

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°1 du 19-09-2024

— Durée : 4 heures. Solutions —

Problème n° 1 – Accordeur de guitare

Centrale TSI 2019

A. Le signal

- En appréciant le graphique, on peut proposer la moyenne : $\langle u_e \rangle_t \simeq 10 \text{ mV}$.
- On peut repérer 2 périodes entre les dates 2 ms et 8 ms. La période est donc d'environ 3 ms ce qui correspond à une fréquence $f_{co} = 330 \text{ Hz}$.
- Il s'agit de la corde de **Mi aigu**.
- L'analyse spectrale de ce signal fera apparaître des harmoniques car le signal n'est **pas sinusoïdal**. Il y a d'autres composantes que le fondamental à 330 Hz. Quant à savoir si ces autres fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, c'est beaucoup plus difficile d'être affirmatif mais il semble que ce soit le cas au premier abord.

B. Premier filtre

- Par diviseur de tension, on obtient facilement $H_1 = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}}$. On peut écrire cette fonction de transfert selon : $H_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{jR_1C_1\omega}}$.
- Il s'agit d'un filtre passe-haut parce que $|H_1|$ tend vers 0 en basse fréquence alors que si on travaille en haute fréquence, on trouve $H_1 = 1$. La distinction haute et basse fréquence s'effectue par comparaison de ω avec la pulsation caractéristique de ce filtre $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$.
- Si $\omega \ll \omega_1$ alors $H_1 \simeq j\frac{\omega}{\omega_1}$, on obtient un gain qui évolue selon $G_{dB} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_1$. On a une droite de pente +20 dB par décade. Pour la phase qui est l'argument de H_1 , on a $\frac{\pi}{2}$. Si l'on se place en haute fréquence, nous avons vu que $H_1 = 1$, le gain est donc $G_{dB} = 0$ et la phase $\varphi = 0$. La représentation du diagramme de BODE est réalisé à la figure 1 où on a posé $x = \omega/\omega_1$.

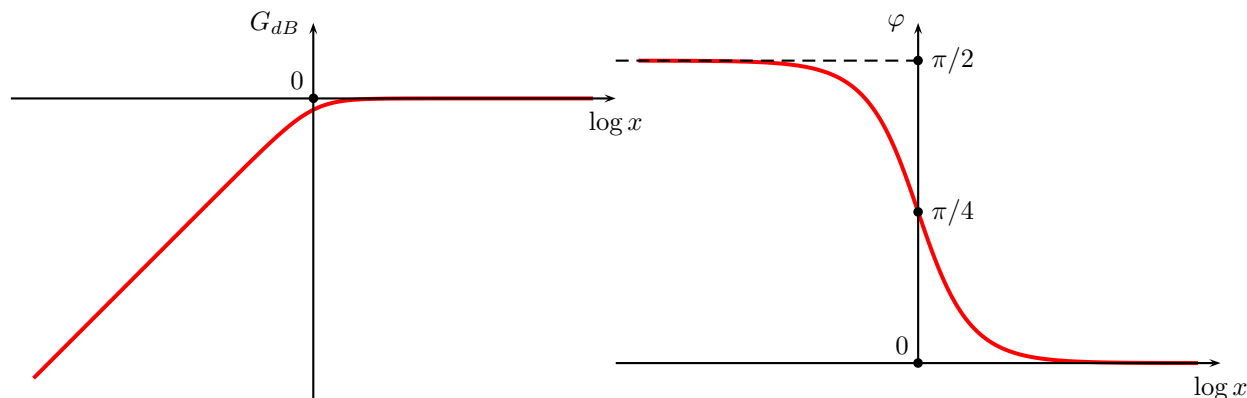


FIGURE 1 – Diagramme de BODE du filtre (F_a)

- On trouve $f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 15,9 \text{ Hz}$. En effet, la fréquence de coupure correspond au moment où la fonction de transfert vérifie $|H_1(f_1)| = \frac{H_{1,max}}{\sqrt{2}}$. Ce premier filtre a pour objectif de couper la composante continue du signal $u_e(t)$.

