

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°2 du 12-10-2023

— Durée : 4 heures. Solutions —

Problème n° 1 – À propos des araignées

Mines MP 2022

A. Propriétés mécaniques des fils d'araignée

1. $\frac{\delta\ell}{\ell_0}$ étant sans dimension, $\frac{1}{E}$ doit compenser la dimension de $\frac{F}{S_0}$ qui est le rapport d'une force sur une surface et qui est donc une pression. Le module d'YOUNG possède les dimensions d'une pression : $E \equiv \text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$.

On a donc $F = \frac{ES_0}{\ell_0} \delta\ell = k\delta\ell$. La raideur est $k = \frac{ES_0}{\ell_0}$.

2. La situation est symétrique par rapport au milieu. La masse m , placée en C , subit des tensions de norme identique de la part de chacun des deux fils accrochés en A et en B que nous notons T . On note θ l'angle des fils avec l'axe Ox . La projection de l'équilibre mécanique sur l'axe vertical donne $mg = 2T \sin \theta$. Si h est la hauteur recherchée alors $\sin \theta = \frac{h}{\ell}$. La tension T est donnée par la loi de HOOKE : $T = \frac{ES_0}{\ell_0/2} \delta\ell$ avec $\delta\ell = \ell - \ell_0/2$. On en déduit que $mg = \frac{4ES_0}{\ell_0} h \delta\ell = \frac{4ES_0}{\ell_0} h (1 - \frac{\ell_0}{2\delta\ell})$. On a, de plus, $\cos \theta = \frac{\ell_0}{2\ell}$ avec θ un petit angle. On peut donc effectuer un développement limité $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Comme $\theta \simeq \frac{2h}{\ell_0}$, on peut écrire $mg \simeq \frac{2ES_0}{\ell_0} h \theta^2 \simeq \frac{8ES_0}{\ell_0^3} h^3$. La masse est donc reliée à la hauteur h par la loi : $m \simeq \frac{8ES_0}{g\ell_0^3} h^3$.

3. La loi précédente peut encore s'écrire $m \frac{g}{8ES_0} = \left(\frac{h}{\ell_0}\right)^3$. On peut poser une masse référence $m_{ref} = \frac{8ES_0}{g}$ pour constituer la relation $\frac{m}{m_{ref}} = \left(\frac{h}{\ell_0}\right)^3$. On peut passer au logarithme pour écrire que $\ln \frac{h}{\ell_0} = \frac{1}{3} \ln \frac{m}{m_{ref}}$. Sur le graphique proposé, il faut montrer que la pente est de 1/3. C'est bien ce que l'on constate puisque pendant que l'abscisse progresse de 3, alors l'ordonnée passe de $-0,3$ à $+0,7$. La variation est donc bien de 1. La pente est donc celle attendue et cela valide la loi de puissance $\boxed{\text{en } h^3}$ montrée par les calculs. Pour déterminer le module d'YOUNG, il faut changer nos références par le graphique à utiliser $h_{ref} = 1 \text{ cm}$ et $m_{ref} = 1 \text{ mg}$. On réécrit la formule donnant la masse en multipliant et divisant par la masse référence et en faisant la même chose avec h_{ref}^3 . On obtient alors $\frac{m}{m_{ref}} m_{ref} = \frac{8ES_0}{g\ell_0^3} h_{ref}^3 \left(\frac{h}{h_{ref}}\right)^3$. En continuant la mise en forme du calcul, on arrive à $\left(\frac{h}{h_{ref}}\right)^3 = \frac{m_{ref} g \ell_0^3}{8ES_0 h_{ref}^3} \frac{m}{m_{ref}}$. On utilise l'expression de k et on passe au logarithme pour aboutir à $\ln \frac{h}{h_{ref}} = \frac{1}{3} \ln \frac{m}{m_{ref}} + \frac{1}{3} \ln \frac{m_{ref} g \ell_0^3}{8kh_{ref}^3}$. On peut ainsi identifier l'ordonnée à l'origine et arriver à $\ln \frac{m_{ref} g \ell_0^3}{8kh_{ref}^3} = -0,9$. On utilise alors le graphique fourni sur la fonction $\ln(x)$ pour écrire que $\frac{m_{ref} g \ell_0^3}{8kh_{ref}^3} = 0,41$. On obtient $k = \frac{10^{-5} \times 10 \times 2,5 \times 10^{-3}}{0,41 \times 8 \times 10^{-6}}$ ce qui, sans calculatrice, fait $k \simeq 0,8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Le module d'YOUNG est $E = \frac{k\ell_0}{\pi a^2}$. On trouve $\boxed{E \simeq 0,5 \text{ GPa}}$.

