

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°3 du 08-11-2011

— Durée : 4 heures —

Problème n° 1 – Mesure de la vitesse d'une onde de choc

X MP 2009

La détermination de la vitesse d'une onde de choc associée à celle de la vitesse de la matière mise en mouvement permet de remonter à l'état de pression d'un matériau soumis à une forte compression via les relations d'HUGONOT-RANKINE. On décrit dans ce problème le dispositif interférométrique qui permet d'effectuer la mesure. La figure 1 montre le schéma optique de la table optique portant ce dispositif nommé par son acronyme anglais VISAR (Velocity Interferometer System for Any Reflector). M_1 et M_2 sont deux miroirs supposés identiques. M_2 est monté sur un support piézoélectrique qui permet des réglages fins de translation. S_1 et S_2 sont deux lames séparatrices, également supposées identiques. L'analyse qualitative et théorique de ce dispositif peut se faire à partir des connaissances expérimentales relatives à l'interféromètre de MICHELSON.

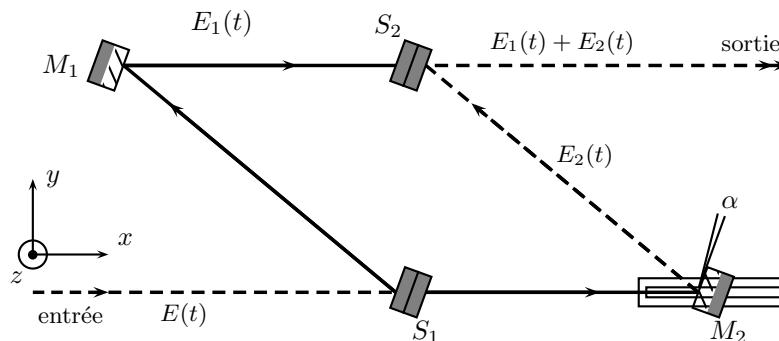


FIG. 1 – Schéma optique d'un VISAR

A. Principe de la détermination

1. Un faisceau lumineux parallèle et monochromatique entre dans l'interféromètre via la lame séparatrice S_1 . Décrire qualitativement le fonctionnement de cet interféromètre.

2. Les composants optiques sont initialement tous réglés avec des faces parallèles entre elles et les chemins optiques des deux bras de l'interféromètre sont égaux. Qu'observe-t-on en sortie de la séparatrice S_2 ?

3. On tourne le miroir M_2 d'un petit angle α autour de la verticale Oz . Faire un schéma des surfaces d'ondes en sortie de la séparatrice S_2 . Qu'observe-t-on en sortie de S_2 ?

4. Les champs électriques des ondes lumineuses en sortie et ayant parcouru les deux bras sont notés :

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2 = E_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_z$$

avec $\|\mathbf{k}_1\| = \|\mathbf{k}_2\| = \frac{2\pi}{\lambda}$. Exprimer les phases $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}$ et $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$ des champs \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 en coordonnées cartésiennes (x, y) .

5. Soit \mathbf{E} le champ électrique total en sortie de la séparatrice, plan origine dont on posera l'abscisse x nulle. Expliciter l'intensité lumineuse $I = \|\mathbf{E}^2\|$.

6. Faire un schéma de la répartition d'intensité lumineuse dans le plan (x, y) . Déterminer l'interfrange que l'on notera i .

On interpose maintenant sur le trajet optique, tout contre le miroir M_2 , un étalon, c'est-à-dire une pièce transparente (verre, quartz ou autre) d'épaisseur e calibrée et d'indice optique n supposé connu ($n > 1$). Afin d'assurer la même position du faisceau en sortie de S_2 , le miroir M_2 est légèrement reculé. Soient δ la différence de chemin optique correspondant à l'introduction de l'étalon et à la translation du miroir M_2 , et τ le retard temporel correspondant.

7. Exprimer la phase du champ \mathbf{E}_2 parcourant le bras inférieur de l'interféromètre. En déduire comme à la question 5 l'expression analytique de l'intensité lumineuse dans le plan (x, y) .

8. Quel est l'effet de l'étalon sur la figure d'interférences ?

La lumière entrant dans l'interféromètre provient de la réflexion sur une surface réfléchissante mobile (dénommée cible) d'un faisceau laser de longueur d'onde dans le vide λ_0 . La vitesse de cette surface mobile est notée $V(t)$ et cette surface se rapproche de la source lumineuse laser. Du fait de ce mouvement, on admettra que la pulsation de la lumière après réflexion sur l'interface est donnée, au premier ordre en V/c , par l'expression : $\omega_d = \omega_0[1 + 2V(t)/c]$. Un détecteur est placé en sortie de l'interféromètre au niveau de la séparatrice S_2 .

