

# Devoir surveillé de Sciences Physiques n°1 du 19-09-2024

— Durée : 4 heures —

## Problème n° 1 – Accordeur de guitare

Centrale TSI 2019

Nous allons étudier quelques aspects de l'accordeur électronique d'une guitare qui comporte les six cordes traditionnelles qui, lorsqu'elles sont bien accordées, possèdent les fréquences suivantes :

Corde	Fréquence $f_{ac}$
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196,0 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée de fréquence  $f_{co}$ . Le principe de fonctionnement de l'accordeur est le suivant :

- Sélection de la corde à accorder ( $f_{ac}$  est donc fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence  $f_{ac}$  avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal  $u_e(t)$  provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplification assez faible, de fréquence  $f_{co}$ .
- Amplification de ce signal et filtrage.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co}$  par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence  $f_{co}$ .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences  $f_{ac}$  et  $f_{co}$ . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand  $f_{co} = f_{ac}$ .

Informations sur l'amplificateur opérationnel :

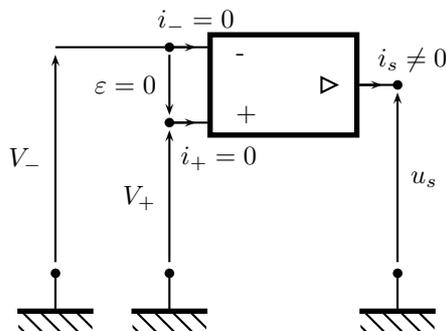


FIGURE 1 – Amplificateur opérationnel idéal utilisé en régime linéaire

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel. Il est alimenté en  $\pm 15\text{ V}$  par rapport à la masse. Cette alimentation est à l'origine de l'énergie demandée au niveau de la sortie. L'amplificateur opérationnel idéal présente de très fortes impédances d'entrée, les courants en entrée sont extrêmement faibles comme pour le circuit multiplicateur. On considère que  $i_+ = i_- = 0$ . L'amplificateur opérationnel présente deux types de fonctionnement : le régime linéaire où la tension de sortie est reliée à la tension différentielle d'entrée  $\varepsilon$  par la loi donnée ci-dessous et le régime non linéaire où la tension de sortie sature comme pour le multiplicateur au niveau des tensions  $\pm 15\text{ V} = \pm V_{sat}$ . C'est cette alimentation qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité  $i_s$  pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. La relation entrée différentielle - sortie du domaine linéaire est modélisée par une fonction passe-bas d'ordre 1 :

$$u_s = \frac{\mu}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \varepsilon$$

avec  $\mu_0 \simeq 10^6$  et  $\omega_0 \simeq 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ainsi en considérant, dans le cadre du modèle d'amplificateur opérationnel idéal, que le gain  $\mu_0 \rightarrow \infty$ , on n'obtient une sortie bornée que si  $\varepsilon = 0$ . En fonctionnement non linéaire, on a  $u_s = +V_{sat}$  lorsque  $\varepsilon > 0$  et  $u_s = -V_{sat}$  lorsque  $\varepsilon < 0$ .

## A. Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

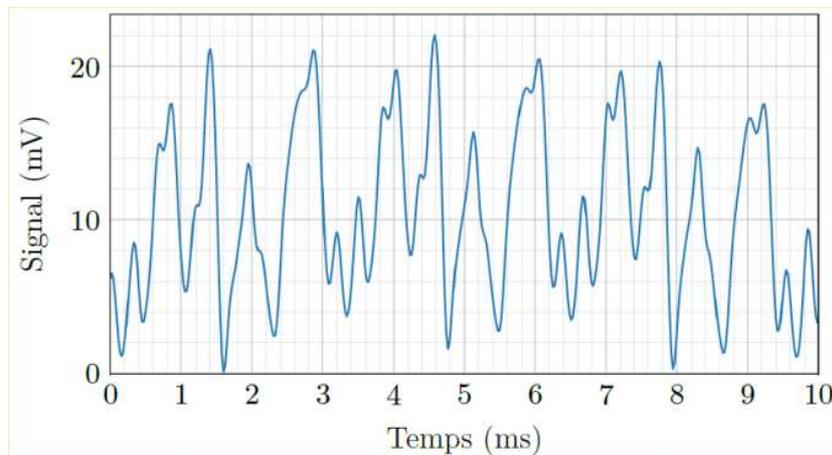


FIGURE 2 – Signal de la guitare

1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (si on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

## B. Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre ( $F_a$ ) de la figure 3.

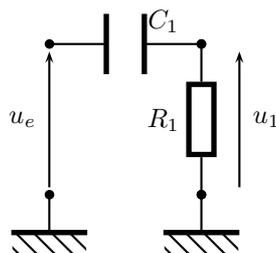


FIGURE 3 – Filtre ( $F_a$ )

5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  de ce filtre en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et de la pulsation  $\omega$  de ce signal.
6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique  $\omega_1$  en fonction de  $R_1$  et  $C_1$  et préciser sa signification.
7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de BODE asymptotique relatif au gain.
8. On a choisi  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C_1 = 100 \text{ nF}$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_1$  à  $-3 \text{ dB}$  de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

## C. Deuxième filtre

Dans cette partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. On étudie les filtres de la figure 4.