4. La force est $F = 2k\Delta\ell = ma_{\max}$. L'énergie potentielle avant le relâchement est $E_{pot} = 2 \times \frac{1}{2} k\Delta\ell^2$. La vitesse maximale est obtenue lorsque toute l'énergie potentielle a été transformée en énergie cinétique. On a donc $k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$. On a donc $2k\Delta\ell^2 = m v_{\max}^2$ et $2k\Delta\ell = m a_{\max}$. On arrive à $\boxed{\Delta\ell = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}}$. Cela permet d'obtenir la raideur $\boxed{k = \frac{m}{2} \frac{a_{\max}^2}{v_{\max}^2}}$. L'équation différentielle du mouvement est $m\ddot{x} = -kx$. La puissance est $P = -2kx\dot{x}$. Il faut rechercher le maximum de cette puissance : $\frac{dP}{dt} = -2k(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) = 0$. $x < 0$ sur cette phase puisqu'à la date $t = 0$, on a $x = -\Delta\ell$. La conservation de l'énergie permet d'écrire $k\Delta\ell^2 = kx^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ d'où $\dot{x}^2 = \frac{2k}{m} (\Delta\ell^2 - x^2)$. Comme $\ddot{x} = -\frac{2k}{m} x$, on a aussi $\ddot{x}x = -\frac{2k}{m} x^2$. Ces expressions permettent d'écrire $\frac{dP}{dt} = -2k(\Delta\ell^2 - x^2 - x^2) = -2k(\Delta\ell^2 - 2x^2)$. On aura donc $\frac{dP}{dt} = 0$ lorsque $x = -\frac{\Delta\ell}{\sqrt{2}}$ puisque $x < 0$ pendant cette phase. On a donc $\frac{k\Delta\ell^2}{2} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ d'où $\dot{x}^2 = \frac{k\Delta\ell}{m}$ et donc $\dot{x} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta\ell$. La puissance maximale est $\mathcal{P}_{\max} = 2 \frac{k\Delta\ell^2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} = k \sqrt{\frac{2k}{m}} \Delta\ell^2$. Comme nous avons $\sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{a_{\max}}{v_{\max}}$, on peut écrire $\mathcal{P}_{\max} = k \frac{a_{\max}}{v_{\max}} \Delta\ell^2$. Or, $k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$ d'où l'expression de la puissance maximale : $\boxed{\mathcal{P}_{\max} = \frac{1}{2} m a_{\max} v_{\max}}$. En effectuant l'application numérique, on trouve $\mathcal{P}_{\max} = 8 \times 10^{-3} \text{ W}$. On a donc la relation $\mathcal{P}_{\max} = \mathcal{P} m_{\text{muscle}}$. On trouve $m_{\text{muscle}} = 25 \text{ mg}$. Cette masse musculaire représente environ 3 à 4 fois la masse de l'araignée, c'est un peu trop ! Il doit certainement y avoir des forces électrostatiques en jeu.

5. La relation de la Dynamique appliqué au super-héros de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$. La force exercée par le fil est radial $\vec{T} = -T\vec{e}_r$, le poids se projette selon

$m\vec{g} = -mg \sin \theta \vec{e}_\theta + mg \cos \theta \vec{e}_r$. L'accélération est $\vec{a} = -\ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$. On obtient les deux équation $\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta$ et $T = mg \cos \theta + m\ell \dot{\theta}^2$. On multiplie par $\dot{\theta}$ la première équation pour obtenir l'intégrale première du mouvement qui représente la conservation de l'énergie et on obtient en intégrant $\frac{1}{2} \ell \dot{\theta}^2 - g \cos \theta = 0$ puisque SPIDERMAN part en $\theta = \pi/2$ sans vitesse initiale $\dot{\theta} \Big|_{\theta=\pi/2} = 0$. On a donc $\ell \dot{\theta}^2 = 2g \cos \theta$. Cela permet d'obtenir l'expression de la tension du fil $T = 3mg \cos \theta$. La tension est maximale en $\theta = 0$, on aurait pu s'en douter intuitivement parce que c'est le moment où la masse possède la plus grande vitesse et donc la plus grande accélération centripète. Finalement, on retient que $T_{\max} = 3mg$.

6. Puisque les fils sont mis en parallèle, les forces exercées vont s'additionner. Cela revient à additionner les raideurs. On a $k_{fil} = Nk$. On a $k = \frac{E\pi a^2}{\ell}$ avec $\ell = 25$ m. On peut donc écrire $3mg = \frac{NE\pi a^2}{\ell} \delta \ell$ en ayant $\frac{\delta \ell}{\ell} = 10^{-2}$. Avec les valeurs numériques, on trouve $N = \frac{3mg\ell}{E\pi a^2 \delta \ell} \simeq 2 \times 10^{10}$ fils. Le diamètre d du fil est tel que $N\pi a^2 \simeq \pi \frac{d^2}{4}$ si on oublie les espaces vides entre les fils. On a donc $d \simeq 2a\sqrt{N}$. On trouve l'ordre de grandeur suivant : $d \simeq 1$ m. Les fils représentés dans le film sont beaucoup trop fins pour être réalistes.

B. Produire de la musique avec des fils d'araignée

7. La longueur de portion de fil étudiée est $ds^2 = dx^2 + dz^2$. On peut factoriser dx en raisonnant à x croissant avec une longueur positive pour écrire que $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$. On étudie des faibles déformations, cela permet d'envisager le fait que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \ll 1$. On peut donc pratiquer un développement limité $ds \simeq dx(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2)$. Dans la suite de la démonstration, on s'attache à effectuer les calculs à l'ordre le plus bas possible. Dans l'expression précédente, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ est d'ordre 2, on se contentera donc de retenir $ds \simeq dx$. Si on reprend le schéma de la figure du morceau de corde, cela revient à considérer les angles $\alpha(x, t)$ comme suffisamment petits pour pouvoir écrire $\cos \alpha \simeq 1$ et $\sin \alpha \simeq \tan \alpha \simeq \alpha$. Comme on néglige le poids appliqué au morceau de fil d'araignée, il ne subit que les forces de tension à gauche et à droite exercées par le reste du fil. On néglige aussi les frottements avec l'air situé autour du fil. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a donc $\mu dx \vec{a} = (T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t)) \vec{e}_x + (T(x+dx, t) \sin \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \sin \alpha(x, t)) \vec{e}_z$. L'accélération est de la forme générale $\vec{a} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z$ mais comme le mouvement très dominant est le mouvement sur Oz pour ces ondes que l'on peut qualifier de transversales, on aura $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \simeq 0$. Avec les conditions $\cos \alpha \simeq 1$ et $\sin \alpha \simeq \alpha$, on arrive aux deux équations $T(x+dx, t) - T(x, t) = 0$ et $\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T(x+dx, t) \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \alpha(x, t)$. La première équation nous montre que la tension dans le fil d'araignée peut être considérée comme constante, on posera $T(x+dx, t) = T(x, t) = T$.