C. Deuxième filtre

- On peut constater par le montage que $e = V_+$. Puisque l'amplificateur est en régime linéaire, on a $V_+ = V_-$. Or, par diviseur de tension, on voit que $\frac{V_-}{s} = \frac{Z}{Z+Z'}$. La fonction de transfert est alors $H = 1 + \frac{Z'}{Z}$. Si on utilise de simples résistances, on a une fonction de transfert $H = 1 + \frac{R'}{R}$ réelle et indépendante de la fréquence.

Avec un tel filtre, on ne filtre rien du tout puisque le traitement des harmoniques sera le même pour chacune d'entre-elles. On amplifie le signal sans le déformer.

10. On a $Z_{eq} = \frac{R_2 \frac{1}{jR_2 C_2 \omega}}{R_2 + \frac{1}{jR_2 C_2 \omega}}$. On peut simplifier en écrivant : $Z_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2 C_2 \omega}$.

11. Avec le calcul général effectué avant, on trouve que $H_2 = 1 + \frac{R_2}{R_3} \frac{1}{1 + jR_2 C_2 \omega}$.

12. On obtient la forme demandée en posant $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$.

13. $|H_2|$ en basse fréquence peut s'approcher à $1 + G_0$ alors qu'en haute fréquence, on a $|H_2| \simeq 1$.

14. On trouve $f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 498 \text{ Hz}$ et $G_0 = \frac{R_2}{R_3} = 113$. Ce filtre renforce clairement les basses fréquences d'un facteur de l'ordre de 100, principalement en dessous de 500 Hz et donc en particulier le fondamental du signal de départ qui est à 330 Hz par rapport aux plus hautes fréquences où $|H_2| = 1$.

D. Filtrage sélectif

15. Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre car on peut apprécier les pentes de $\pm 20 \text{ dB}$ par décade en basse et en haute fréquence. La fréquence centrale est $f_{ac} = 330 \text{ Hz}$, valeur qui est tout sauf une surprise puisque l'on souhaitait travailler sur l'accordage de la corde de Mi aigu.

16. La bande-passante à -3 dB correspond à l'intervalle des fréquences qui assurent un module de la fonction de transfert compris entre sa valeur maximale H_{max} et cette même valeur divisée par racine de deux : $\frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \leq |H(f)| \leq H_{max}$. Comme le gain maximum est nul en décibels, cela veut dire que $H_{max} = 1$. À l'aide du graphique en échelle linéaire, on peut déterminer la bande passante comme constituée des fréquences comprises entre 320 Hz et 340 Hz. On a donc $\Delta f = 20 \text{ Hz}$. On peut démontrer que le facteur de qualité est relié à la bande-passante par $Q = \frac{f_{ac}}{\Delta f} = 16,5$. Cette valeur est déjà élevée pour un filtre. Le filtre passe-bande peut être qualifié de très sélectif.

17. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315 \text{ Hz}$, on peut voir que cela correspond à un gain de -6 dB . Cela signifie que l'amplitude du fondamental émis par la corde désaccordée est $\boxed{\text{divisé par 2}}$.

Analyse spectrale

18. Le spectre proposé présente une $\boxed{\text{composante continue de } 10 \text{ mV}}$ que l'on repère à une fréquence nulle. Cela correspond à la moyenne que nous avons évaluée avant. Ensuite, en regardant bien le graphique, on peut constater que le fondamental est selon toute vraisemblance vers 330 Hz et qu'ensuite toutes les harmoniques sont situées à égale distance (en fréquence évidemment). D'ailleurs, l'harmonique de rang 3 est à 1 kHz, en divisant par 3 cette valeur on retrouve bien la fréquence que nous avons estimée pour le fondamental.