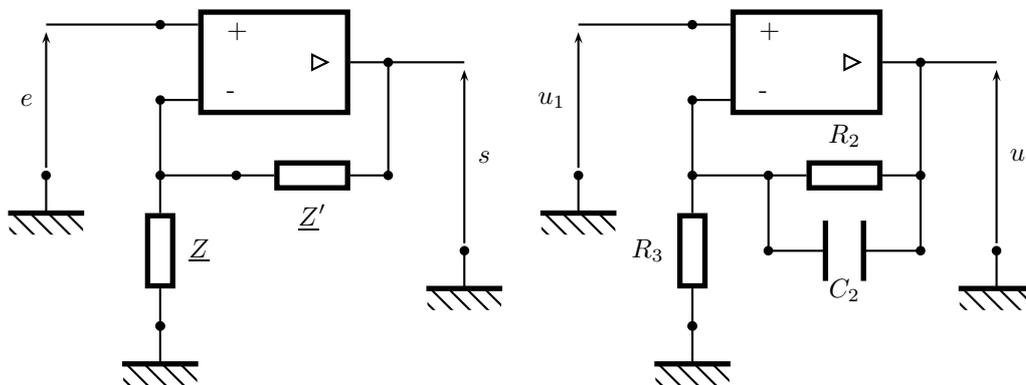


FIGURE 4 – Deuxième filtre (à droite) ( $F_b$ )

9. Soit le filtre de la figure 4 à gauche. Exprimer sa fonction de transfert  $\underline{H}$  en fonction de  $\underline{Z}$  et  $\underline{Z}'$ . Que devient  $\underline{H}$  si les impédances sont  $\underline{Z} = R$  et  $\underline{Z}' = R'$ ? Quel est dans ce cas l'intérêt du montage?

En sortie du filtre ( $F_a$ ), le signal  $u_1(t)$  est envoyé sur le filtre ( $F_b$ ) de la figure 4 à droite.

10. Quelle est l'impédance  $\underline{Z}_{eq}$  de la branche constituée par  $R_2$  en parallèle avec  $C_2$ ?

11. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}_2 = \frac{u_2}{u_1}$  de ce filtre en fonction de  $R_2$ ,  $R_3$  et  $C_2$ .

12. Mettre  $\underline{H}_2$  sous la forme :

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de  $G_0$  et  $\omega_2$ .

13. Quelle est la limite de  $|\underline{H}_2|$  en basse fréquence? en haute fréquence?

14. Calculer numériquement la fréquence caractéristique  $f_2$  correspondant à  $\omega_2$  si  $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$  et  $C_2 = 470 \text{ pF}$  ainsi que son gain  $G_0$ . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

## D. Filtrage sélectif

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale  $f_{co}$  du signal  $u_2$ , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnées sur l'accordeur  $f_{ac}$  (on suppose la corde légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder. Le principe du filtre ( $F_c$ ) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence  $f_{ac}$ . Ce type de commande (à capacité commutée) sera étudié dans la dernière partie du problème.

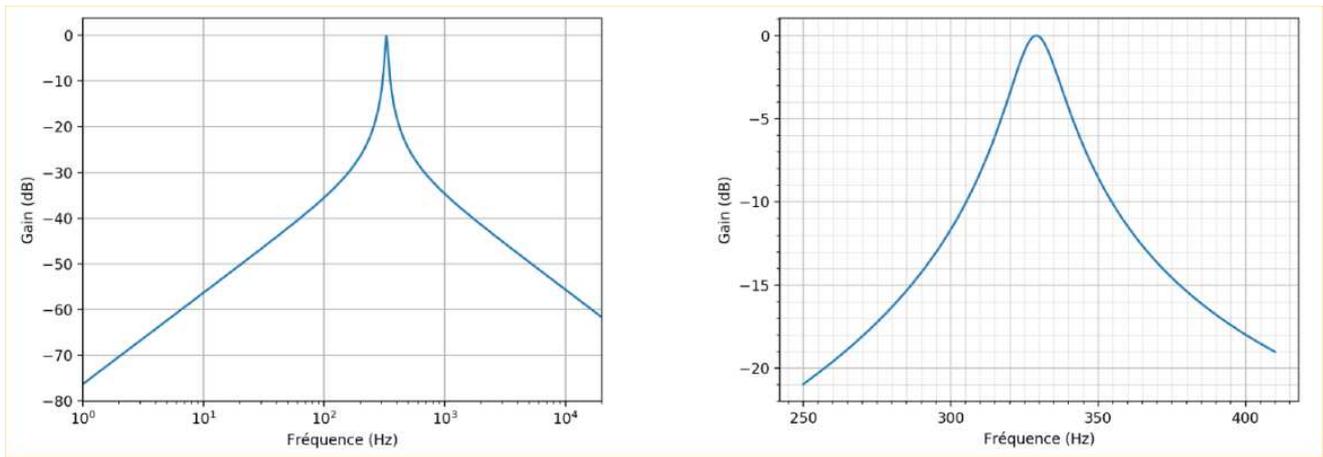
### Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de BODE relatif au gain du filtre ( $F_c$ ) tracé à deux échelles différentes.

15. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique?

16. Donner une estimation de sa bande-passante à  $-3 \text{ dB}$  et de son facteur de qualité. Commenter.

17. Si la corde est désaccordée à  $f_{co} = 315 \text{ Hz}$ , estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

FIGURE 5 – Diagramme de BODE en gain du filtre ( $F_c$ )

### Analyse spectrale

La figure 7 correspond au spectre du signal d'entrée  $u_e$  représenté sur la figure 2.

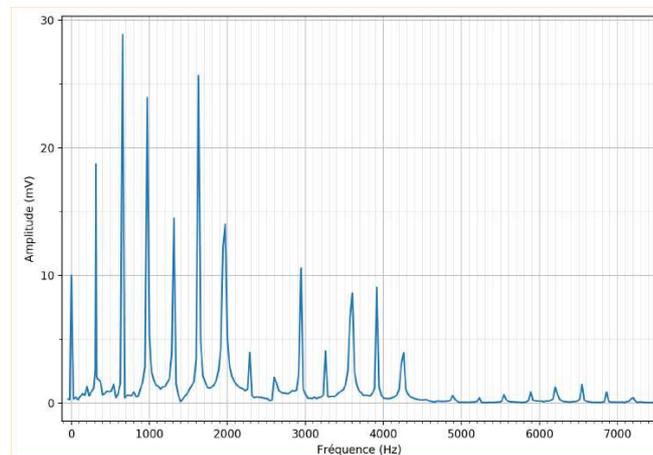


FIGURE 6 – Spectre du signal d'entrée

18. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.

19. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre des figures 7 et 8 correspond à la sortie du premier filtre ( $F_a$ ).

