

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°2 du 12-10-2023

— Durée : 4 heures —

Calculatrice interdite

Problème n° 1 – À propos des araignées

Mines MP 2022

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont répertoriées et 1 700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à 70 μm . À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques. . .

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure 1. Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

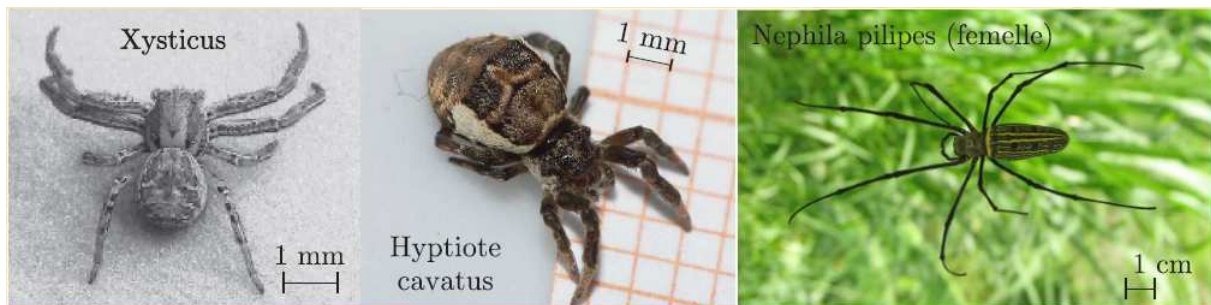


FIGURE 1 – *Xysticus* sp. est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

A. Propriétés mécaniques des fils d'araignée

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale ℓ_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de HOOKE :

$$\frac{\delta\ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}$$

où E est le module d'YOUNG du matériau constituant le fil.

1. Montrer que, dans ce régime, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur ℓ_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de ℓ_0 et situés sur une même horizontale. Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V , dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur ℓ . On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale. Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 2.

2. Établir, lorsque la masse m est suffisamment faible, la loi de puissance qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure 3 reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $\ell_0 = 5$ cm de rayon $a = 5$ μm et différentes masses m suspendues.

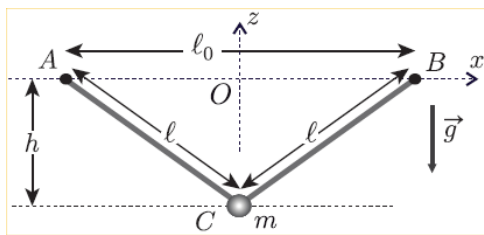


FIGURE 2 – Extension d’un fil.

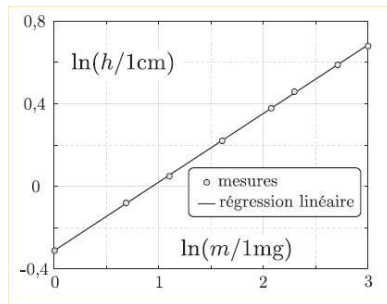


FIGURE 3 – Mesures de $h(m)$.

3. Vérifier que la loi obtenue à la question précédente est compatible avec l’expérience. Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module d’YOUNG du fil. On pourra utiliser la figure 7 du formulaire.

L’araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d’environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l’un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d’un arc. Elle garde alors cette position jusqu’à ce qu’une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s’emmêle autour de l’insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture. La vitesse de l’araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d’environ $v_{\max} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{\max} = 800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4. En modélisant la toile par un simple fil de soie dont on négligera la masse devant celle de l’araignée, estimer, en fonction de v_{\max} et a_{\max} , l’allongement maximum $\Delta\ell$ du fil avant que l’araignée ne relâche la tension (voir la figure 4), ainsi que sa raideur k en fonction de m , v_{\max} et a_{\max} . Évaluer, en fonction de m , v_{\max} et a_{\max} , la puissance mécanique instantanée maximale \mathcal{P}_{\max} développée pendant le processus de capture. Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d’environ $\mathcal{P} = 326 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ par kilo de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu’il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

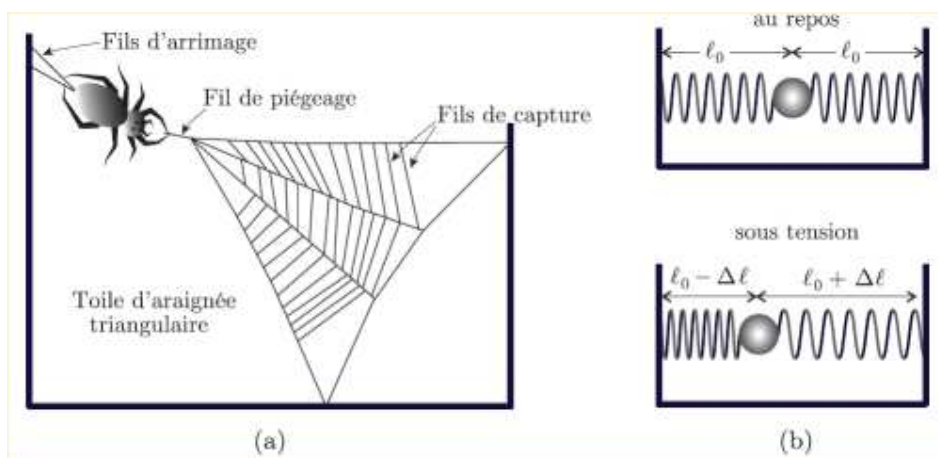


FIGURE 4 – (a) Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension.