19. Le premier filtre est un passe-haut de fréquence $f_1 = 15,9 \text{ Hz}$, il va donc couper la composante continue en atténuant très peu les fréquences nettement supérieure à f_1 avec un fondamental à 330 Hz, on peut dire que l'harmonique est conservée en totalité. Le spectre correspondant à la tension u_1 est donc le spectre $\boxed{(a)}$.

20. Le filtre (F_b) va amplifier le fondamental à 330 Hz par un facteur de l'ordre de 100 comme nous l'avons dit avant puisque cette fréquence est inférieure à $f_2 = 498 \text{ Hz}$. On part d'une amplitude de 18 mV, on doit donc trouver une amplitude de 1 800 mV environ. C'est le spectre $\boxed{(d)}$ qui correspond à la tension $u_2(t)$.

21. Comme la bande passante $\Delta f = 20 \text{ Hz}$ du filtre passe-bande est inférieure à la distance qui sépare deux fréquences du signal (330 Hz), le filtre donnera soit rien soit un signal monochromatique si la fréquence du signal est dans la bande passante. Ici, en l'espèce, on aura un signal de fréquence 330 Hz et donc une $\boxed{\text{tension sinusoïdale}}$.

E. Filtre sélectif à capacité commutée

22. On $\boxed{q = C u_c}$ où $u_c = V_A - V_B$ et donc où q est portée par l'armature portée au potentiel V_A .

23. On a $q_1 = C_k(V_B - V_A)$ et $q_2 = 0$ car le condensateur a été court-circuité : la tension entre ses bornes est donc nulle. On en déduit que $\boxed{\delta q = C_k(V_A - V_B)}$.

24. La charge précédente représente la charge transférée pendant une durée T_k . Comme à chaque période, le phénomène se reproduit à l'identique, on peut écrire que : $\boxed{Q = \frac{t}{T_k} C_k(V_A - V_B)}$. Cette réponse suppose que

l'on oublie la durée inférieure à une période qui termine un nombre entier de périodes très élevés. Cela est parfaitement justifié car $t \gg T_k$.

25. L'intensité moyenne correspond au rapport de la charge transférée et de la durée considérée. On a donc $I_m = \frac{Q}{t} = \frac{C_k}{T_k}(V_A - V_B)$. On peut encore exprimer cette intensité en utilisant la fréquence du cycle de commutation des interrupteurs : $I_m = f_k C_k (V_A - V_B)$.

26. La loi précédente montre que la différence de potentielle est proportionnelle à l'intensité moyenne à condition de travailler sur une durée grande devant T_k . C'est équivalent à la loi d'OHM : $V_A - V_B = \frac{1}{f_k C_k} I_{moy}$. La résistance équivalente est donc : $R_k = \frac{1}{f_k C_k}$.

27. On peut constituer avec des ensembles (R, C) série et (R, C) parallèle un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est du type $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ comme dans un filtre du type du pont de WIEN. Grâce à la fréquence f_k , on fait évoluer R_k et on adapte le filtre passe-bande à une autre corde.