20. Même question, pour la sortie du filtre ( $F_b$ ).

21. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre ( $F_c$ ). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

### E. Filtre sélectif à capacité commutée

22. Rappeler l'expression de la charge  $q$  transférée à un condensateur de capacité  $C$  en fonction de la tension  $u_c$  à laquelle il est soumis. On précisera les conventions d'orientation utilisées.

On monte maintenant un condensateur de capacité  $C_k$  entre deux interrupteurs commandés notés  $K_A$  et  $K_B$  comme l'indique la figure 9.

On fait les hypothèses suivantes :

- Les interrupteurs sont idéaux (d'impédance infinie quand ils sont ouverts et nulle quand ils sont fermés).
- Ils sont toujours dans des états complémentaires : si  $K_A$  est ouvert, alors  $K_B$  est fermé et inversement.
- Ils sont commandés de manière périodique par un signal extérieur (signal  $u_{ref}$  carré périodique de fréquence  $f_k$  (période  $T_k$ ) de telle sorte que :

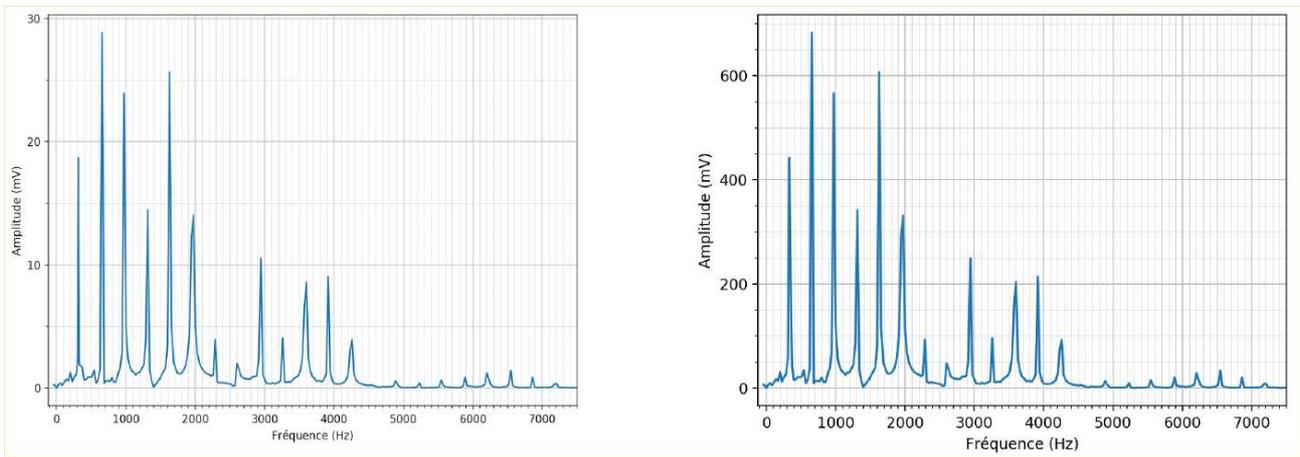


FIGURE 7 – Spectres (a) à gauche et (b) à droite

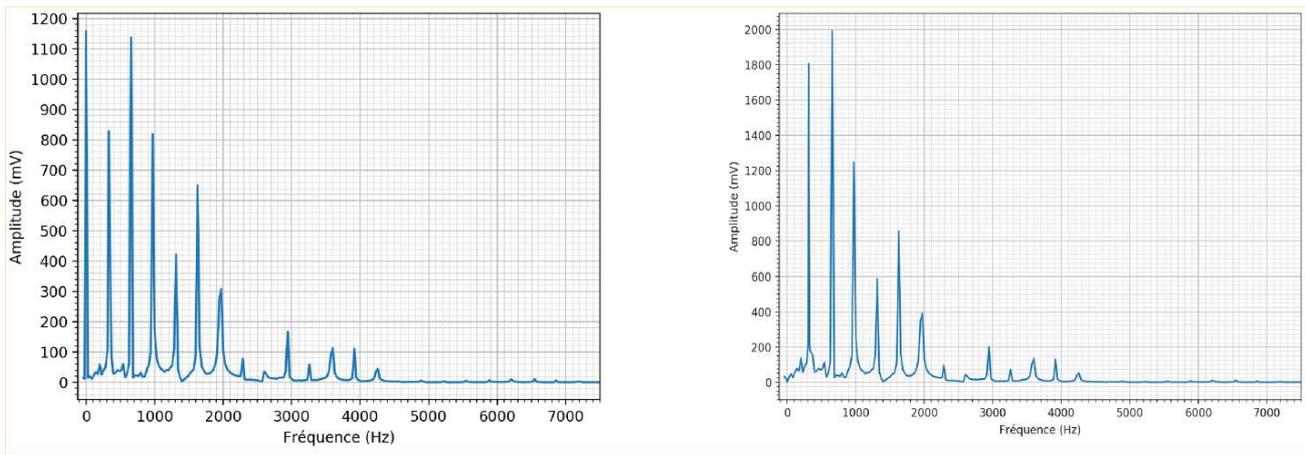


FIGURE 8 – Spectres (c) à gauche et (d) à droite

- sur l'intervalle  $[0, T_k/2[$  :  $K_A$  est fermé et  $K_B$  ouvert ;
  - sur l'intervalle  $[T_k/2, T_k[$  :  $K_A$  est ouvert et  $K_B$  fermé.
- Les condensateurs ont le temps de se charger/décharger sur chaque intervalle de temps.
  - La période  $T_k$  est faible devant tous les autres temps caractéristiques.

**23.** Donner les expressions de  $q_1$  et  $q_2$ , les charges portées par l'armature du condensateur reliée directement au point  $B$  respectivement sur l'intervalle  $[0, T_k/2[$  et  $[T_k/2, T_k[$ . En déduire l'expression de la charge  $\delta q = q_2 - q_1$  transférée de l'entrée vers la sortie en une période.

**24.** À quoi est égale la charge  $Q$  transférée de l'entrée vers la sortie en un temps  $t \gg T_k$  ?

**25.** En déduire l'expression de l'intensité moyenne  $I_m$  associée à ce transfert en fonction de  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $C_k$  et  $f_k$ .