8. Cela permet de faire évoluer la seconde équation qui devient $\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial \alpha}{\partial x}$. Or, $\tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \simeq \alpha$. On trouve alors facilement l'équation de D'ALEMBERT : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$. Cela permet de déterminer l'expression de c qui est la célérité des ondes transversales mécaniques se propageant sur le fil d'araignée. On a $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

9. Les fonctions $f(x - ct)$ et $g(x + ct)$ correspondent à des ondes planes progressives se déplaçant dans le sens de l'axe x croissant, respectivement x décroissant. On note f' la dérivée première de la fonction f . On a $\frac{\partial f}{\partial x} = f' \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = f'$. De la même façon, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = f' \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = -c f'$. En passant à la dérivée seconde, on observe le même phénomène : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 f''$. L'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ conduit à $f'' = f''$. Elle est bien vérifiée. On peut conduire exactement le même calcul pour $g(x + ct)$, il y a juste un changement de signe sur $\frac{\partial g}{\partial t} = cg'$. Toutes les fonctions $f(x - ct) + g(x + ct)$ sont solutions de l'équation de D'ALEMBERT.

10. On a $z(x = 0, t) = (A + B) \exp j\omega t = 0 \forall t$. On en déduit que $B = -A$. En remplaçant dans l'expression de départ, on arrive à $z(x, t) = B(\exp jkx - \exp -jkx) = 2jB \sin kx \exp j\omega t$. On doit annuler le déplacement aussi en $z = \ell \forall t$, cela conduit à l'expression $2jB \sin k\ell \exp j\omega t = 0$. La solution $B = 0$ n'aurait pas d'intérêt parce que cela signifierait qu'il n'y a pas d'onde sur le fil d'araignée. Il faut plutôt retenir $\sin k\ell = 0$ qui conduit à $k\ell = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La forme des ondes obtenues est celle d'stationnaires puisque dans leur expression mathématique, il y a séparation des variables de temps et d'espace. Rappelons que nous avons, toujours, dans une situation de D'ALEMBERT la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Les pulsations caractéristiques de ces ondes stationnaires sont donc $\omega_n = kn c$. On arrive à $\omega_n = n \frac{\pi c}{\ell}$.

11. Les fréquences propres du fil d'araignée sont donc $f_n = n \frac{c}{2\ell} = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. On peut en déduire l'expression de la tension du fil : $T = \mu 4\ell^2 f_1^2$ où f_1 est la fréquence fondamentale, tout simplement la fréquence de la note jouée lorsque, seuls, deux nœuds sont présents sur le fil à chacune des extrémités. L'application numérique conduit à $T \simeq 0,02$ N. Le fil d'araignée est dans son domaine de linéarité.

12. On teste la solution ondes plane progressive dans la nouvelle équation de propagation pour obtenir la

relation de dispersion. On arrive à $-\mu\omega^2 + k^2T + \frac{E\pi a^4}{4}k^4 = 0$. On pose $K = k^2$ pour résoudre l'équation du second degré en K . L'équation est $\frac{E\pi a^4}{4}K^2 + TK - \mu\omega^2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = T^2 + E\pi a^4\mu\omega^2$ qui est positif ce qui permet d'avoir des solutions réelles. Seule la solution $K > 0$ est acceptable pour avoir un vecteur d'onde réel et une propagation. On retient donc $K = \frac{-T + \sqrt{T^2 + E\pi a^4\mu\omega^2}}{E\pi a^4} = k^2 = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$. En développant le calcul, on arrive à $\sqrt{T^2 + E\pi a^4\mu\omega_n^2} = T + \frac{n^2\pi^3 E a^4}{2\ell^2}$. On élève au carré et on simplifie le terme T^2 . Il vient $E\pi a^4\mu\omega_n^2 = \frac{n^2\pi^3 E a^4}{\ell^2}T + \frac{n^4\pi^6 E^2 a^8}{4\ell^4}$. On en déduit que $\omega_n^2 = 4\pi^2 f_n^2 = \frac{n^2\pi^2 c^2}{\ell^2}(1 + n^2 \frac{\pi^3 E a^4}{4\mu\ell^2 c^2})$. On peut conclure en reprenant $T = \mu c^2$ pour obtenir $f_n = \frac{nc}{2\ell} \sqrt{1 + n^2 \frac{\pi^3 E a^4}{4\ell^2 T}}$. Le coefficient demandé est : $B = \frac{\pi^3 E a^4}{4\ell^2 T}$. Si on fixe ℓ et T alors le son varie avec le produit Ea^4 . En effectuant l'application numérique, on trouve $Ea^4|_{\text{araignée}} = 9 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^2$ et $Ea^4|_{\text{classique}} = 6 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^2$. On constate que le produit Ea^4 est plus élevé pour l'araignée. Cela signifie que les fréquences seront un peu plus hautes pour le violon possédant des fils d'araignée par rapport à ceux à cordes classiques mais aussi que les effets anharmoniques seront un peu plus importants.