Problème n° 2 – Photoluminescence

X MP 2014

A. Détection synchrone

Principe de la détection synchrone

1. Un filtre passe-bas du premier ordre correspond à une fonction de transfert $H = \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{s}{1 + j\omega\tau}$. En passant dans le domaine temporel, cela correspond à l'équation différentielle $\tau \frac{ds}{dt} + s = e$. Si l'on se place dans le domaine où $\omega\tau \gg 1$, on a $j\omega\tau s = e$ ce qui s'écrit encore $\tau \frac{ds}{dt} = e$ et par conséquent $s(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e(t') dt'$. Le filtre passe-bas est donc bien un intégrateur pour le domaine des fréquences f telle que $f \gg \frac{1}{2\pi\tau}$. D'après l'opération réalisée, on a $P(t) = \Gamma s(t) \cos(\omega_0 t - \varphi) + b(t) \cos(\omega_0 t - \varphi)$. En utilisant la formule de trigonométrie rappelée dans l'énoncé, on obtient $P(t) = \frac{\Gamma}{2} s(t) [\cos(2\omega_0 t - \varphi) + \cos \varphi] + b(t) \cos(\omega_0 t - \varphi)$. On en déduit le calcul de la moyenne : $\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} \int_{t-T_i}^t s(t') [\cos(2\omega_0 t' - \varphi) + \cos \varphi] dt' + B(t, T_i)$ avec $B(t, T_i) = \int_{t-T_i}^t b(t') \cos(\omega_0 t' - \varphi) dt'$. $b(t')$ est un bruit, automatiquement $b(t') \cos(\omega_0 t' - \varphi)$ est aussi un bruit pour $T_i \gg T_0$ et T_i grande devant les périodes présentes dans le bruit, ce qui est attendu pour un bruit. On peut donc en déduire que $B(t, T_i) = 0$.

2. On multiplie le signal précédent par $\cos(\omega_0 t - \varphi)$. Pour déterminer le spectre, il faut additionner et soustraire ω_0 au spectre précédent de $S(t)$. On obtient un pic d'intensité la plus élevée pour les pulsations comprises dans l'intervalle $[-\Omega; \Omega]$ accompagné de deux pics dans les intervalles suivants : $[-(2\omega_0 + \Omega); -2\omega_0 + \Omega]$ et $[2\omega_0 - \Omega; 2\omega_0 + \Omega]$. Après l'intégrateur, on a filtré les hautes fréquences. Cela fait qu'il ne subsiste que l'intervalle $[-\Omega; \Omega]$.

3. Pour arriver à récupérer l'information, il faut que la période de $s(t)$ qui est en $\frac{2\pi}{\Omega}$ soit grande devant la durée d'intégration T_i . Mais pour filtrer le reste du signal, il faut que cette même période T_i soit grande devant T_0 . Le compromis à trouver est donc : $\frac{2\pi}{\omega_0} \ll T_i \ll \frac{2\pi}{\Omega}$. Si cette condition est réalisée alors $s(t)$ varie peu pendant la durée T_i : on peut la sortir de l'intégrale. On a donc : $\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} s(t) (\int_{t-T_i}^t \cos(2\omega_0 t' - \varphi) dt' + \int_{t-T_i}^t \cos \varphi dt')$. On obtient ainsi $\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} T_i \cos \varphi s(t)$. Pour obtenir le signal le plus grand possible, il faut choisir $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Réalisation d'une détection synchrone

4. Si l'on effectue maintenant le produit $s(t)u(t)$, on multiplie la fréquence du signal $s(t)$ par chaque fréquence présente dans le spectre du signal créneau. Il y en a une infinité sur le plan mathématique mais seules les premières ont une réalité physique car les harmoniques de rang élevé ont une amplitude qui sera vite noyée dans le bruit. Les fréquences présentes dans la porteuse sont : $f_p = \frac{2n+1}{T_0}$.

5. On peut facilement factoriser le terme $2m(jx)$ dans l'expression de la fonction de transfert fournie pour écrire que $H(jx) = \frac{A}{1 + \frac{j}{2m}(x - \frac{1}{x})}$. Il s'agit d'un filtre passe-bande centré en $x = 1$ avec une résonance relativement aiguë puisque $m \ll 1$ (le facteur de qualité $Q = 1/(2m) \gg 1$). Sa phase évolue entre $\pi/2$ et $-\pi/2$, elle s'annule en $x = 1$. Le diagramme de BODE en amplitude de ce filtre est fourni sur le schéma de la figure 2.