**26.** Pourquoi peut-on en conclure que ce dipôle  $AB$  se comporte comme une résistance  $R_k$  ? Donner l'expression de cette résistance  $R_k$ .

**27.** Expliquer qualitativement comment utiliser cette capacité commutée pour créer des filtres dont la fréquence caractéristique est réglée par le signal de référence  $u_{ref}$  et, en particulier, un filtre du type recherché pour ( $F_c$ ).

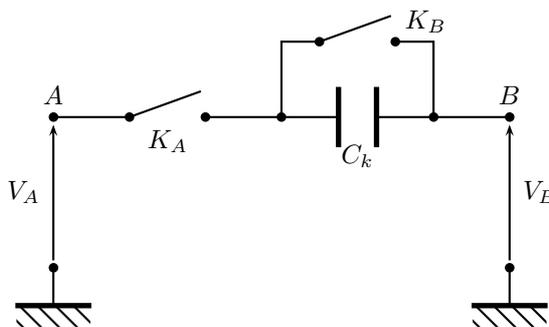


FIGURE 9 – Capacité commutée

## Problème n° 2 – Photoluminescence

X MP 2014

La photoluminescence est l'étude de la radiation émise, en plus de l'émission thermique, par un système physique soumis à une excitation optique réalisée, par exemple, à l'aide d'un laser. On s'intéresse ici à la détection du signal.

La lumière sortant par la face avant de l'échantillon est envoyée dans un monochromateur, qui sélectionne en sortie la gamme la plus étroite possible de longueurs d'onde au voisinage d'une longueur d'onde donnée,  $\lambda$ . Cette longueur d'onde est déterminée par la position angulaire d'un système dispersif,  $\theta(t)$ , laquelle varie lentement dans le temps. Après détection, le signal est donc représenté par une tension lentement variable,  $s(t)$ , d'où l'on déduit facilement l'intensité émise à une longueur d'onde donnée,  $I(\lambda)$ . La détection directe de ce signal présente des inconvénients, aux premiers rangs desquels on peut citer le bruit et la dérive des divers appareils. Le signal doit donc être traité.

### A. Détection synchrone

#### Principe de la détection synchrone

La détection synchrone pallie partiellement ces problèmes. Dans cette méthode, le phénomène physique représenté par  $s(t)$  est modulé sinusoidalement en amplitude à la fréquence angulaire  $\omega_0$  choisie de telle manière que  $s$  peut être considéré comme constant sur la durée  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ; le signal de sortie s'exprime alors par  $S(t) = \Gamma s(t) \cos \omega_0 t + b(t)$ , où  $\Gamma$  est un réel positif et  $b(t)$  est un bruit. Pour extraire  $s$  de  $S$ , on produit électroniquement le produit  $P(t) = S(t) \cos(\omega_0 t - \varphi)$ , où  $\varphi$  est le déphasage accordable d'un générateur pilote. Le signal  $P$  traverse ensuite un filtre sélectif, qui donne en sortie le signal :

$$\overline{m(t, T_i)} = \int_{t-T_i}^t P(u) du$$

où  $T_i$  est le temps d'intégration du module de sortie du détecteur synchrone dont on peut voir le schéma à la figure 10.

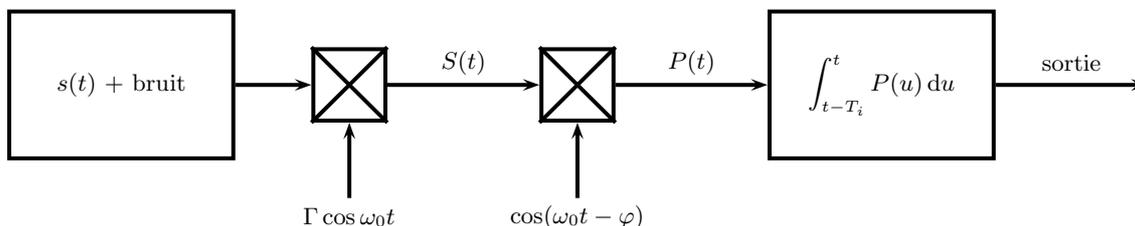


FIGURE 10 – Schématisation d'un détecteur synchrone

1. Justifier qualitativement que, dans un domaine fréquentiel donné, l'on puisse assimiler un filtre passe-bas à un intégrateur. Exprimer  $\overline{m(t, T_i)}$  sous forme de la somme de deux intégrales, l'une faisant intervenir  $s(t)$  et l'autre, notée  $B(t)$ , faisant intervenir  $b(t)$ ; on rappelle la relation  $\cos p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p + q) + \cos(p - q)]$ . Que peut-on dire de  $B(t, T_i)$  ?

2. La figure 11 représente les spectres fréquentiels de  $s(t)$ , du bruit  $b(t)$  et de  $S(t)$ . Représenter qualitativement les spectres fréquentiels du signal après passage dans le second multiplieur puis après l'intégrateur.

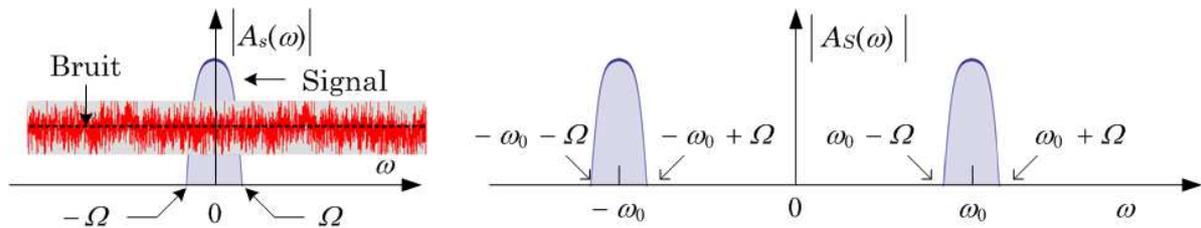


FIGURE 11 – Le spectre fréquentiel d'un signal  $u(t)$  est défini par  $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp i\omega t dt$ . Le module du spectre de  $s$ ,  $|A_s(\omega)|$ , est représenté à gauche ; on lui a donné une forme symétrique sur la bande étroite, centrée en 0,  $[-\Omega, \Omega]$ . Le spectre du bruit est « plat ». La figure de droite représente le spectre de la partie utile de  $S(t)$  : le bruit n'y est pas représenté.