Problème n° 2 – Téléphone portable

Centrale MPI 2023

A. Étude du module photographique d'un smartphone

Étude du capteur de l'appareil photographique

1. On connaît la diagonale du capteur et comme les pixels sont des carrés, les longueurs des deux côtés sont $4 \times 10^3 a$ et $3 \times 10^3 a$. La diagonale au carré est donc $25 \times 10^6 a^2$, en passant à la racine on a donc $\ell = 5 \times 10^3 a = 1/3 \text{ pouce} = 25,4 \text{ mm}/3$. On trouve que $a \simeq 1,7 \mu\text{m}$.

2. On prend une longueur d'onde dans le visible entre 400 nm et 800 nm, par exemple $\lambda = 600 \text{ nm}$. L'angle de divergence d'un faisceau par diffraction est d'environ $\theta_{diff} \simeq 2 \frac{\lambda}{D}$ si D est la taille de l'ouverture qui provoque le phénomène de diffraction. Compte de l'ouverture de l'optique du téléphone, on a $D = \frac{f'}{N} = \frac{9,0}{2,2} \simeq 4 \text{ mm}$. On a donc un angle qui correspond à la distance suivante dans le plan focal image : $\ell' \simeq f' \theta_{diff} = 2\lambda N$. On trouve $\ell' \simeq 3 \mu\text{m}$. Cela représente deux pixels environ.

3. La configuration par défaut de la prise d'image en full HD (1920×1080 pixels) au lieu de la résolution 4K (3840×2160 pixels) est la conséquence de ce phénomène de diffraction, tous les pixels ne sont pas utiles finalement puisque l'image d'un point à l'infini est réparti sur deux pixels comme nous l'avons vu avant. Il faut aussi penser au fait qu'en 4K, on multiplie par 4 la taille de l'image en matière d'informations sur le plan informatique. Cela représente plus de place en mémoire et plus de temps (et d'énergie) dépensé en calculs pour faire ensuite du traitement de l'image.

Étude des aberrations géométriques dues à la lentille de l'appareil photographique

Condition de traversée de la lentille

4. Le schéma est réalisé à la figure 1. On applique la loi de la réfraction $n \sin i = \sin t$. À la limite de la réflexion totale, on aura $n \sin i_0 = 1$. Si $r = r_0$ à ce moment-là, alors on peut voir sur la figure que $\sin i_0 = \frac{r_0}{R}$. On en déduit donc que $r_0 = \frac{RH}{CI} = \frac{R}{n} \simeq 2,6 \text{ mm}$. Comme le diamètre de la lentille est $\Phi = 5,0 \text{ mm} \simeq 2r_0$, on se place à la limite de la réflexion totale pour éviter que des rayons fasse des réflexions multiples à l'intérieur de la lentille et que tous les rayons récoltés soient utiles en quelque sorte.

Étude des rayons proches de l'axe optique

5. Les points C , H et A' sont alignés, on peut écrire que $\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'}$. On voit que $\overline{CH} = R \cos i$. De plus, $\tan(t - i) = \frac{r}{HA'}$ avec $r = R \sin i$. On en déduit que $\overline{HA'} = \frac{r}{\tan(t-i)} = \frac{R \sin i}{\tan(t-i)}$. On obtient bien la formule proposée : $\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t-i)}$.

6. Lorsque la distance r tend vers 0, on a aussi un angle i qui tend vers 0. Il en sera de même pour t . On peut donc effectuer des développements limités des fonctions trigonométriques de la formule précédente. On a $\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2}$, $\sin i \simeq i$ et enfin $\tan(t - i) \simeq t - i$. La loi de SNELL-DESCARTES permet aussi d'écrire $ni \simeq t$. On constate aussitôt que l'ordre 2 en i^2 n'est pas nécessaire. On peut donc se contenter de $\overline{CA'} \simeq R + \frac{Ri}{t-i}$ avec $t = ni$, on trouve donc que $\overline{CA'} \simeq R + \frac{R}{n-1}$ avec $A' \rightarrow F'$ d'où $\overline{CF'} = \frac{nR}{n-1} \simeq 11,7 \text{ mm}$.

7. On peut considérer que le point F' est stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe pour des rayons paraxiaux, c'est-à-dire dans les conditions de GAUSS. Il est évident que F' est le foyer image de la lentille épaisse étudiée.