Dans les films, le super-héros SPIDERMAN, dont on estime la masse à $m = 75 \text{ kg}$, poursuit les voitures en se

balançant sur des fils d'immeuble en immeuble. Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 25$ m sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(t = 0) = \pi/2$. Il se laisse alors entraîner sans vitesse initiale. Voir la figure 5.

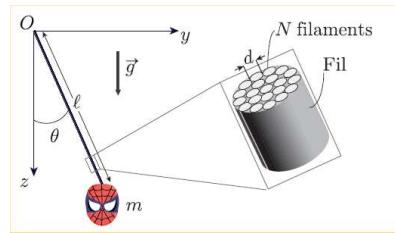


FIGURE 5 – Le vol de SPIDERMAN.

5. Écrire les équations du mouvement de SPIDERMAN. En déduire, en fonction de m et g , l'expression de la tension maximale que doit supporter ce fil si l'on suppose qu'il est inextensible.

On suppose que le fil que tisse SPIDERMAN est constitué en réalité de N filaments de soie identiques assemblés en parallèle.

6. Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à N ressorts identiques de constante de raideur k disposés en parallèle. Sachant que le module d'YOUNG d'un filament de soie et son rayon valent respectivement $E = 10$ MPa et $a = 5$ μm , combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que les filaments ne subissent pas une déformation supérieure à 1% et donc pouvoir supporter SPIDERMAN lors de son vol? Est-ce cohérent avec le diamètre des fils, de l'ordre du centimètre, produits par SPIDERMAN dans les films?

B. Produire de la musique avec des fils d'araignée

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module d'YOUNG, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée *Nephila pilipes*, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien sûr inférieure à sa tension de rupture T_r , mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ de masse linéique μ , autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note $z(x, t)$ le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz , voir la figure 6. Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée : $\vec{T}(x, t) = T_x(x, t)\vec{e}_x + T_z(x, t)\vec{e}_z$.

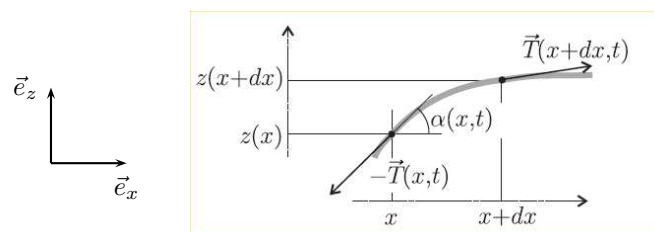


FIGURE 6 – Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

- La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle $\alpha(x, t)$ que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir la figure 6), ce qui entraîne : $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \ll 1$;
- On néglige les effets de la pesanteur.

7. On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Exprimer la longueur de portion de fil ds , $\cos[\alpha(x, t)]$ et $\sin[\alpha(x, t)]$ en fonction de dx et $\frac{\partial z}{\partial x}$. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x, t)$ ne dépend pas de x . Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

8. Montrer que le déplacement du fil $z(x, t)$ vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

On exprimera c en fonction de T et μ . Que représente cette grandeur physique ?

9. Montrer que des fonctions de la forme $z(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g .

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoïdal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme :

$$\underline{z}(x, t) = \underline{A} \exp j(\omega t - kx) + \underline{B} \exp j(\omega t + kx)$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, \underline{A} et \underline{B} des amplitudes complexes.

10. Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $\underline{z}(x, t)$. En déduire la relation entre \underline{A} et \underline{B} ainsi que les valeurs de ω permises. Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

11. Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est $\mu = 0,5 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-1}$, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ? Sachant que la tension T_e au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 N, que pouvez vous conclure ?

Dans le cadre d'un modèle plus élaboré on prend en compte la raideur du fil à travers son module d'YOUNG E . L'équation de propagation des ondes de déformation de faible amplitude dans un fil de rayon a devient alors :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{E\pi a^4}{4} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0$$

12. En supposant que la déformation $z(x, t)$ de la corde est de la même forme que précédemment, établir la relation de dispersion donnant k en fonction de ω et des paramètres du problème. Montrer que les fréquences propres de la corde s'écrivent alors sous la forme :

$$f_n = \frac{nc}{2\ell} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où B est une grandeur physique que l'on exprimera en fonction de E , T , ℓ et a . Sachant que pour la corde fabriquée à partir des fils d'araignée $E = 6,0 \text{ GPa}$ et $a = 350 \text{ } \mu\text{m}$ et que pour une corde classique $E = 2,5 \text{ GPa}$ et $a = 400 \text{ } \mu\text{m}$, que pouvez-vous conclure sur la nature du son produit à T et ℓ fixées ?

Formulaire

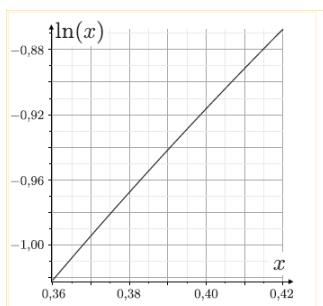


FIGURE 7 – Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0,36; 0,42]$.

Donnée numérique :

Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Problème n° 2 – Téléphone portable

Centrale MPI 2023

En 1973, Martin Cooper invente, avec son équipe, le premier téléphone cellulaire. Depuis, l'usage du téléphone portable n'a cessé de croître, ce qui en fait l'un des biens de consommation les plus répandus de la planète. Cependant, malgré cet essor, il reste des problèmes technologiques non encore résolus. En effet, les batteries utilisées (de technologie lithium-ion principalement) sont capables de délivrer une énergie par unité de masse élevée à température ambiante, mais sont sensibles aux températures extrêmes. Ainsi, le constructeur d'une célèbre marque de téléphone portable indique que la gamme d'utilisation de ses modèles varie de 0 °C à 35 °C.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions. Elles sont mises en évidence sur fond grisé.