3. Quel compromis réaliser sur  $T_i$  pour que  $\overline{m(t, T_i)}$  reproduise le plus fidèlement possible la forme de  $s(t)$  ? Exprimer  $\overline{m(t, T_i)}$  dans ces conditions, en fonction de  $\Gamma$ ,  $s(t)$  et  $\varphi$ , en supposant  $B(t, T_i)$  négligeable. Comment choisir  $\varphi$  ?

### Réalisation d'une détection synchrone

Pratiquement, la modulation est réalisée en utilisant un hacheur mécanique, tel que la roue ajourée représentée à la figure 12, interposée entre le laser et l'échantillon.

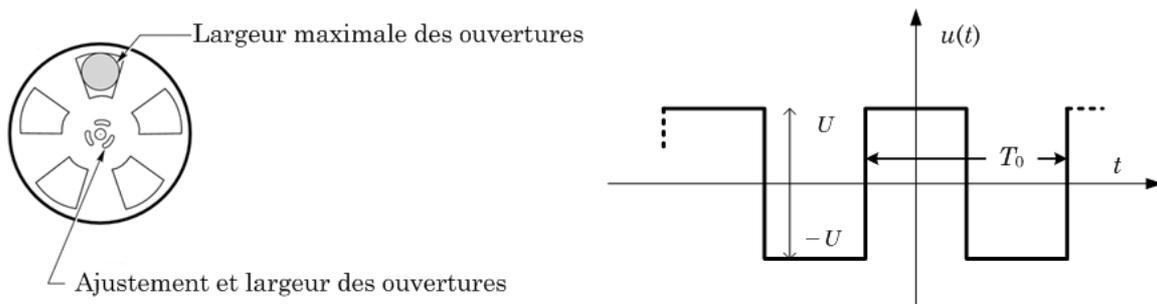


FIGURE 12 – La roue du modulateur mécanique est percée de  $p$  quadrants identiques régulièrement répartis et de largeur ajustable ; une photodiode et un photorécepteur placés de part et d'autre de cette roue produisent le signal rectangulaire de référence, symbolisé dans la partie droite de la figure. Si  $\omega_r$  est la vitesse angulaire de rotation, on note  $T_0 = \frac{2\pi}{p\omega_r} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ .

Ce dispositif permet d'obtenir électriquement le signal rectangulaire périodique  $u(t)$ , nommé signal de référence dont la décomposition en série de FOURIER est :

$$u(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left[ 2\pi(2n+1) \frac{t}{T_0} \right]$$

Le signal de photoluminescence  $s$ , d'amplitude positive, est ainsi haché périodiquement, avec une période  $T_0$ . On note  $S(t)$  le produit (obtenu électroniquement) du signal périodique  $u$  et du signal  $s$ , porteur de l'information à traiter. La démodulation consiste à extraire ce dernier de  $S$ .

4. Montrer que tout se passe comme si le signal  $s$  était modulé par une infinité de porteuses sinusoïdales, dont on donnera les fréquences respectives.

5. Quelle est la nature du filtre de transmittance complexe :

$$\underline{H}(jx) = A \frac{2m(jx)}{1 + (jx)^2 + 2m(jx)}$$

où  $A$  et  $m$  sont réels positifs et  $x = \omega/\omega_c$  une fréquence réduite ? Esquisser, pour  $m < 1$ , le diagramme de BODE, en amplitude et en phase, de cette transmittance.

6. La transmittance complexe du filtre SALLEN-KEY de la figure 14 est du type de celui de la question précédente. Exprimer  $A$ ,  $Q = \frac{1}{2m}$  et  $\omega_c$  en fonction des composants  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R$  et  $C$  de ce filtre. Pour l'amplificateur opérationnel, on rappelle ses caractéristiques sur le schéma de la figure 13.

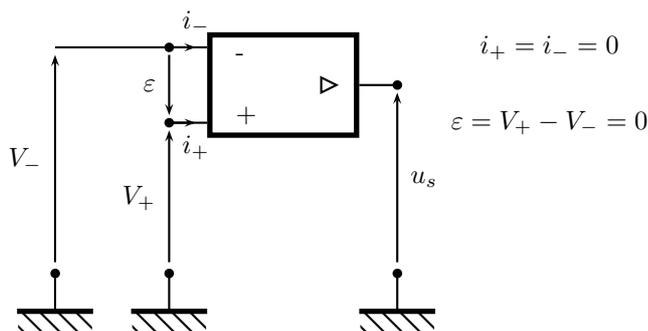


FIGURE 13 – Amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire

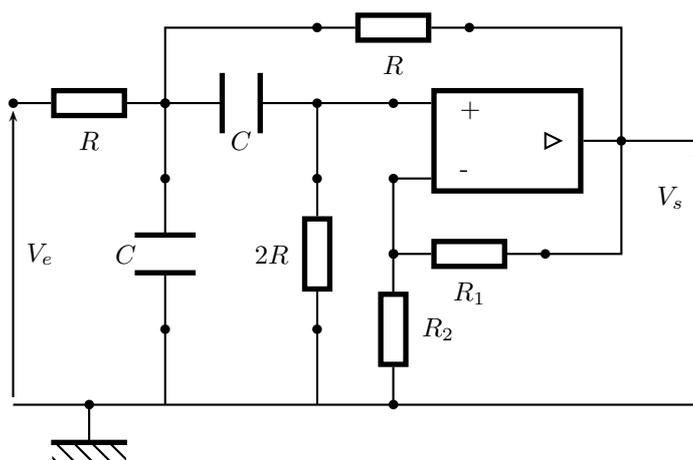


FIGURE 14 – Filtre de SALLEN-KEY. L'AO, supposé parfait, fonctionne en régime linéaire. La transmittance est alors  $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = K \frac{jRC\omega}{1 + (3 - K)jRC\omega + (jRC\omega)^2}$ , où  $K = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ .