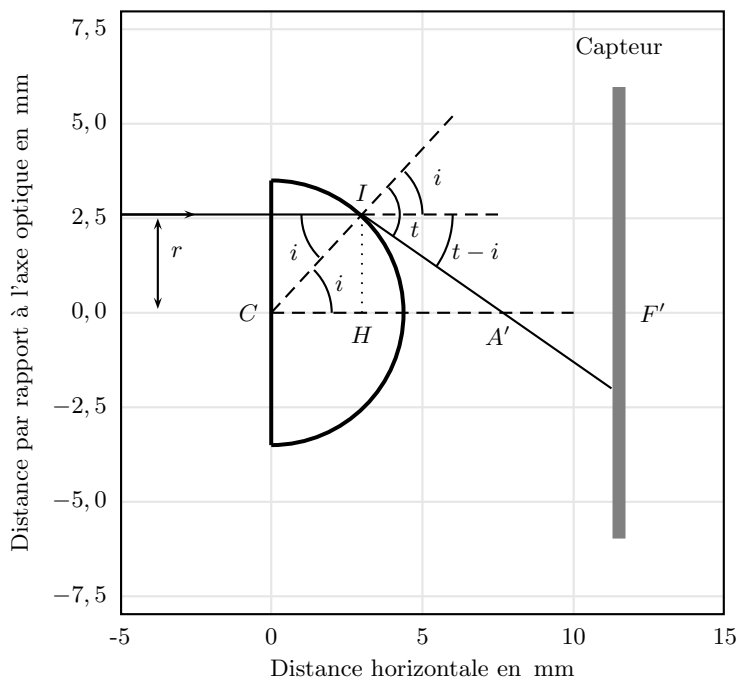


FIGURE 1 – Réfraction sur le dioptre sphérique

Étude de l’aberration sphérique de la lentille

8. On se place donc à la limite de la réflexion totale. On a donc toujours $n \sin i_0 = 1$ et $r_0 = R \sin i_0 = \frac{R}{n} = 2,6 \text{ mm}$. On peut déterminer $CH = R \cos i_0 = R \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$. On a aussi $\tan i_0 = \frac{HA'}{IH}$ d'où $HA' = r_0 \tan i_0$. On peut donc écrire que $HA' = R \frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0} = \frac{R}{n(\sqrt{n^2-1})} = 2,3 \text{ mm}$. La distance de C à A' est donc $CA' = R(\cos i_0 + \frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0}) = \frac{R}{\cos i_0} = \frac{nR}{\sqrt{n^2-1}}$. On trouve alors que $CA' = 5,3 \text{ mm}$. Comme on connaît la distance $CF' = 11,7 \text{ mm}$, on en déduit que $A'F' = 6,4 \text{ mm}$. Nous possédons donc les distances permettant d'appliquer le théorème de THALÈS autour du point A'. On a donc $\frac{TSA}{r_0} = \frac{A'F'}{HA'}$. Cela permet d'obtenir la distance recherchée

$TSA = r_0 \frac{A'F'}{HA'} \simeq 7,2 \text{ mm}$. Cette valeur est catastrophique puisqu'on aimerait bien du stigmatisme en F' et l'image s'étale sur tout le capteur! Une lentille sphérique n'est absolument pas adaptée à l'appareil photo. On le comprend bien ensuite lorsque l'on propose une lentille non sphérique.

Détermination du profil d'une lentille asphérique

9. Pour qu'il y ait stigmatisme, il faut que le chemin optique pour arriver en F' depuis l'infini soit le même pour un rayon sur l'axe optique et pour un rayon hors de l'axe situé à la distance r de l'axe. Pour le rayon sur l'axe optique, on parcourt la distance R dans le milieu d'indice n puis le reste de la distance SH dans l'air d'indice de réfraction 1. On a donc $L_{\infty F'} = nR + SF'$. Or, nous avons calculé dans une question précédente la distance $CF' = CS + SF' = \frac{nR}{n-1} = R + SF'$. On en déduit que $SF' = \frac{R}{n-1}$. Le chemin optique est donc $L_{\infty F'} = nR + \frac{R}{n-1}$. Pour le rayon hors de l'axe, on a $L_{\infty F'} = ne(r) + IF'$. On applique le théorème de PYTHAGORE dans le triangle rectangle IHF'. On a $CF' = \frac{nR}{n-1}$ et $IH = r$. La distance $HF' = CF' - e(r) = \frac{nR}{n-1} - e(r)$. Ainsi $IF' = \sqrt{(\frac{nR}{n-1} - e(r))^2 + r^2}$. L'égalité des deux expression du chemin optique conduit bien à

$$ne(r) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{nR}{n-1} - e(r)\right)^2} = nR + \frac{R}{n-1}.$$

10. On peut factoriser R dans l'expression trouvée à la question précédente. On arrive à alors $n \frac{e(r)}{R} + \left(\frac{r^2}{R^2} + \left(\frac{n}{n-1} - \frac{e(r)}{R}\right)^2\right)^{1/2} = n + \frac{1}{n-1}$. Comme le terme $e(r)/R$ est présent dans la racine, on ne prend pas un grand risque à dire, qu'à cet endroit là de l'expression, que l'on a $e(r) \simeq R$. On simplifie donc $n \frac{e(r)}{R} + \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right)^{1/2} = \frac{n(n-1)+1}{n-1}$. On effectue le développement limité de la racine pour écrire $n \frac{e(r)}{R} + \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} \left((n-1) \frac{r}{R}\right)^2\right) = \frac{n(n-1)+1}{n-1}$. On continue le calcul pour obtenir $n(n-1) \frac{e(r)}{R} + 1 + \frac{1}{2} \left((n-1) \frac{r}{R}\right)^2 = n(n-1) + 1$. On simplifie encore l'équation et arrive à $\frac{e(r)}{R} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} \frac{r^2}{R^2}$. Lorsque $r \rightarrow 0$, on constate bien que $e(r) \rightarrow R$ à l'ordre 2.

B. Étude des pixels de l'écran d'un smartphone

Estimation de la taille d'un pixel

11. La résolution angulaire de l'œil est $\alpha = 3 \times 10^{-4}$ rad. La distance d'observation proposée est $\ell_o = 30$ cm. On peut faire remarquer que cette valeur fournie correspondant quasiment au Punctum Proximum d'un œil normal qui est de 25 cm. On peut donc distinguer une distance $\boxed{\alpha \ell_o = 90 \mu\text{m}}$. Si le pixel est plus grand, on le verra à l'œil nu sinon on ne pourra pas distinguer la structuration de l'écran.