6. La fonction de transfert du filtre analogique proposé peut encore s'écrire $H(j\omega) = \frac{\frac{K}{3-K}}{1 + j \frac{1}{3-K} (RC\omega - \frac{1}{RC\omega})}$. On peut donc facilement identifier les facteurs : $A = \frac{K}{3-K}$ et $Q = \frac{1}{3-K}$. La pulsation de résonance est $\omega_c = \frac{1}{RC}$, on peut aussi exprimer le gain maximum et le facteur de qualité avec les résistances du circuit : $A = \frac{R_2 + R_1}{2R_2 - R_1}$ et $Q = \frac{R_2}{2R_2 - R_1}$. On notera que si $2R_2 = R_1$, il ne faut pas imaginer que le gain sera infini. En effet, le calcul de

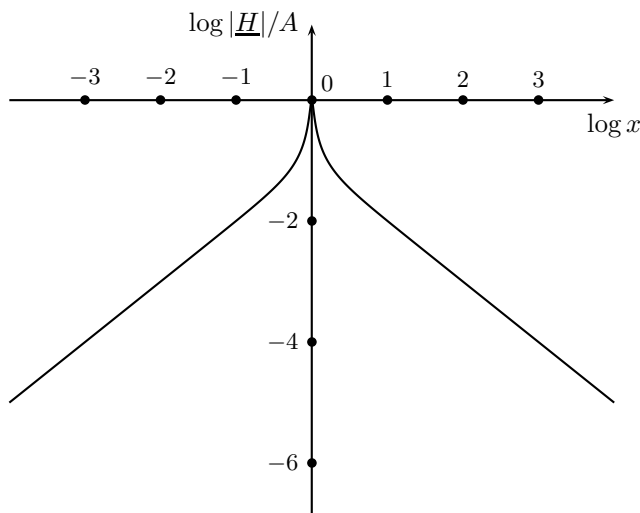


FIGURE 2 – Filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 10$

$H(j\omega)$ suppose que l’amplificateur opérationnel est en régime linéaire. Dans le cas particulier précédent, l’AO se mettrait en saturation. Le circuit ne joue plus alors son rôle de filtre passe-bande.

7. Il ne faut laisser passer qu’une seule harmonique, alors autant que cela soit celle d’amplitude la plus élevée. Il faut donc centrer la pulsation ω_c sur la pulsation $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. On doit donc avoir $T_0 = 2\pi RC$. Encore faut-il que la bande-passante soit suffisamment fine pour éviter qu’une seconde harmonique ne passe dans le filtre. Ici, la seconde harmonique est $3\Omega_0$. La bande-passante du filtre étant $\frac{\omega_c}{Q}$, il suffit que $\frac{1}{QRC} < \Omega_0$ pour obtenir un bon filtrage.

B. Échantillonneur bloqueur (numérique)

8. On a $v_e(t) = K_0 (\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e)) V(t)$. Comme la durée d’un signal $\delta(t - nT_e)$ est très brève, on peut considérer que $V(t)$ n’a pas le temps de changer de valeur pendant cette durée. On peut donc rentrer $V(t)$ dans la somme définissant le signal d’échantillonnage. On écrit donc : $v_e(t) = K_0 \sum_{n=0}^{\infty} V(t) \delta(t - nT_e)$.

9. En position fermée, l’interrupteur nous amène à considérer le schéma de la figure 3. On raisonne avec un diviseur de tension en utilisant l’expression de l’impédance équivalente $Z_{eq} = \frac{R_u}{1+jR_u C\omega}$. On a donc $v_u = \frac{V Z_{eq}}{R_s + Z_{eq}}$. On obtient donc $v_u = \frac{\frac{R_u R_s}{1+jR_u R_s C\omega}}{R_s + \frac{R_u}{1+jR_u R_s C\omega}} V$. La durée caractéristique du filtre est $\tau_a = \frac{R_u R_s}{R_u + R_s} C$. Il faut une durée de l’ordre de $\Delta t_a = 3\tau_a = 3 \frac{R_u R_s}{R_u + R_s} C$ pour considérer l’acquisition du signal réalisée.