7. Le filtre de la figure 14 est alimenté par le signal rectangulaire représenté dans la partie droite de la figure 12. Comment choisir les composants pour une utilisation optimale ?

### B. Échantillonneur-bloqueur (numérique)

Un signal numérique est moins sensible aux perturbations qu'un signal analogique et surtout, il se prête bien plus facilement au traitement (numérique!). Pour ces raisons, on choisit de convertir le signal analogique issu du détecteur en signal numérique binaire. La chaîne de transmission des données est représentée à la figure 15.

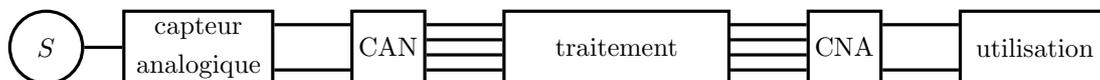


FIGURE 15 – Chaîne de traitement de signal. CAN = Convertisseur Analogique Numérique. La boîte capteur analogique peut contenir des éléments de traitement analogique.

La conversion analogique numérique commence par l'échantillonnage, transformation du signal continu analogique en signal discontinu. L'élément réalisant cette transformation (voir la figure 16) est essentiellement un interrupteur commandé par une tension périodique  $e(t)$  de fréquence  $F_e = 1/T_e$  ( $T_e$  est la période de fermeture de l'interrupteur). La durée de fermeture est très petite devant  $T_e$ .

Le signal de commande  $e(t)$  est modélisé par une suite périodique de pics d'amplitude constante et de largeur temporelle  $\epsilon$  très petite devant  $T_e$  (voir la figure 17) ; le pic centré sur l'instant  $t = nT_e$  étant noté  $\delta(t - nT_e)$ ,

la tension de commande s'exprime alors par  $e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e)$ .

8. Exprimer la tension de sortie  $v_e(t)$ .

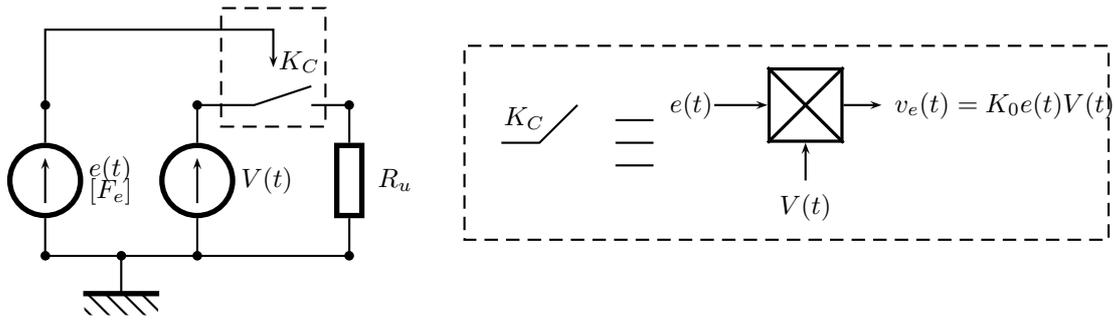


FIGURE 16 – Principe d’un échantillonneur ; le commutateur  $K_C$  est un multiplieur commandé de gain  $K_0$  entre  $e(t)$  et le signal  $V(t)$ . Le circuit d’utilisation est modélisé par la résistance  $R_u$ .

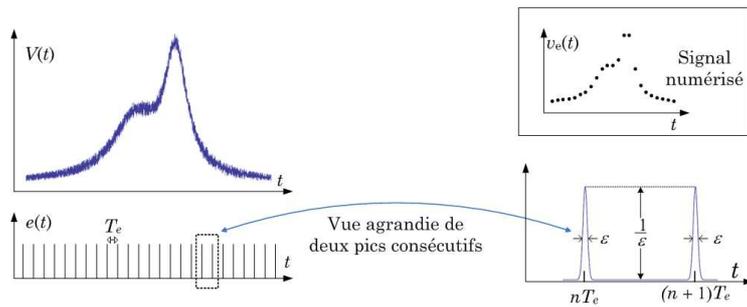


FIGURE 17 – Échantillonnage. Le cartouche en haut à droite donne l’allure de  $v_e(t)$ , tension aux bornes de  $R_u$  ; l’allure de la courbe originale est préservée, mais le pointé du sommet est imprécis.

Le convertisseur analogique numérique doit conserver (bloquer) la valeur à convertir pendant le temps nécessaire à cette conversion. On transforme pour cela le circuit de la figure 16 en circuit de mémorisation formant ainsi un échantillonneur bloqueur. Le schéma électrique de principe du dispositif est représenté dans la partie gauche de la figure 18.

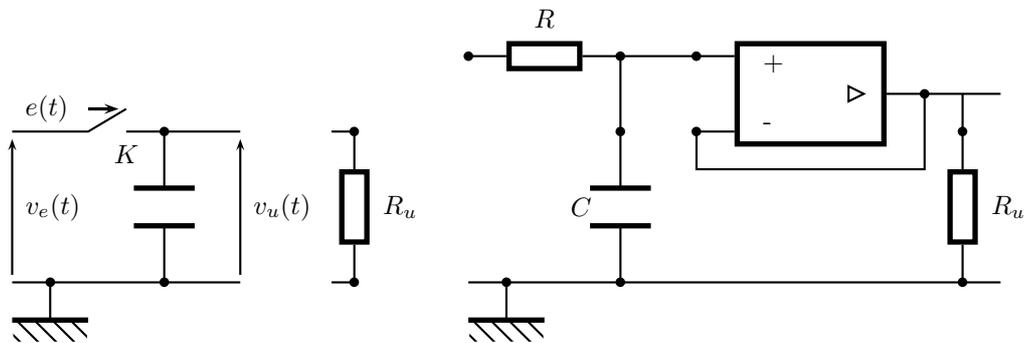


FIGURE 18 – À gauche : Échantillonneur bloqueur ; la résistance  $R_u$  modélise le circuit d’utilisation. À droite : Échantillonneur bloqueur avec AO parfait. La résistance  $R$  représente l’ensemble des résistances en amont, lorsque l’interrupteur est fermé.