12. Pour estimer la dimension a d'un pixel de l'écran présenté sur la photographie, il faut tant bien que mal compter les pixels dans une certaine longueur de l'image mesurée sur le sujet. Il faut penser à diviser par 10 la longueur en raison du grandissement indiqué et aussi choisir une zone plus facile qu'une autre pour compter les pixels. Par conséquent, tant bien que mal, j'ai compté $N = 30$ pixels sur $\ell_b = 2,8$ cm de longueur de la partie centrale du symbole de la batterie du téléphone. On a donc $\boxed{a = \frac{1}{10} \frac{\ell_b}{N} \simeq 90 \mu\text{m}}$. On peut voir que l'on se situe à la limite du pouvoir de résolution de la vision humaine. Pour l'incertitude-type, on a donc $u(\gamma) = 0$ pour le grandissement ou bien alors l'énoncé nous dit quelque chose à ce sujet. Je considère raisonnablement que je me suis trompé de 2 pixels. On a donc $u(N) = 2$, pour la distance on va dire $u(\ell_b) = 1$ mm. Par la loi de propagation des incertitudes - rappelée dans l'énoncé - on écrit $\frac{u^2(a)}{a^2} = \frac{u^2(N)}{N^2} + \frac{u^2(\ell_b)}{\ell_b^2}$. Il faut calculer $\frac{1}{15}$ au carré et $\frac{1}{28}$ au carré, additionner et prendre la racine. On va dire, puisque $28 \simeq 2 \times 15$ que c'est à peu près pour la racine $\sqrt{\frac{5}{4} \frac{1}{15}} = \frac{u(a)}{a} \simeq \frac{1}{15}$. Finalement, cela revient à dire que c'est l'erreur sur le comptage des pixels qui domine. . . On a donc $\boxed{u(a) = \frac{a}{15} \simeq 6 \mu\text{m}}$.

Dispositif expérimental de mesure d'un pixel

Premier montage

13. Il faut placer l'écran dans le plan focal (image de son point de vue). On a donc $\boxed{O_2(S) = f'_2}$. (S) se trouve donc au foyer objet (de son point de vue) de la lentille \mathcal{L}_2 . Les rayons qui proviennent de (S) et qui sortent de la lentille sont parallèles à l'axe optique. Ils arrivent donc sur P_1 et P_2 sous incidence normale. Il n'y a pas de différence de marche avant les points P_1 et P_2 . Le point M est dans le plan focal image, tous les rayons qui y convergent sont donc parallèles entre eux. Leur direction commune est donnée par le tracé d'un rayon fictif (non dévié) qui passe par O_2 et M .

14. On utilise le théorème de MALUS associé au principe de retour inverse de la lumière pour dire qu'une onde partant de M se propage à travers la lentille, ressort et possède un plan d'onde (plan équiphase) marqué par la trace en pointillés P_2H sur le schéma du document-réponse. La différence de marche est réalisée dans l'air d'indice 1 par la distance P_1H . Si on appelle ε l'angle entre P_2P_1 et P_2H , on obtient $\delta = a \sin \varepsilon$. Cet angle ε correspond aussi à l'angle entre les directions $O_2(S)$ et O_2M . On a donc $\tan \varepsilon = \frac{y}{f'_2}$. La lentille \mathcal{L}_2 doit être utilisée dans les conditions de GAUSS sous peine de perdre l'hypothèse de plan d'onde déterminé avant. On travaille avec des petits angles qui permettent d'écrire que $\sin \varepsilon \simeq \tan \varepsilon \simeq \varepsilon = \frac{y}{f'_2}$. On obtient alors l'expression très classique de la différence de marche $\boxed{\delta(M) = \frac{ay}{f'_2}}$.

15. L'ordre d'interférence est $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ay}{\lambda f'_2}$. L'interfrange est la distance qui sépare le point de deux ordres séparés d'une unité. On a $p' = p + 1$. On trouve facilement que que cela fait évoluer la coordonnée de repérage du point M de y_p à y_{p+1} avec $i = y_{p+1} - y_p$. On a : $\boxed{i = \frac{\lambda f'_2}{a}}$. La figure d'interférences est constituée de franges rectilignes parallèles à Oy .

16. Les points P_1 et P_2 sont des sources secondaires synchrones et cohérentes, on traite donc la superposition de leurs amplitudes déphasées. On a $s = s_1 + s_2$ en supposant que les ondes émises par chacun ont même amplitude. On a donc $s = s_0 + s_0 \exp j\varphi$ avec $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$. On a donc $s = s_0(1 + \exp j\varphi)$ ce qui permet de déterminer l'intensité lumineuse comme $I = \alpha s s^* = 2\alpha s_0^2(1 + \cos \varphi)$. Si une source est seule, alors l'intensité provoquée est $I_0 = \alpha s_0^2$. On en déduit la formule de FRESNEL attendue : $\boxed{I(y) = 2I_0(1 + \cos \frac{2\pi ay}{\lambda f'_2})}$. On peut constater que l'éclairement moyen est $I_{moy} = 2I_0$, c'est l'éclairement obtenue dans le cas où les deux points émettant de la lumière seraient des sources incohérentes. L'allure de l'évolution de l'intensité est fournie à la figure 2. On privilégie l'interfrange i pour noter l'évolution de y , cela revient à considérer le rapport $y/i = p$ qui est l'ordre d'interférences.

