERMI comme étant : $E_F = \frac{1}{4} N_0^{2/3} L^2 E_1$.

Potentiel périodique, bandes d'énergie

38. Les cuvettes de potentiel sont les espaces entre les atomes du semi-conducteur. La période $2a$ est la taille de l'arête du réseau cristallin du semi-conducteur. $2a$ est plus couramment nommée le paramètre de la maille cristalline.

39. L'équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde spatiale est $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$ pour $(2n - 1)a < x < 2a$. Il est donc logique d'avoir un vecteur d'onde $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Pour l'autre cas, on a $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$

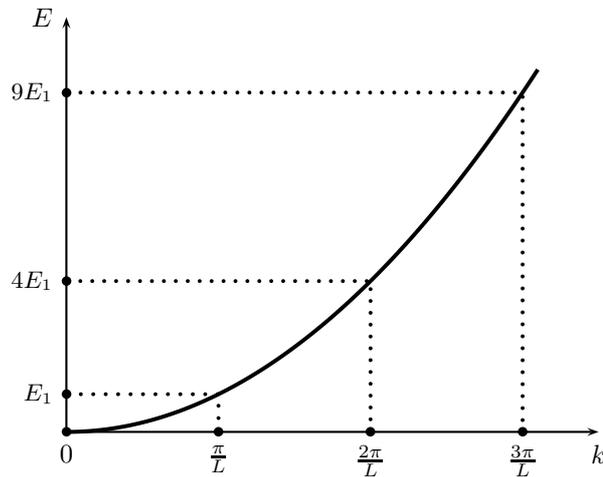


FIGURE 3 – Niveaux d'énergie dans le puits de potentiel infini

ce qui modifie le vecteur d'onde : $K = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$.

40. Puisque $|\varphi|^2$ est une densité de probabilité, la fonction d'onde $\varphi(x)$ est nécessairement continue à chaque discontinuité du potentiel $V(x)$. Les deux premières équations proposées traduisent cette discontinuité en $x = 0$ et $x = a$. Ensuite, les discontinuités du potentiel restent bornées, $\frac{d\varphi}{dx}$ est continue. Les deux autres équations traduisent à nouveau cette seconde condition de continuité en $x = 0$ et $x = a$.

41. Avec $\alpha = 0,2$, on est juste au-dessus du puits de potentiel puisque $\alpha = \frac{K}{k} = \sqrt{\frac{E}{V_0} - 1}$ conduit à $E = V_0(1 + 4 \times 10^{-2})$. On peut remarquer qu'une translation de a doit échanger les rôles de k et de K dans les équations. L'expression doit être identique en permutant les rôles de k et $K = \alpha k$. On voit que cela n'est possible que pour la relation c).

42. Le modèle permet de rendre compte de l'existence des bandes d'énergie, soit permises, soit interdites puisqu'il faut que $F_\alpha(ka)$ vérifie $-1 \leq F_\alpha(ka) \leq 1$. À l'aide de la représentation fournie de $F_\alpha(ka)$, on repère toutes les zones respectant la condition précédente pour les bandes d'énergie permises et donc automatiquement les bandes d'énergie interdites ailleurs. Voir le document réponse à la figure 4 du document-réponse.

43. Lorsque $\alpha = 1$, cela signifie que $E = 2V_0$. La formule donnant $F_\alpha(ka)$ évolue pour donner $F_\alpha(ka) = \cos^2 ka - \sin^2 ka = \cos 2ka$. On constate que $-1 \leq F_\alpha \leq 1$, toutes les valeurs de l'énergie sont permises. Il n'y a plus bande d'énergie permises et d'autres interdites. On a un continuum d'énergie.

44. La première bande d'énergie permise s'obtient pour $0 \leq ka \leq 1,8$ environ. On a donc $E_1 = 0$ et $E_2(1,8)$ dont on doit faire la différence. Cela donne $\Delta E = E_2 - E_1 = E_2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (ka)^2}{2ma^2}$. Cette expression permet d'avoir la largeur de bande en joules, cela fait $2,7 \times 10^{-19}$ J. Pour obtenir cette largeur en électronvolt, il faut encore diviser par la charge élémentaire. On trouve alors $\Delta E = \frac{\hbar^2 (ka)^2}{2ma^2 e} = 1,7 \text{ eV}$.