9. En position fermée, la résistance de sortie du générateur fournissant la tension  $V(t)$  (à laquelle s’ajoute celle de l’interrupteur de commande) est assimilable à une résistance de valeur  $R_s$ . Donner l’expression du temps au bout duquel la tension aux bornes du condensateur atteint 95% de sa valeur limite, supposée constante pendant la charge.

10. Que se passe-t-il lorsque l’interrupteur  $K$  bascule en position ouverte ?

11. Quel est l’intérêt d’intercaler entre la charge  $R_u$  et l’échantillonneur bloqueur un étage à Amplificateur Opérationnel (AO), tel que représenté dans la partie droite de la figure 18 ?

12. Représenter l’allure du signal obtenu à la sortie de l’échantillonneur bloqueur. On notera  $t_a$  le temps d’acquisition et  $t_h$  le temps de maintien de la charge du condensateur.

### C. Restitution du signal après traitement

On suppose à présent disposer du signal traité numériquement, que l'on veut remettre sous forme analogique. Le Convertisseur Numérique Analogique (CNA) réalise cette opération. Le principe d'un CNA est représenté à la figure 19.

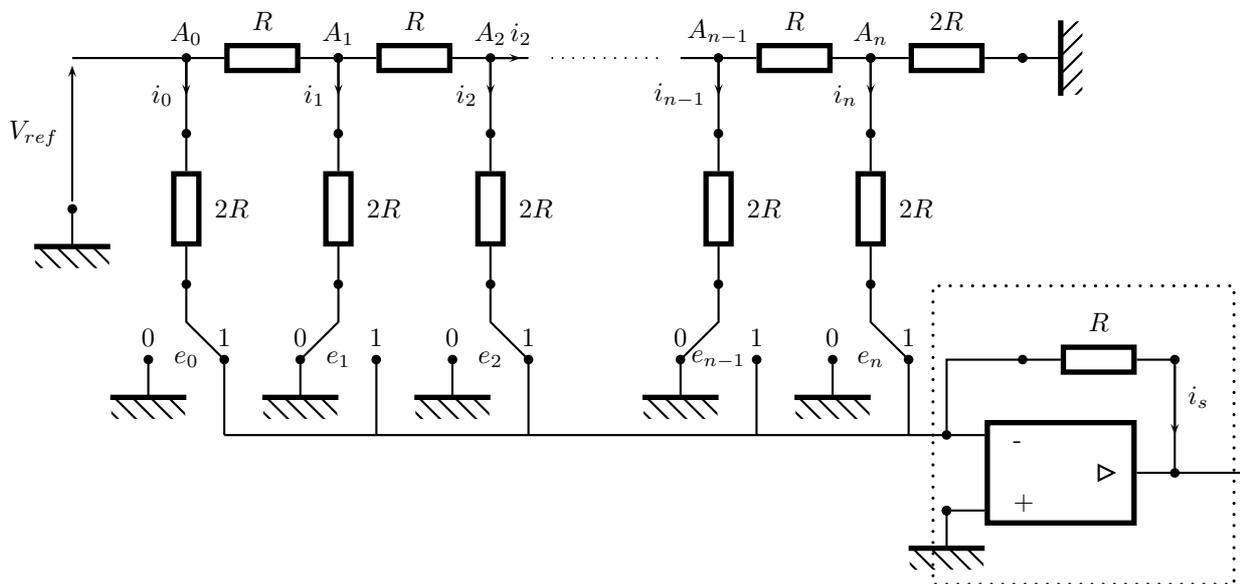


FIGURE 19 – Un CNA dit à échelle comprend autant de sources qu'il y a de bits dans le signal numérique ; par convention, l'état de fermeture d'un commutateur correspond à la valeur binaire  $e_k = 1$  et l'état d'ouverture (borne reliée à la masse) à la valeur  $e_k = 0$ . Le circuit à AO fournit en sortie la grandeur analogique étudiée.

- 13. Quelle est la résistance de l'ensemble du circuit à la droite du point  $A_1$  de la figure 19?
- 14. En déduire que le courant immédiatement à droite de ce point est égal au  $i_1$  de la figure 19.
- 15. Toujours avec les notations de la figure 19, montrer que :

$$i_s = \frac{V_{ref}}{2R} \left( \frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \dots + \frac{e_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{e_n}{2^n} \right)$$

- 16. Quel est, écrit en base 2, le nombre représenté en base 10 dans la relation établie à la question précédente ?
- 17. Quelle doit-être la valeur minimale de  $n$  si l'on veut obtenir au moins 250 valeurs différentes de la tension de sortie ?
- 18. Quelle est la fonction du circuit encadré en pointillés dans la figure 19 ?
- 19. Le signal analogique de sortie reste, en réalité, quantifié (voir la figure 20). Par quel genre de traitement électronique pourrait-on, à partir de ce signal constant par morceaux, obtenir une courbe continûment dérivable ?

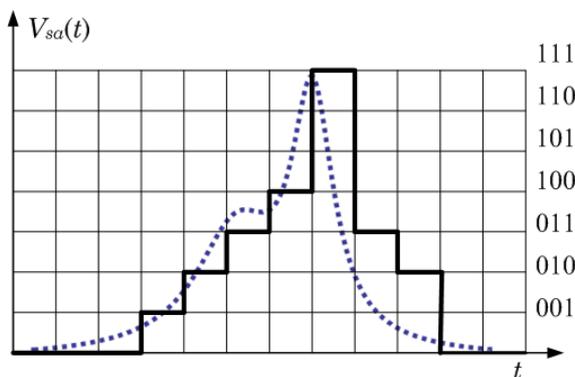


FIGURE 20 – Un exemple de conversion pour  $n = 3$  du spectre de la figure 17. On obtient en sortie le signal constant par morceaux représenté en trait gras. Cette discrétisation est caricaturalement fruste : on perd a priori la structure à deux bosses de l'original, représenté en pointillés.