17. Le schéma demandé est tout à fait équivalent à celui des rayons émergents et qui focalisent en M . Là, ce sont les rayons incidents qui vont être inclinés d'un angle supposé encore une fois petit et donc assimilable à $\frac{y_s}{f'_2}$ comme dans le cas de M . La différence de marche supplémentaire avant les sources secondaires est donc

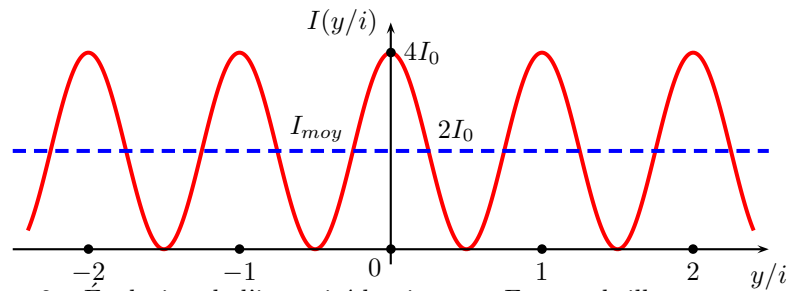


FIGURE 2 – Évolution de l'intensité lumineuse - Franges brillantes et sombres

$\frac{ay_S}{f_2}$. En étant attentif à l'algébrisation de cette différence de marche liée au sens croissant de définition de y_S , on obtient une nouvelle différence de marche totale $\delta' = \frac{a}{f_2}(y + y_S)$. Le changement de la figure d'interférence consiste en une **translation** de l'ensemble des franges. On s'en rend très bien compte en fixant son attention sur la frange brillante d'ordre $p = 0$ qui correspond au lieu de l'image de la source si on raisonne du point de vue de l'Optique géométrique. Dans le premier cas, cette FB se situe en $y = 0$. Dans le cas d'un point source décalé en y_S , on a $\delta' = 0$ pour $y = -y_S$. La figure se translate vers le bas de la valeur de la distance de la nouvelle source à l'origine.

18. En utilisant une fente à la place d'une source ponctuelle, on utilise des sources incohérentes qui constituent la fente. On va donc sommer les différentes formules de FRESNEL dues à chacune des sources. Si on se place en un point M , il reçoit des ondes qui vont faire des interférences avec une différence de marche qui évolue entre un point extrême de la fente et l'autre point extrême de coordonnées respectives $-c_{\max}/2$ à $c_{\max}/2$. L'ordre d'interférence varie donc de $\Delta p = \frac{c_{\max}a}{\lambda f_2}$. Le critère semi-qualitatif de brouillage correspond à un placement d'une frange brillante là où l'autre point extrême fait une frange sombre. Cela correspond à une variation d'ordre $\Delta p = \frac{1}{2}$. La condition est donc $c_{\max} = \frac{\lambda f_2'}{2a} \simeq 1,5 \text{ mm}$.

Modélisation numérique de l'expérience du premier montage

19. La fonction en Python est :

```
def Itot(y:float, c:float, K:int) -> float:
    yS = np.linspace(-c/2,c/2,K)
    Itot=0
    for i in range K
        Itot=Itot + intensite(y,yS[i])
    return Itot
```

20. La fonction Python demandée est :

```
def contraste(I:np.ndarray) -> float:
    Imax = np.max(I)
    Imin = np.min(I)
    C = (Imax-Imin)/(Imax+Imin)
    return C
```

21. On voit très clairement dans le cas où $c = c_{\max}$, il y a **annulation du contraste** puisque la courbe d'intensité est constante à l'éclairement moyen. On pourrait penser que pour $c > c_{\max}$, il en serait toujours ainsi mais comme en fait non ! On peut le voir par la courbe pour $c = 5,5c_{\max}$, il y a un contraste faible mais non nul. Cela se comprend en regardant l'évolution du contraste, il s'annule mais remonte après une annulation même la remontée est de plus en plus modeste au fur et à mesure que la largeur de la fente augmente. Sans surprise, on voit que plus on se rapproche de la fente infiniment fine, plus le contraste augmente conformément à la courbe de ce contraste. Enfin, le contraste est toujours positif par définition, par contre c'est $\pm C$ qui joue dans la fonction d'éclairement. C'est le signe + pour $c/c_{\max} < 1$, puis ensuite, c'est - entre 1 et 2 puis cela redevient + entre 2 et 3. Si on poursuit, on voit qu'entre 5 et 6, c'est le signe - qui va intervenir dans la fonction d'éclairement. Cela se voit puisqu'entre la situation $c = 5,5c_{\max}$ et les situations $c < c_{\max}$, il y a opposition des franges brillantes et des franges sombres. Cette situation cache en fait une fonction sinuscardinal qui intervient dans l'expression de l'éclairement alors que le contraste est la valeur absolue de cette fonction sinuscardinal. On peut deviner si on est un peu habitué à la fonction sinuscardinal que c'est sa valeur absolue qui est représentée sur le graphique donnant le contraste.

Montage avec laser

22. Le montage est afocal, il est alors simple de raisonner dans les triangles de sommet commun O pour obtenir : $D_{\text{laser}} = d_{\text{laser}} \frac{f'_2}{f'_1}$.

23. On peut considérer le point P_1 comme référence et alors la situation est équivalente à celle rencontrée avant. On a donc $\delta_{2/1} = \frac{ay}{f'_2}$, $\delta_{4/1} = \frac{az}{f'_2}$ et $\delta_{3/1} = \frac{a}{f'_2}(y+z)$. Les deux ondes sont en phase si $\delta_{2/1} = k\lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$, de la même façon, il faut avoir $\delta_{4/1} = m\lambda$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Ces deux conditions assurent automatiquement le fait que l'onde issue de P_3 soit en phase avec les trois autres ondes puisque l'on aura $\delta_{3/1} = (k+m)\lambda$. Cela conduit bien aux relations proposées : $\left(y_k = k\lambda \frac{f'_2}{a}, z_m = m\lambda \frac{f'_2}{a} \right)$.