45. L'ordre de grandeur attendu est parfaitement respecté par le calcul précédent. On peut donc valider le potentiel périodique $V(x)$ proposé.

DOCUMENT – RÉPONSE

Nom : SEIGNE

Prénom : Jean-Robert

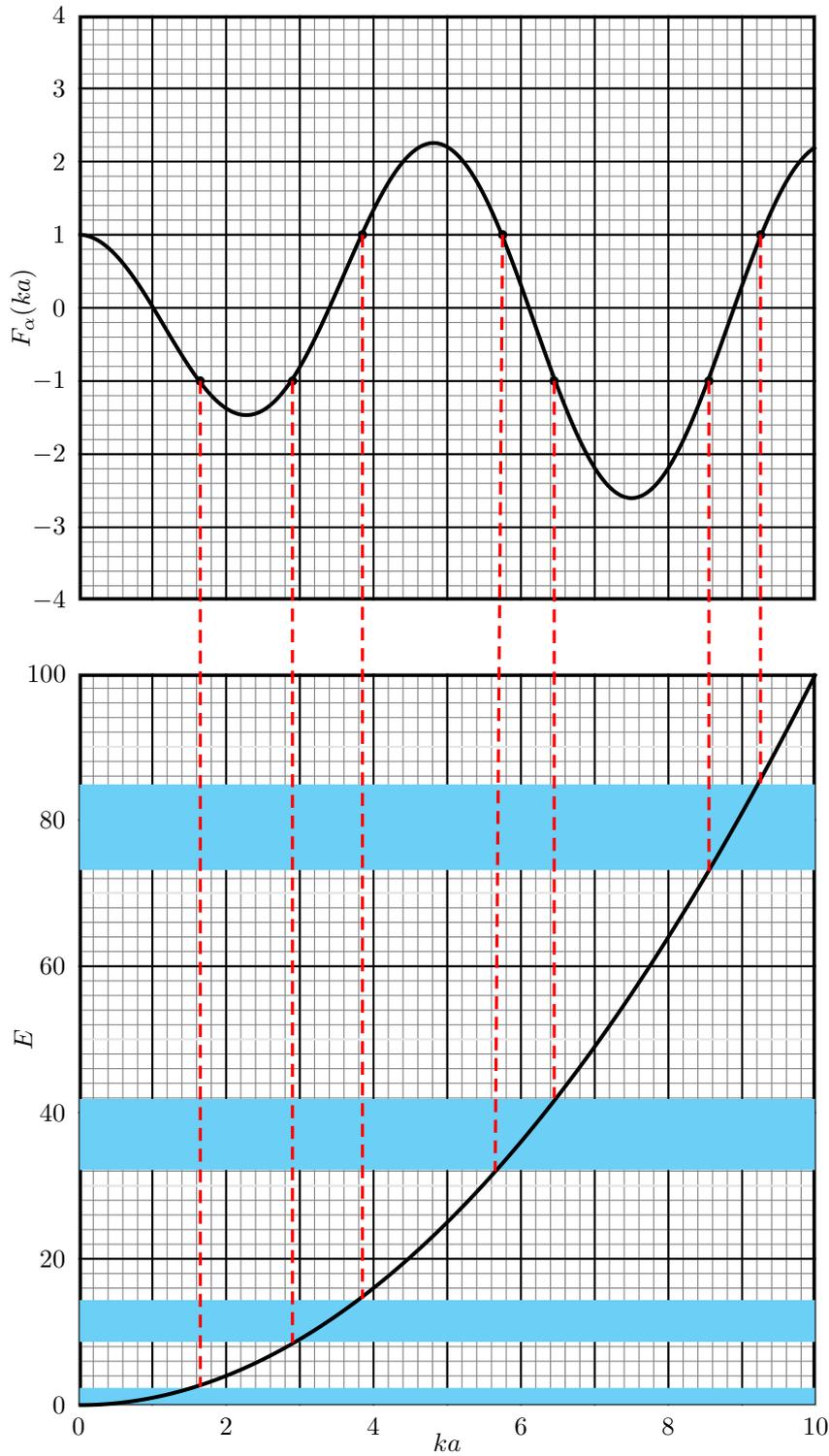


FIGURE 4 – Fonction $F_\alpha(ka)$ et énergie $E(ka)$ (unité arbitraire) tracés pour $\alpha = 0,2$