## D. Quelques aspects pratiques

### Bruit de quantification

La quantification linéaire par défaut réalise la codification du signal  $e(t) \in [nq; (n+1)q] \mapsto nq$ . La quantité  $\epsilon = e(t) - nq$  est supposée être uniformément répartie entre 0 et  $q$  :  $0 \leq \epsilon < q$ . Tout se passe donc comme si l'on substituait au signal  $e$  le signal  $nq + \epsilon$ , somme du signal déterministe  $nq$  et d'un signal aléatoire, d'où le nom de bruit de quantification donné à  $\epsilon$ . La valeur moyenne d'une fonction  $F(\epsilon)$  est par définition ici :  $\overline{F} = \frac{1}{q} \int_0^q F(\epsilon) d\epsilon$ ; l'écart-type  $\sigma$  est donné par  $\sigma^2 = \overline{(F - \overline{F})^2}$ .

20. Après avoir vérifié le résultat évident  $\overline{\epsilon} = q/2$ , calculer l'écart-type de  $\epsilon$ .

21. Dans la quantification linéaire centrée, on codifie par  $e(t) \in [(2n-1)q/2; (2n+1)q/2] \mapsto nq$ ; le bruit de quantification est uniformément réparti entre  $-q/2$  et  $q/2$ . Calculer la valeur moyenne et l'écart type du bruit de quantification.

22. Lequel de ces deux modes de quantification vous apparaît-il plus avantageux que l'autre ?

### Bruits d'origine physique

Il ne saurait y avoir de signal sans fluctuations aléatoires, que l'on nomme bruit. La valeur moyenne de ce bruit est nulle; son écart type ne l'est pas. Un filtre passe bas (ou un passe-bande) a pour effet de couper les hautes fréquences, éliminant une partie du bruit et diminuant sa valeur efficace. Il est donc nécessaire d'indiquer la bande passante d'analyse du signal. Un concept utile de ce point de vue est la bande passante équivalente,  $B_{eq}$ , d'un filtre de transmittance  $\underline{H}(j\omega)$  :

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi |\underline{H}_M|^2} \int_0^\infty |\underline{H}(j\omega)|^2 d\omega$$

où  $|\underline{H}_M|$  est le maximum de  $|\underline{H}|$ .

23. Interpréter le sens de  $B_{eq}$ .

24. Calculer  $B_{eq}$  pour  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ .

25. Sachant que  $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2 + 4m^2 x^2} = \frac{\pi}{4m}$ , calculer  $B_{eq}$  pour le filtre de SALLEN-KEY de la question 5.. Pour  $m \ll 1$ , comparer  $B_{eq}$  à la largeur à mi-hauteur de ce filtre.

Le détecteur de lumière est un photomultiplicateur (voir la figure 21) dont la surface sensible (cathode), lorsqu'elle est éclairée, libère des électrons; ces électrons, constituant un courant, (valeur typique pour un signal de photoluminescence :  $i_K \simeq 10^{-12}$  A) sont focalisés par un dispositif d'optique électronique sur des plaques multiplicatrices d'électrons (dynodes) : le gain  $G$  de la chaîne est de l'ordre de  $10^6$ , de sorte que le courant de signal au niveau de l'anode ( $i_A \simeq Gi_K = 10^{-6}$  A) est finalement recueilli sur une résistance de charge ( $R_a \simeq 10^3 \Omega$ ). La tension aux bornes de cette résistance est ainsi  $e \simeq 1$  mV.

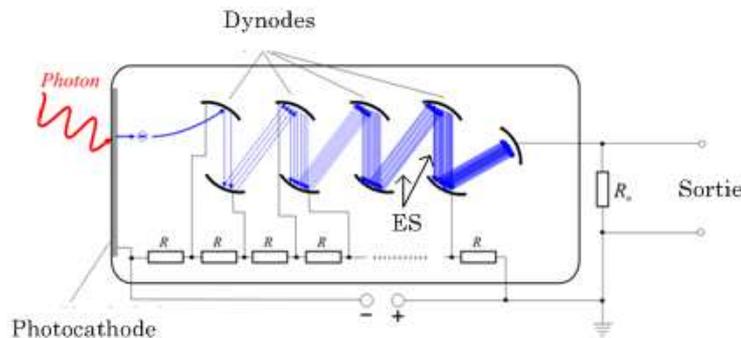


FIGURE 21 – Photomultiplicateur. Un photoélectron arraché de la cathode photosensible est démultiplié par une batterie de dynodes polarisées. La résistance de charge  $R_a$  recueille le courant anodique d'électrons secondaires (ES). Source : [wikimedia.org/wiki/File :Photomultiplier schema de.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photomultiplier_schema_de.png).

En réalité, s'ajoutent à cette dernière tension un certain nombre de signaux de bruit, parmi lesquels : d'une part un bruit dit de scintillation,  $i_{sc}$ , qui existe en l'absence de signal et qui est dû à des émissions d'électrons

« dans le noir » :  $i_{sc} = G(2ei_d B_{eq})^{1/2}$ , où  $i_d \simeq 10^{-15}$  A, d'autre part une tension aléatoire aux bornes de la résistance de charge,  $V_J = (4k_B T R_a B_{eq})^{1/2}$  (bruit de JOHNSON).

Dans les formules précédentes,  $e$  représente désormais la charge élémentaire  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C et  $k_B$  la constante de BOLTZMANN  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J · K<sup>-1</sup>.

**26.** Vérifier l'homogénéité des relations de définition de  $i_{sc}$  et de  $V_J$ .

**27.** Le courant associé au bruit de JOHNSON étant  $i_J = \left( \frac{4k_B T B_{eq}}{R_a} \right)^{1/2}$ , comparer  $i_{sc}$  et  $i_J$  à la température ambiante.

**28.** Au signal de photocathode  $i_K$  est associé le bruit  $i_b = G(2ei_K B_{eq})^{1/2}$ . Calculer le rapport signal sur bruit défini par :

$$\frac{\text{Signal}}{\text{Bruit}} = \frac{G i_K}{(i_b^2 + i_J^2 + i_{sc}^2)^{1/2}}$$

et commenter le résultat obtenu, en se donnant une valeur raisonnable de  $B_{eq}$ .