Ce sujet utilise la syntaxe des annotations pour préciser le type des arguments et du résultat des fonctions Python. Ainsi,

```
def maFonction(n:int, x:float) -> (int, np.ndarray):
```

signifie que la fonction `maFonction` admet deux arguments, le premier est un entier, le second un nombre à virgule flottante et qu'elle renvoie un couple dont le premier élément est un entier et le deuxième un tableau numpy. Il n'est pas demandé aux candidats de recopier les entêtes avec annotations telles qu'elles sont fournies dans ce sujet, ils peuvent utiliser des entêtes classiques. Cet énoncé est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie.

Des données utiles et des fonctions sont disponibles à la fin de l'énoncé.

A. Étude du module photographique d'un smartphone

Étude du capteur de l'appareil photographique

On considère dans un premier temps les paramètres géométriques du capteur principal, afin de vérifier si le phénomène de diffraction dégrade ou non l'image formée sur le capteur. Tous les pixels considérés sont carrés.

1. À partir des données du téléphone portable fournies dans le document réponse, déterminer la longueur et la largeur du capteur de ce téléphone. En déduire la taille approximative d'un pixel du capteur.

Le nombre d'ouverture N de l'appareil photographique est défini par la formule ci-après, où D est le diamètre de l'ouverture et f' la distance focale de l'objectif :

$$N = \frac{f}{D}$$

2. Après avoir justifié la longueur d'onde lumineuse choisie, déterminer la taille caractéristique de la tache de diffraction visible sur le capteur si l'objectif est éclairé par un point unique situé à l'infini.

3. Proposer une justification au choix de l'entreprise de configurer par défaut la prise d'image en full HD (1920 × 1080 pixels) au lieu de la résolution 4K (3840 × 2160 pixels).

Étude des aberrations géométriques dues à la lentille de l'appareil photographique

La lentille de forme plano-convexe est constituée de silice fondue associée à du quartz. On peut la modéliser dans un premier temps comme une demi-boule de rayon de courbure R et d'indice de réfraction n , plongée dans l'air dont l'indice de réfraction est pris égal à 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon $r_m < R$ arrive sous incidence normale sur la face plane de cette lentille. On note C l'intersection de la face plane de la demi-boule avec l'axe optique Ox et S l'intersection de la face hémisphérique avec ce même axe. On s'intéresse au rayon lumineux incident qui arrive parallèle à l'axe optique et à une distance r de cet axe.

Condition de traversée de la lentille

4. Compléter sur la figure A du document réponse le trajet de ce rayon lumineux lors de son passage à travers la lentille. On notera i l'angle incident sur le dioptre verre-air et t l'angle réfracté correspondant. Déterminer l'expression de r_0 , valeur limite du rayon du faisceau si l'on souhaite que tous les rayons incidents émergent de la lentille. Calculer numériquement la valeur de r_0 . En réalité, le constructeur a choisi un diamètre de la lentille $\Phi = 5,0$ mm. Justifier ce choix.

Étude des rayons proches de l'axe optique

5. On note A' la position de l'intersection du rayon incident avec l'axe optique après son passage au travers de la lentille. Montrer que la distance algébrique $\overline{CA'}$ vérifie :

$$\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t - i)}$$

6. En déduire, en fonction de R et n , l'expression de la limite $\overline{CF'}$ de $\overline{CA'}$ lorsque la distance r tend vers 0. Calculer numériquement $\overline{CF'}$.

7. Dans quelle condition peut-on considérer que le point F' est stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe ? Comment peut-on nommer le point F' ?

Étude de l'aberration sphérique de la lentille

Le capteur de l'appareil photographique est placé dans le plan focal image de la lentille (figure 8). On s'intéresse à présent au rayon lumineux qui arrive parallèle à l'axe optique à la distance $r = r_0$ de l'axe (question 4.)

8. Déterminer numériquement la distance TSA (transversal spherical aberration) entre F' et le point où ce rayon extrême rencontre le capteur. Un schéma faisant apparaître la distance TSA est attendu. Comparer la distance TSA à la taille de la tache de diffraction obtenue en question 2. et à la dimension d'un pixel. Conclure sur l'adéquation de cette lentille au téléphone portable considéré.