24. On rencontre, ici, une situation de type réseau avec des ondes régulièrement déphasées. Tout d'abord puisque le capteur est un carré de N pixels, cela signifie que \sqrt{N} est aussi un entier. On note φ_y le déphasage d'une onde avec une onde équivalente décalée d'un pixel sur Oy . Ce déphasage correspond à $\delta_{2/1}$ par exemple. On note de la même façon le déphasage φ_z de deux ondes successives décalées sur Oz qui correspond, par exemple, à $\delta_{4/1}$. Lorsque les points sont décalés sur Oy et Oz comme pour P_3 , on a deux contributions à φ_y et φ_z . En fait l'amplitude totale diffractée est une double somme. On note s_0 l'amplitude envoyée par un pixel, l'ensemble des N ondes qui viennent interférer en M est donnée par $s_{\text{tot}} = s_0 \left(\sum_{p=0}^{\sqrt{N}-1} \sum_{p'=0}^{\sqrt{N}-1} \exp j(p\varphi_y + p'\varphi_z) \right)$. On peut encore écrire que $s_{\text{tot}} = s_0 \left(\sum_{p=0}^{\sqrt{N}-1} \exp j(p\varphi_y) \sum_{p'=0}^{\sqrt{N}-1} \exp j(p'\varphi_z) \right)$. En utilisant le résultat de la somme des termes d'une suite géométrique, on peut écrire que $s_{\text{tot}} = s_0 \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{N}\varphi_y}{2}}{\sin \frac{\varphi_y}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{N}\varphi_z}{2}}{\sin \frac{\varphi_z}{2}} \right)$. Comme les axes y et z sont complètement équivalents, on peut en déduire que les deux facteurs sont équivalents. On a donc $s_{\text{tot}} = s_0 \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{N}\varphi_y}{2}}{\sin \frac{\varphi_y}{2}} \right)^2$. Il y aura un maximum (un ordre au sens des réseaux) lorsque $\varphi_y = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par prolongement de continuité, on sait que $\frac{\sin \frac{\sqrt{N}\varphi_y}{2}}{\sin \frac{\varphi_y}{2}} = \sqrt{N}$ lorsque $\varphi_y = k2\pi$. L'amplitude maximale obtenue est donc $s_{\text{tot}} = N s_0$. On obtient bien une intensité $I_{\text{max}} = N^2 I_0$.

25. Comme nous l'avons vu avant sur la situation à deux ondes, l'éclairement moyen observé sur l'écran correspond à la situation où on considère que toutes les sources - à savoir les N pixels - sont incohérentes entre elles. Dans ce cas, on ne fait que sommer leur intensité. On peut donc écrire que $I_{\text{moy}} = N I_0$. On constate que $\frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{moy}}} = N$. Cela permet de comprendre que le contraste va fortement augmenter lorsque N va augmenter. C'est la conséquence et l'intérêt de la périodicité utilisée dans les réseaux.

Détermination de la taille d'un pixel

26. Le diamètre du trou est de 4 mm d'après l'énoncé. Si on effectue la mesure sur la photographie, on trouve 8 mm. On considère donc un grandissement de 2. Sur l'écran, on mesure pour une longueur de 4 mm ce qui fait en réalité $\ell_e = 2,0$ cm, $n = 6$ interfranges en supposant que la photo est à l'échelle 1 par rapport à l'écran puisque cela n'est pas évoqué par l'énoncé. Cela signifie que $\ell_e = 6 \frac{\lambda f'_2}{a}$. On a donc $a = \frac{6\lambda f'_2}{\ell_e}$. On trouve $a \simeq 72 \mu\text{m}$. Nous allons évaluer l'incertitude-type grâce à la formule de propagation que l'on applique sur les incertitudes relatives. Cela donne $\left(\frac{u(a)}{a} \right)^2 = \left(\frac{u(n)}{n} \right)^2 + \left(\frac{u(\lambda)}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{u(f'_2)}{f'_2} \right)^2 + \left(\frac{u(\ell_e)}{\ell_e} \right)^2$. On va considérer que $u(n) = 0$. Sinon, il y a un sérieux problème pour compter jusqu'à 6... On a $u(\lambda) = 1$ nm et $u(f'_2) = 0,30$ cm. Il faut évaluer l'incertitude sur ℓ_e . Je considère $u(\ell_e) = 0,1$ cm en ne considérant pas l'incertitude sur le grandissement. Avec ces valeurs, on voit que c'est l'incertitude sur ℓ_e qui domine clairement. On écrit donc $\frac{u(a)}{a} \simeq \frac{u(\ell_e)}{\ell_e} = \frac{1}{20}$. On peut en déduire que $u(a) = 4 \mu\text{m}$ en majorant un peu. On va calculer l'écart normalisé entre notre première valeur $a_1 = 90 \mu\text{m}$ avec $u(a_1) = 6 \mu\text{m}$ et la seconde qui assez différente $a_2 = 72 \mu\text{m}$ avec $u(a_2) = 4 \mu\text{m}$. On a donc $\mathcal{EN} = Z = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{u^2(a_1) + u^2(a_2)}} = 2,5$. On estime que si $\mathcal{EN} = Z \leq 2$ alors les deux mesures sont compatibles. Ici, ce n'est pas le cas. Les deux méthodes de mesure de la taille des pixels de l'écran du téléphone sont incompatibles.