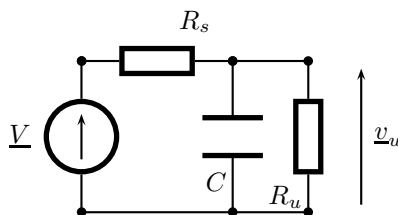


FIGURE 3 – Circuit équivalent

10. Lorsque l’interrupteur est ouvert, on obtient un circuit simple constitué uniquement du condensateur C et de la résistance R_u . La constante de temps est $\tau_h = R_u C$. Le condensateur va se décharger dans la résistance R_u . Le temps de maintien du signal est de l’ordre de τ_h .

11. En intercalant l’amplificateur opérationnel dans le montage, on réalise un suiveur et, surtout, on profite de la très grande impédance d’entrée de l’AO $R_u \gg R_s$. Le temps d’acquisition est donc $t_a = 3R_s C$ mais c’est aussi le temps correspondant à la décharge du condensateur qui va se produire lorsque le signal à échantillonner va diminuer. Le temps de maintien, lui, est très long puisque l’impédance d’entrée de l’AO est très élevée.

12. L’allure du signal obtenu à la sortie de l’échantillonneur-bloqueur est fournie sur le graphique de la figure 4.

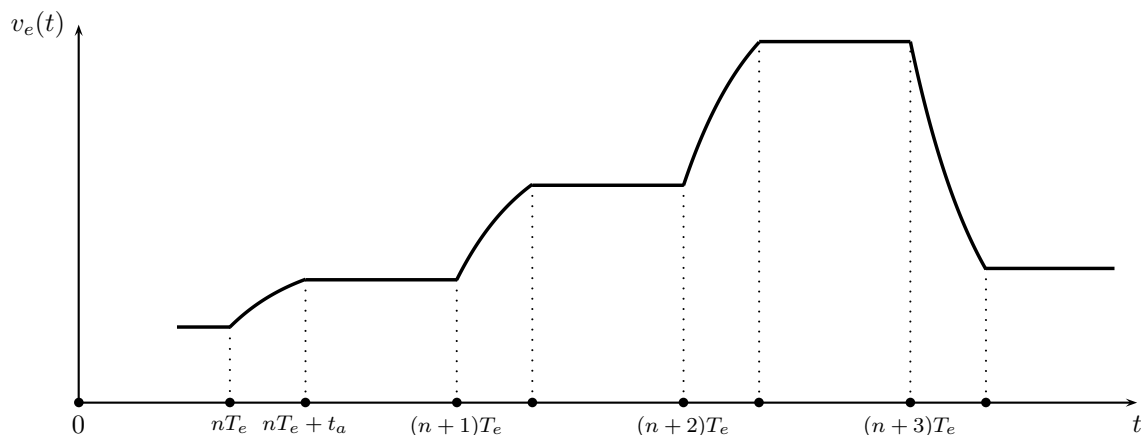


FIGURE 4 – Évolution du signal à la sortie de l'échantillonneur-bloqueur

C. Restitution du signal après traitement

13. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire. Cela permet de dire que le potentiel V_- de l'entrée inverseuse est nul. Pour le calcul de la résistance équivalente située à droite de A_1 , nous étudions les choses au niveau du nœud A_n . Finalement lorsque le courant arrive à ce nœud, il se sépare en deux voies contenant chacune une résistance $2R$. Comme la différence de potentiel est la même puisque $V_{A_n} - V_- = V_{A_n} - V_{masse}$, et cela quelle que soit la position de l'interrupteur, il y a toujours division de l'intensité du courant en deux parties égales. Les deux résistances $2R$ sont donc en parallèle. Elles sont équivalentes à une résistance R . Cette résistance R se retrouve en série avec la résistance R qui est située entre A_{n-1} et A_n . On obtient donc une résistance $2R$ qui est à nouveau en parallèle avec la résistance $2R$ située en A_{n-1} . Ce petit jeu peut continuer jusqu'en A_1 où la résistance équivalente est R .