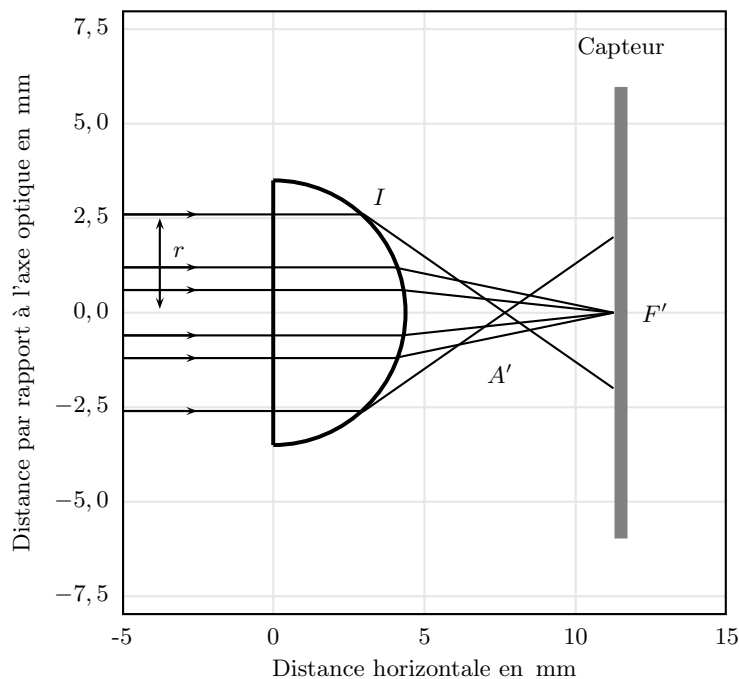


FIGURE 8 – Aberration sphérique

Détermination du profil d'une lentille asphérique

On souhaite modifier le profil de la surface courbe de la lentille afin que tous les rayons incidents parallèles à l'axe Ox convergent au même point F' comme indiqué en figure 8. La lentille obtenue est dite asphérique. Pour déterminer le profil de la lentille, il est commode d'adopter une approche ondulatoire en imaginant une onde plane incidente se propageant parallèlement à l'axe Ox venant frapper la face plane de la lentille.

9. Montrer que l'épaisseur $e(r)$ de la lentille à la distance r de l'axe doit vérifier :

$$ne(r) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{nR}{n-1} - e(r)\right)^2} = nR + \frac{R}{n-1}$$

10. Exprimer le rapport $e(r)/R$ lorsque $r \ll R$. Montrer qu'alors le profil de la lentille asphérique est pratiquement confondu avec celui de la lentille demi-boule. Quand on résout cette expression pour $e(r)$, grâce à une méthode numérique par exemple, on peut tracer le profil en figure 9.

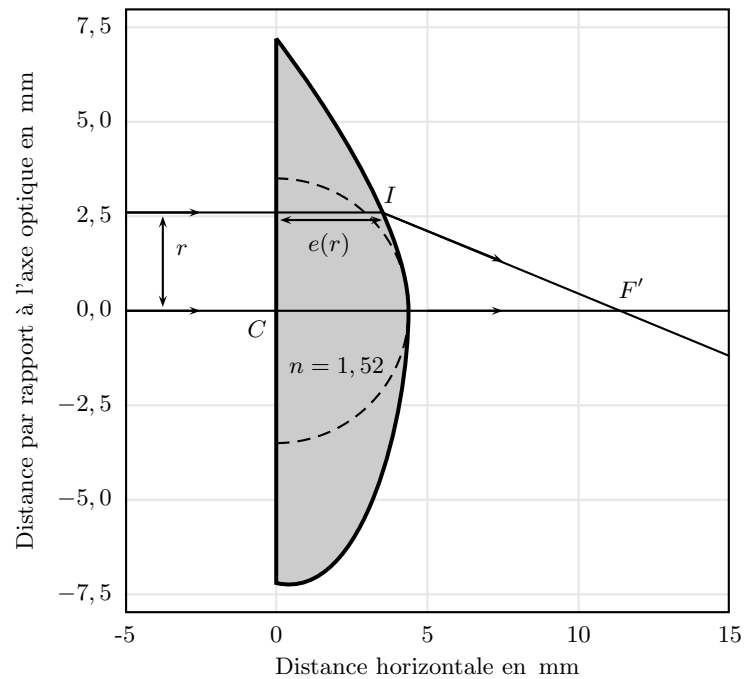


FIGURE 9 – Lentille asphérique

B. Étude des pixels de l'écran d'un smartphone

Estimation de la taille d'un pixel

Depuis l'apparition des premiers smartphones, la qualité des écrans a fait des progrès considérables. Un célèbre constructeur de téléphones affirme que la densité de pixels des écrans est si élevée qu'à l'œil nu et à une distance normale, il est impossible de discerner les pixels individuels. L'objectif de cette sous-partie est de vérifier si l'écran de l'objet d'étude vérifie ou non ce critère.

11. Montrer qu'il existe une taille de pixel maximale pour satisfaire à la description précédente. Calculer sa valeur numérique.

12. Estimer la dimension a d'un pixel de l'écran présenté dans la figure 10, ainsi que l'incertitude $u(a)$ de cette mesure. La photographie a été grossie 10 fois par rapport à l'image réelle.

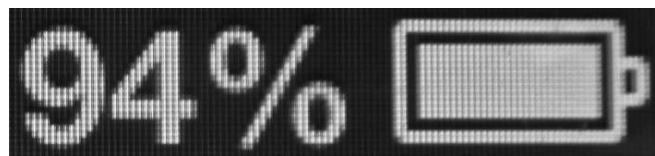


FIGURE 10 – Écran de téléphone (source wikimediacommons)

Dispositif expérimental de mesure d'un pixel

Dans cette sous-partie, on souhaite concevoir une expérience qui permet de mesurer expérimentalement la distance qui sépare les pixels de l'écran d'un téléphone portable. Pour cela, on dispose du matériel suivant au laboratoire :

- un banc optique et divers supports ;
- une lampe spectrale à sodium ;
- un laser ;
- deux lentilles convergentes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , de distances focales respectives $f'_1 = 10,5$ mm, $f'_2 = 45,5$ mm ;
- un écran percé d'un trou ;
- un téléphone portable.

L'idée est d'étudier les interférences observées par réflexion sur les pixels de l'écran. Ceux-ci sont modélisés dans la suite comme de petits miroirs.

Premier montage

On envisage tout d'abord le dispositif expérimental présenté en figure B du document réponse. Une lampe spectrale, considérée monochromatique de longueur d'onde λ , éclaire l'écran percé d'un très petit trou. Celui-ci peut être considéré comme une source ponctuelle (S) qui est initialement placée sur l'axe optique, au point O . Les rayons issus de (S) traversent la lentille \mathcal{L}_2 et arrivent en incidence normale sur deux pixels, considérés comme de petits miroirs positionnés parallèlement à l'axe Oy . Les rayons sont alors réfléchis et diffractés par les deux miroirs P_1 et P_2 , traversent à nouveau la lentille \mathcal{L}_2 et viennent interférer au point M : une figure d'interférence est visible sur l'écran. On note (y, z) les coordonnées du point M dans le plan Oyz formé par l'écran et on ne considère que les points voisins de l'axe : $|y| \ll f'_2$ et $|z| \ll f'_2$.