9. On suppose que la surface réfléchissante est mise brutalement en mouvement à l'instant $t = 0$ sous l'effet d'un phénomène comme celui d'une onde de choc. Sa vitesse s'écrit donc $V(t) = 0$ pour $t < 0$ et $V(t) = V_0$ pour $t > 0$. Après un laps de temps dû à la propagation, la lumière de fréquence modifiée arrive sur le détecteur. Montrer que, dans ce cas, l'intensité lumineuse sur la séparatrice, en négligeant la modification de l'interfrange au voisinage du centre $y = 0$, est donnée par l'expression :

$$I_{S_2}(y, V_0) = 2E_0^2 \left[1 + \cos \left(\omega_0 \tau + \phi(V_0) + 2\pi \frac{y}{i} \right) \right]$$

Montrer que $\phi(V_0) = 4\pi\tau V_0/\lambda_0$.

10. Tracer l'allure de l'évolution au cours du temps de l'interférogramme dans le plan de sortie de la séparatrice S_2 . En déduire le principe de la mesure de la vitesse. On notera le décalage de franges : $F = \phi(V_0)/2\pi$.

B. Exploitation d'un interférogramme expérimental

L'image de la figure 2 est un interférogramme typique enregistré au cours d'une expérience sur le laser LULI 2000 de l'École Polytechnique. On se propose d'en déduire la vitesse de la cible accélérée par ce laser de puissance. La zone représentée est de $300 \mu\text{m}$, l'axe vertical représente le temps.

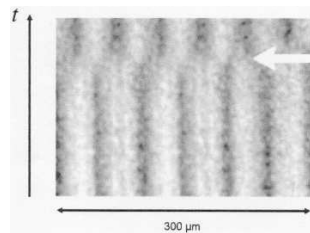


FIG. 2 – Interférogramme VISAR

11. Déterminer la valeur de l'interfrange.

12. La mise en vitesse intervient à l'instant marqué par la flèche (voir la figure 2). On suppose $F < 1$. Estimer le saut de franges correspondant.

13. La formule $F = \phi(V_0)/2\pi$ se réécrit $V_0 = S_V F$. Exprimer le coefficient S_V , appelé sensibilité du VISAR en fonction de λ_0 et τ .

14. On donne pour un étalon en silice les caractéristiques suivantes : $e = 3,07 \text{ mm}$ et $n = 1,4607$. La différence de chemin optique est donnée par $\delta = 2e \frac{n^2 - 1}{n}$. Calculer τ puis S_V pour $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$. En déduire une estimation de la vitesse de l'interface.

15. Limitation : montrer que la vitesse n'est déterminée que modulo une certaine quantité que l'on précisera. Justifier de l'emploi éventuel de deux dispositifs VISAR fonctionnant à des longueurs d'onde différentes et avec des sensibilités très différentes.

Problème n° 2 – Interférences

Centrale TSI 2007

A. Anneaux de Michelson

L'interféromètre de MICHELSON est éclairé par une source étendue réalisée à l'aide d'un diaphragme ayant la forme d'un disque de rayon R et d'axe Ox . Ce diaphragme intercepte une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$. Il est placé dans le plan focal objet d'une lentille mince convergente L_1 de focale $f_1 = 10 \text{ cm}$ et d'axe Ox . On observe la figure d'interférence sur un écran situé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente L_2 de focale $f_2 = 50 \text{ cm}$ et d'axe Oy . L'ensemble est placé dans l'air dont l'indice est pris égale à 1. Voir la figure 3.

1. On observe des anneaux sur l'écran. En déduire l'orientation relative des miroirs M_1 et M_2 .

2. La zone éclairée de l'écran est un disque de rayon $R' = 5 \text{ cm}$. Que vaut R ?

3. On chariote le miroir M_1 jusqu'à l'obtention d'un éclairage uniforme sur l'écran. Comment s'appelle cette situation ?

4. À partir de la position précédente, on chariote maintenant M_1 d'une distance e dans le sens des x croissants. On observe à nouveau des anneaux. Établir l'expression de la différence de marche δ entre les deux ondes qui interfèrent en un point M de l'écran repéré par l'angle que fait O_2M avec l'axe Oy .

5. On relève le rayon du premier anneau sombre à partir du centre de la figure : $r_1 = 1,5 \text{ cm}$ et celui du neuvième anneau sombre : $r_9 = 4,8 \text{ cm}$. Calculer numériquement e .