14. Comme nous l'avons dit à la question précédente, le courant se divise toujours en deux. On a donc $i_0 = 2i_1$ et $i_1 = 2i_2 \dots$

15. La tension appliquée en A_0 à la résistance $2R$ est toujours V_{ref} et cela quelle que soit la position de l'interrupteur. On a donc $i_0 = \frac{V_{ref}}{2R}$. Le courant de sortie de l'AO est celui qui parvient à l'entrée non inverseuse puisque l'impédance d'entrée est considérée comme infinie. La loi des nœuds indique donc que cette intensité est la somme de toutes les intensités de i_0 à i_n chacune étant affectée du coefficient $e_i = 0$ ou 1 en fonction de la position de l'interrupteur. On a donc : $i_s = e_0i_0 + e_1i_1 + \dots + e_ni_n$. Or $i_1 = \frac{i_0}{2}$, $i_2 = \frac{i_0}{4} = \frac{i_0}{2^2}$ et $i_n = \frac{i_0}{2^n}$. On peut donc factoriser i_0 et obtenir : $i_s = i_0(\frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \frac{e_2}{2^2} + \dots + \frac{e_n}{2^n})$. On peut donc écrire la formule :

$$i_s = \frac{V_{ref}}{2R} \left(\frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \dots + \frac{e_n}{2^n} \right).$$

16. On peut dans la formule précédente factoriser par 2^n . On obtient alors l'écriture : $i_s = \frac{V_{ref}}{R2^{n+1}} (e_02^n + e_12^{n-1} + \dots + e_{n-1}2 + e_n)$. Cette formule permet de passer d'une écriture binaire $e_0e_1e_2 \dots e_{n-1}e_n$ à un nombre à base 10 : $N_{base\ 10} = e_02^n + e_12^{n-1} + \dots + e_{n-1}2 + e_n$.

17. La précision de l'écriture du nombre est donnée par le terme en $e_n = 0$ ou 1 . Il correspond à une subdivision du résultat en 2^{n+1} . Il faut donc que $2^{n+1} > 250$. La puissance de 2 supérieure à 250 est $256 = 2^8$. On en déduit donc que $n = 7$. On a un codage sur 8 bits.

18. Le circuit proposé est un convertisseur courant-tension. En effet, avec $V_+ = V_- = 0$, on obtient facilement la tension de sortie de l'AO $u_s = -Ri_s$.

19. On a un signal constant par morceaux. Si on intègre, on obtient une fonction continue affine par morceau mais cette fonction n'est pas dérivable puisqu'il y a un changement de pente à chaque période d'échantillonnage. Une seconde intégration est nécessaire pour obtenir un signal continu et dérivable. Il faut donc procéder à deux intégrations successives. En pratique, cela correspond à l'utilisation d'un filtre **passse-bas du second ordre**.

D. Quelques aspects pratiques

Bruit de quantification

20. On a $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{q} \int_0^q \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{q} \frac{q^2}{2} = \frac{q}{2}$. Le calcul de l'écart-type passe par $\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_0^q (\varepsilon - \frac{q}{2})^2 d\varepsilon$. On obtient tout d'abord $\sigma^2 = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{3} (\varepsilon - \frac{q}{2})^3 \right]_0^q$. Finalement, on arrive à $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$.

21. On utilise maintenant l'intervalle $[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}]$. La valeur moyenne est nulle $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon d\varepsilon = 0$. Pour l'écart-type, on trouve à nouveau $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$. Le bruit étant uniformément réparti, les écarts à la moyenne sont les

mêmes que l'on considère l'intervalle $[0; q]$ ou bien l'intervalle $[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}]$.

22. L'écart-type étant le même pour chacun des modes de quantification, on privilégie la quantification effectuée sur $[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}]$ puisque la moyenne est nulle.