13. À quelle distance de la lentille \mathcal{L}_2 doit-on placer l'écran pour que les rayons issus de (S) ressortent parallèles à l'axe après la lentille \mathcal{L}_2 ? Sur la figure B du document réponse, compléter le trajet des deux rayons issus de (S) interférant au point M placé sur l'écran. Justifier que les rayons issus de P_1 et P_2 convergeant au point M sont parallèles entre eux avant d'atteindre la lentille \mathcal{L}_2 .

14. Montrer, en justifiant, que $\delta(M)$ la différence de marche des deux rayons au point M , est égale à la distance P_1H (figure B). Montrer que cette différence de marche s'écrit :

$$\delta(M) = \frac{ay}{f'_2}$$

15. En déduire l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M . Décrire la figure d'interférence observée. Définir et exprimer l'interfrange i de cette figure d'interférence.

16. Après avoir déterminé son expression, tracer sur votre copie l'intensité lumineuse $I(y)$ sur l'écran en fonction de y , la coordonnée du point M sur l'axe Oy . On notera I_0 l'intensité que l'on obtiendrait avec un seul miroir.

17. Le point source (S) est déplacé dans le plan de l'écran, ses coordonnées deviennent (y_S, z_S) . En s'appuyant sur un schéma, déterminer l'expression de la différence de marche au point M en fonction de y , y_S , a et f'_2 . Décrire le changement que le déplacement de la source (S) induit sur la figure d'interférence observée sur l'écran.

Pour obtenir une figure plus lumineuse, on souhaite remplacer le petit trou pratiqué dans l'écran par une fente de largeur c , parallèle à l'axe Oz . Cette fente est éclairée par la lampe spectrale. Dans un modèle simple, on peut considérer que chaque petit élément de surface de la fente se comporte comme une source ponctuelle, incohérente avec les autres éléments de la fente.

18. À l'aide d'un critère semi-quantitatif, basé par exemple sur l'ordre d'interférence au point M , déterminer l'expression de la largeur maximale c_{\max} au-delà de laquelle la figure d'interférence sera brouillée. Calculer numériquement c_{\max} dans le cas de la lampe à sodium en prenant $f'_2 = 45,5 \text{ cm}$, $a = 100 \mu\text{m}$ et une longueur d'onde $\lambda = 589 \text{ nm}$. Conclure.

Modélisation numérique de l'expérience du premier montage

Afin d'étudier plus précisément l'effet de l'élargissement de la fente source, on adopte un modèle numérique discret dans lequel la fente large est modélisée par un grand nombre de sources ponctuelles incohérentes entre elles, uniformément réparties entre les ordonnées $y = -c/2$ et $y = c/2$. Pour calculer l'intensité résultante, on suppose les variables correspondant aux constantes f'_2 , a , λ , c et i déclarées en Python. De plus, on dispose de la fonction `intensite(y,yS)` d'argument d'entrée y l'ordonnée d'un point M situé sur l'écran et yS l'ordonnée de la source (S). La fonction `intensite(y,yS)` renvoie un flottant correspondant au calcul de l'intensité lumineuse au point M due à une source ponctuelle unique de position yS .

19. Écrire en langage Python une fonction d'entête :

```
def Itot(y:float, c:float, K:int) -> float:
```

qui, à partir de la position y du point M , de la distance c et du nombre de sources ponctuelles K , permet de calculer l'intensité résultante au point M .

20. On s'intéresse à présent au contraste de chaque figure d'interférence. Écrire en langage Python une fonction d'entête

```
def contraste(I:np.ndarray) -> float:
```


qui, à partir d'un vecteur (ou d'une liste) I (correspondant aux valeurs d'intensité sur l'écran pour différentes positions du point M), renvoie un flottant correspondant au calcul du contraste de la figure d'interférence.

Grâce à la fonction I_{tot} , on étudie l'intensité résultante en fonction de l'ordonnée y du point M sur l'écran. Le résultat est donné à la figure 11 pour $K = 500$ sources. On choisit quatre extensions spatiales de la lampe : $5,5c_{\text{max}}$, c_{max} , $0,5c_{\text{max}}$ et $0,1c_{\text{max}}$. La figure 11a représente $I/(4I_0)$ en fonction de y/i avec I_0 l'intensité due à un seul miroir et i la valeur de l'interfrange telle que définie en question 15.. La figure 11b représente le contraste obtenu en fonction de la largeur relative c/c_{max} .

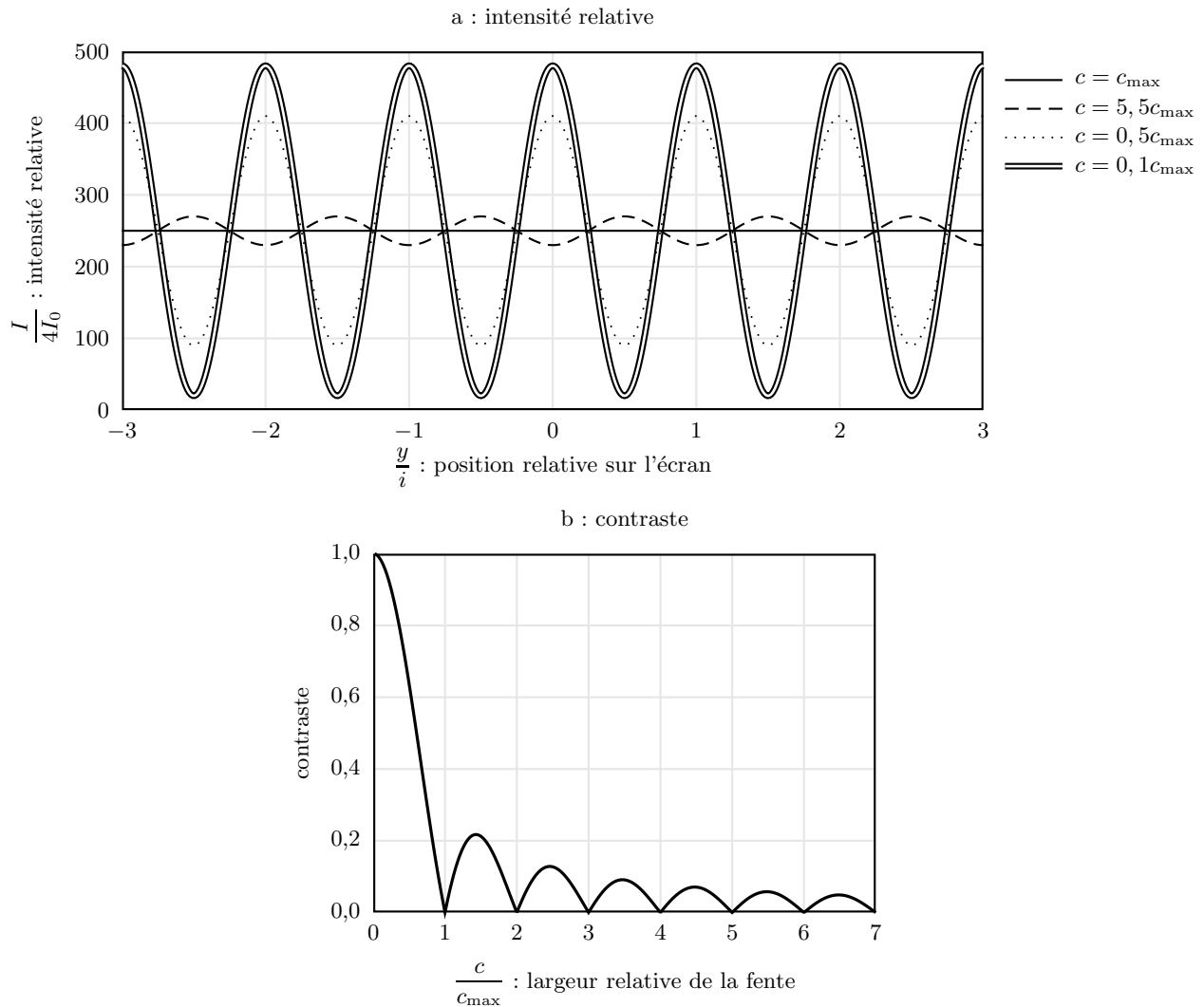


FIGURE 11 – a : intensité résultante en un point de l'écran M d'ordonnée y due à $K = 500$ sources ponctuelles uniformément réparties entre les ordonnées $-c/2$ et $c/2$ – b : contraste pour différentes extensions spatiales de la source

21. Commenter les figures 11a et 11b. Le calcul semi-quantitatif effectué en question 18. est-il confirmé par les résultats de la figure 11b ?

Montage avec laser

Afin d'éviter les problèmes inhérents à l'utilisation d'une lampe spectrale précédemment décrits, celle-ci est remplacée par un laser comme indiqué en figure 12. De plus, on insère une lentille \mathcal{L}_1 entre le laser et l'écran.

22. Soit d_{laser} le diamètre du faisceau laser avant sa traversée de la lentille \mathcal{L}_1 et D_{laser} le diamètre du faisceau laser après sa traversée de la lentille \mathcal{L}_2 . Exprimer le rapport de ces deux grandeurs en fonction des paramètres du système.

On envisage à présent l'utilisation de $N = 4$ miroirs (représentant 4 pixels) disposés selon un carré de côté a (figure 13). Ces miroirs sont notés P_1 à P_4 . Les interférences sont observées en un point M de l'écran, de coordonnées (y, z) .

23. En utilisant les résultats de la question **14.**, exprimer sans calculs les différences de marche au point M , $\delta_{i/1}(M)$ avec $i = 2, 3, 4$, entre l'onde passant par le miroir P_i et celle passant par le miroir P_1 , en fonction de y , z , a et f'_2 . Déterminer les coordonnées des points de l'écran pour lesquels les ondes issues des 4 miroirs sont en phase. Montrer que ces maxima d'éclairement forment un réseau carré de points de coordonnées :

$$\left(y_k = k\lambda \frac{f'_2}{a}, \quad z_m = m\lambda \frac{f'_2}{a} \right)$$

où k et m sont deux nombres entiers.

24. On modélise l'écran du téléphone par un réseau carré de N pixels assimilés à de petits miroirs répartis périodiquement avec une période a selon y et selon z . Montrer que l'éclairement obtenu est maximal aux points de coordonnées (y_k, z_m) déterminés à la question précédente et qu'il vaut $I_{\max} = N^2 I_0$, I_0 étant l'éclairement que l'on obtiendrait avec un miroir seul.

25. Exprimer, en fonction de N , le rapport entre l'éclairement maximal et l'éclairement moyen observé sur l'écran. Que peut-on en conclure sur l'allure de la figure d'interférence observée lorsque N est très grand ?