Bruits d'origine physique

23. En électricité, par exemple, on définit l'intensité efficace associée à un courant $i(t)$ variable comme l'intensité d'un courant continu qui dissiperait la même puissance que $i(t)$ et ceci sur un même intervalle de temps donné Δt . La définition de l'intensité efficace est $I_{eff}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} i^2(t) dt$. L'énoncé propose comme définition $B_{eq} = \frac{1}{2\pi|H_m|^2} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega$. On ne peut manquer de voir une analogie avec la définition d'une grandeur efficace. On peut qualifier B_{eq} de bande passante efficace. La largeur de cette bande nous donnera une idée de l'écart-type du bruit qui traversera le filtre.

24. Pour le passe-bas proposé, on a $|H_m| = 1$. La bande-passante s'écrit donc $B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2\tau^2} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$. Or, nous savons que $\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $B_{eq} = \frac{1}{4\tau}$. On constate que cette bande passante est 4 fois plus petite que la bande passante classique définie en amplitude à $H_m/\sqrt{2}$ qui va de 0 à $\omega_c = \frac{1}{\tau}$.

25. Dans le cas du filtre passe-bande étudié avant nous avons vu que $|H_m| = |A|$. On en déduit que $\frac{|H(jx)|^2}{A^2} = \frac{4m^2x^2}{(1-x^2)^2+4m^2x^2}$. La bande passante équivalente est donc donnée par : $B_{eq} = \frac{4m^2\omega_c}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2+4m^2x^2}$ puisque la pulsation de résonance du filtre est $\omega_c = \frac{1}{RC}$ avec $x = \omega/\omega_c$. Avec la valeur de l'intégrale fournie par l'énoncé, on trouve $B_{eq} = \frac{m\omega_c}{2}$. Pour comparer ce résultat à celui de la bande passante classique à mi-hauteur en énergie ou à $1/\sqrt{2}$ en amplitude, on sait que $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{Q} = 2m\omega_c$. À nouveau, on constate que B_{eq} est 4 fois plus petite que la bande passante classique. Si m est très petit devant 1, c'est-à-dire que le filtre possède un très bon facteur de qualité, on peut filtrer efficacement le bruit mais tout cela se passe autour de ω_c , il ne faut pas avoir besoin de récupérer des fréquences dans une gamme étendue.

26. Comme on a pu le voir dans ce qui précède B_{eq} est une bande passante en s^{-1} . On a $i_{sc} = G\sqrt{2e i_d B_{eq}}$. Le produit eB_{eq} représente donc une charge divisée par un temps. Il s'agit donc bien d'une intensité. Comme G est sans dimension, i_{sc} est la racine carrée du carré d'une intensité. On a donc bien i_{sc} en A. Pour la tension V_J , on constate que $k_B T B_{eq}$ est en JOULE par seconde. Il s'agit d'une puissance dont une image est de la forme RI^2 où R est une résistance électrique. On a donc $V_J \equiv \sqrt{R_a R I^2}$. V_J est donc bien le produit d'une intensité par une résistance. On a donc bien : V_J en V.

27. En prenant $T = 300$ K, on peut faire les applications numériques. On trouve $i_J = 0, 23 i_{sc}$. On constate que $i_J < i_{sc}$ mais ces deux intensités sont du même ordre de grandeur.

28. Il est sans doute raisonnable de travailler dans le domaine du kilohertz : $B_{eq} = 10^3 s^{-1}$. On trouve alors que $i_J = 1, 3 \times 10^{-10}$ A, $i_{sc} = 5, 6 \times 10^{-10}$ A et $i_b = 1, 8 \times 10^{-8}$ A. L'intensité $i_K = 10^{-12}$ A, le rapport signal/bruit que nous noterons RSB est donc : $RSB = \frac{Gi_K}{\sqrt{i_b^2 + i_J^2 + i_{sc}^2}} = 50$. Il n'y a aucune difficulté pour extraire l'information dans de telles conditions.