Détermination de la taille d'un pixel

Le réseau bidimensionnel de N miroirs considéré dans la section précédente modélise l'écran d'un téléphone comportant N pixels (éclairés). Le montage est représenté sur la figure 14 et est réalisé comme suit.

- On place sur un banc optique, dans l'ordre de la droite vers la gauche, un laser, une lentille \mathcal{L}_1 , un écran troué en son centre, une lentille \mathcal{L}_2 et le téléphone.
- On s'assure du centrage du système, la tache du laser est visible sur l'écran du smartphone.
- Sur la face gauche de l'écran, une figure géométrique caractéristique d'un phénomène de diffraction est visible, cette figure est exploitée ci-après.
- Les distances focales utilisées sont $f'_1 = 10,50$ cm et $f'_2 = 45,50$ cm. Leur incertitude-type vaut $u(f') = 0,30$ cm.

La figure 15 présente une image obtenue au cours de cette expérience, avec un laser vert ($\lambda_v = 532$ nm avec son incertitude-type $u(\lambda_v) = 1$ nm). Le trou au centre est celui par lequel passe le laser, il possède un diamètre de 4,0 mm.

26. Déterminer la distance entre deux pixels avec une estimation de son incertitude-type. Comparer ce résultat à celui de la question **12.** par le calcul d'un écart normalisé et conclure.

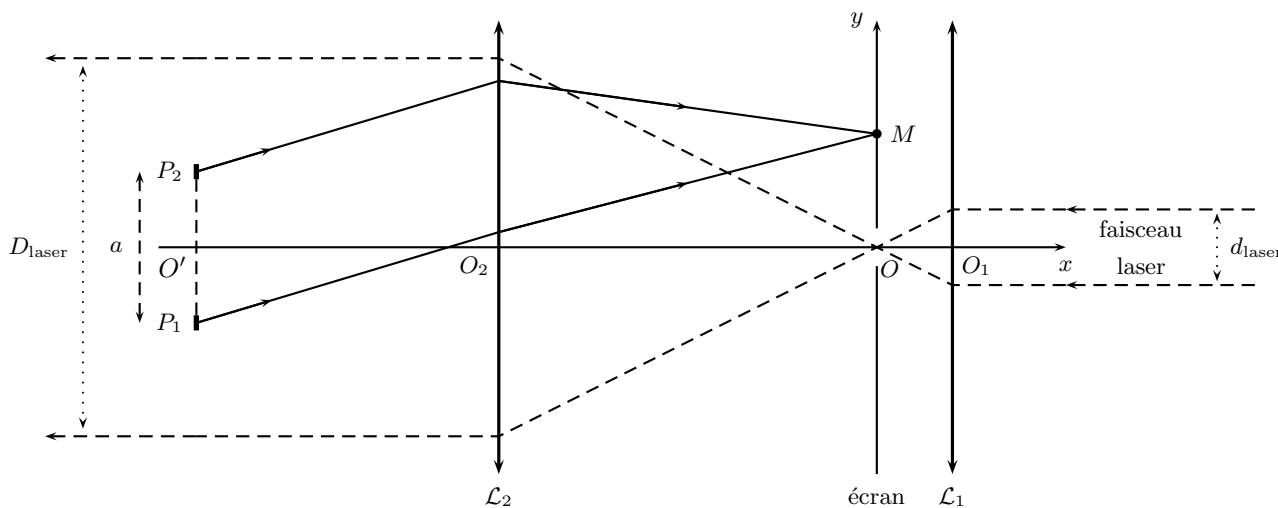


FIGURE 12 – Deuxième montage : laser et miroirs

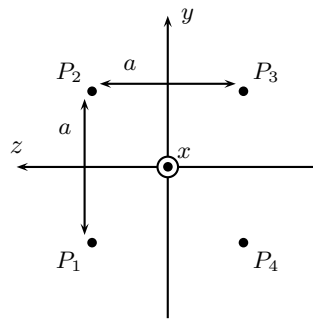


FIGURE 13 – Disposition des 4 miroirs



FIGURE 14 – Dernier montage : détermination de la taille d'un pixel

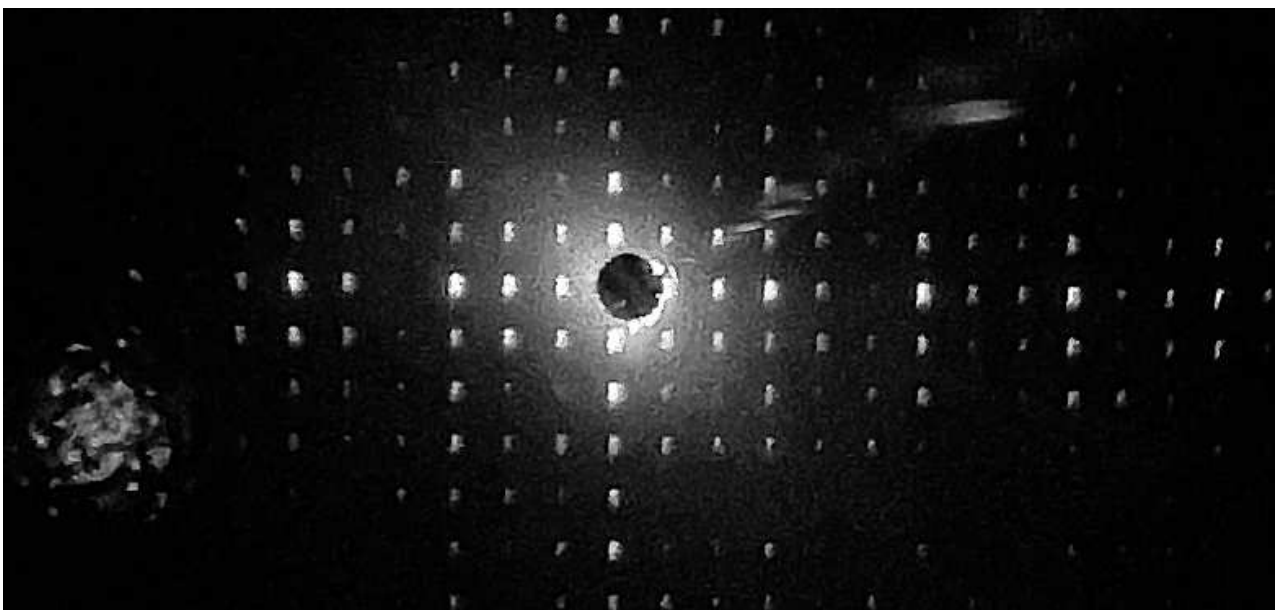


FIGURE 15 – Image visible sur l'écran

Données :

Appareil photographique d'un téléphone portable

Résolution du capteur	4 000 × 3 000 pixels
Nombre d'ouverture	$N = 2,2$
Diagonale du capteur	1/3 pouce
Indice de réfraction de l'air	$n_{\text{air}} = 1,00$
Indice de réfraction de la lentille	$n = 1,52$
Rayon de courbure de la lentille	$R = 4,0 \text{ mm}$
Diamètre réel la lentille	$\Phi = 5,0 \text{ mm}$
Distance focale effective de l'objectif	$f' = 9,0 \text{ mm}$
1 pouce	25,4 mm

Propriétés de l'œil humain

Distance normale d'observation d'un téléphone portable	30 cm
Pouvoir de résolution d'un l'œil normal	$\alpha = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$

Estimation d'une incertitude-type composée

Si la grandeur y calculée est un produit ou un quotient du type $y = x_1 x_2$ ou $y = x_1/x_2$, alors l'incertitude-type sur y notée $u(y)$ est reliée à l'incertitude-type sur chacun des facteurs par :

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2$$

Quelques instructions Python

- `np.zeros(n)`, `np.zeros((n, m))` crée respectivement un vecteur à n éléments ou une matrice à n lignes et m colonnes dont les coefficients sont tous nuls.
- `np.ones(n)`, `np.ones((n, m))` fonctionne comme `np.zeros` en initialisant chaque coefficient à la valeur un.
- `np.min(a)`, `np.max(a)` renvoie la valeur du plus petit (respectivement plus grand) élément du tableau `a`.
- `np.abs(a)` crée un tableau similaire au tableau `a` dont les coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de `a`.



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Numéro de place

Numéro d'inscription

Nom

Prénom

Signature

Épreuve : Physique-chimie 2 MPI

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille /

Question 4

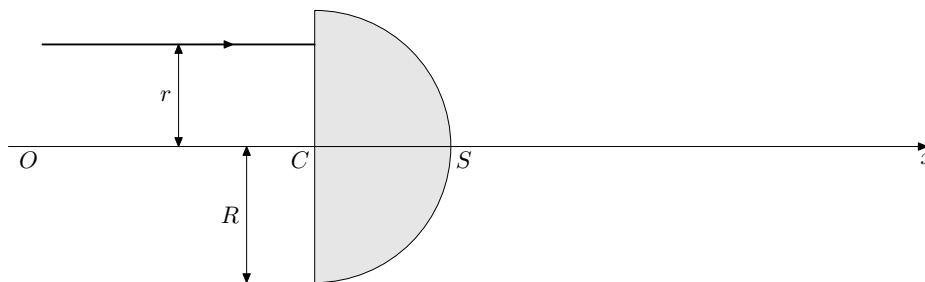


Figure A Modèle de la lentille demi-boule

Question 13

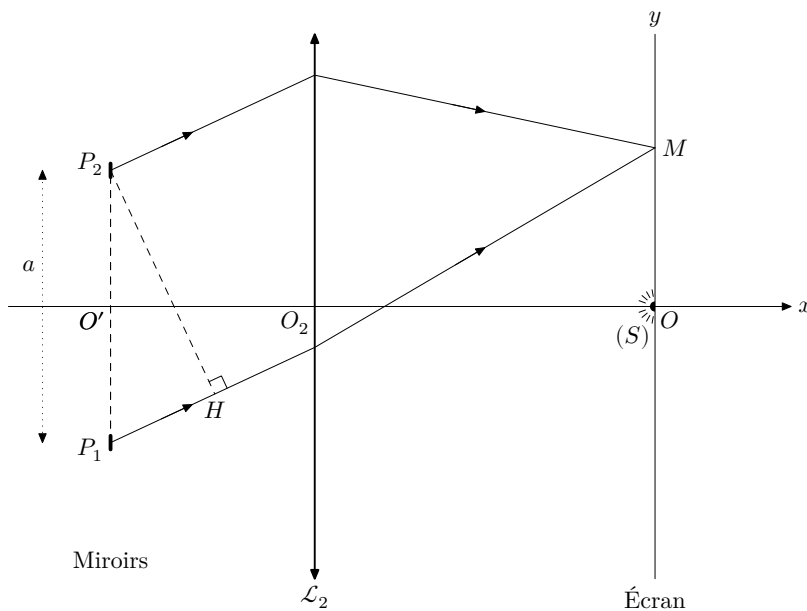


Figure B Premier montage : lampe spectrale et miroirs