6. Quel est le rayon du second anneau sombre r_2 ?

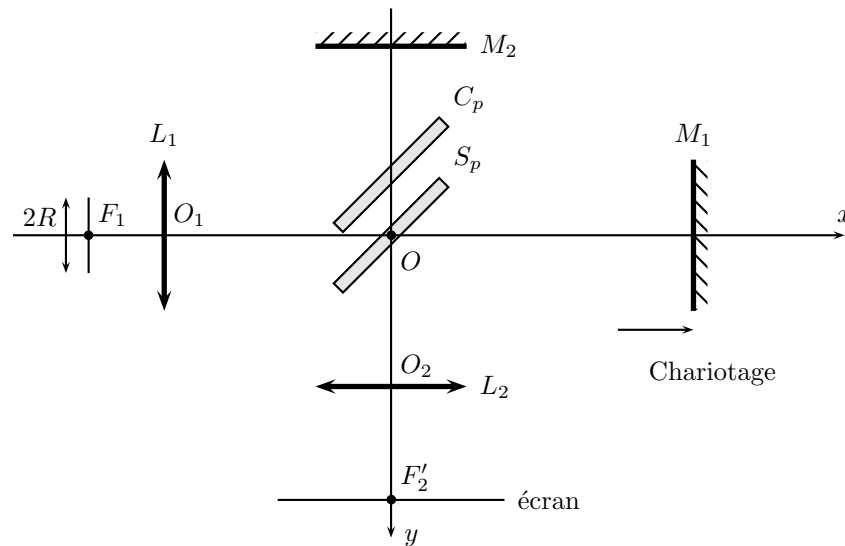


FIG. 3 – Interféromètre de MICHELSON

7. On constate que l'intervalle entre les anneaux successifs se resserre quand on passe du centre ou bord de la figure d'interférences. Expliquer ce phénomène.

8. On translate progressivement le miroir M_1 en accroissant x . Prévoir en l'expliquant le sens de défilement des anneaux. Expliquer comment évolue le nombre d'anneaux observables sur l'écran ?

B. Utilisation de lumière polarisée

On éclaire le dispositif de la figure 4 avec une source monochromatique de longueur d'onde λ placée juste avant la fente \mathcal{F} qui sert de fente source. Tout le dispositif est situé dans l'air, dont l'indice est 1. Dans cette partie, on ne travaille plus dans le cadre de l'approximation scalaire où l'onde était représentée par la forme générale $s = s_0 \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, l'onde lumineuse est donc considérée sous sa forme vectorielle. On utilise le modèle de l'onde plane de la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. On admettra que l'intensité lumineuse associée à l'onde vectorielle est proportionnelle à $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ où \mathbf{E}^* le champ vectoriel complexe conjugué de \mathbf{E} . Toutes les fentes \mathcal{F} , \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 sont parallèles à l'axe Oy et sont de très faible largeur. Elles pourront être considérées comme infiniment minces. Les trois fentes sont de même largeur et régulièrement espacées de a . La lumière de la source lumineuse est non polarisée (lumière naturelle).

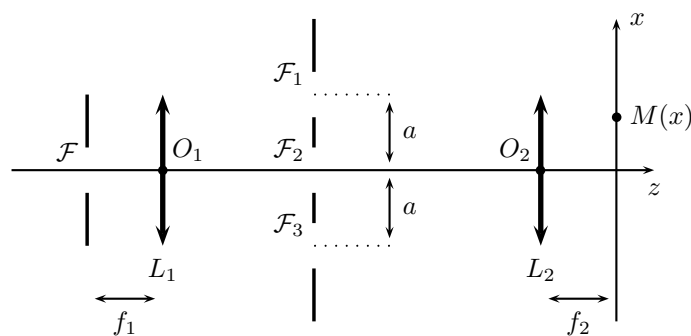


FIG. 4 – Système à trois fentes

9. Exprimer l'intensité lumineuse au niveau du point M de l'écran : $I(x)$ pour $|x| \ll f_2$. Décrire ce que l'on voit sur l'écran en commentant le graphe de $I(x)$.

10. Dans une seconde expérience, on place avant les fentes \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 des polariseurs rectilignes dont les directions de polarisation sont toutes perpendiculaires à Oz et sont notées respectivement P_1 , P_2 et P_3 . On fait le choix $P_1 \parallel P_2$ et $P_1 \perp P_3$. Qu'observe-t-on sur l'écran ? On commentera là encore le graphe de $I(x)$.

11. On effectue un nouveau choix dans les directions de polarisation : $P_1 \parallel P_3$ et $P_1 \perp P_2$. Même question que précédemment.

Problème n° 3 – Diffraction des rayons X par un cristal d'argent

Centrale MP 2011

On donne la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

A. Relation de Bragg

On considère des cristaux métalliques décrits par des mailles cubiques de sommet O , de paramètre de maille a , et dont les arêtes sont parallèles aux vecteurs de la base orthonormée $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. On souhaite comparer les figures de diffraction des rayons X produites par les structures cubiques simples (CS), cubique centrée (CC) et cubique à faces centrées (CFC) dont les mailles sont représentées sur la figure 5.

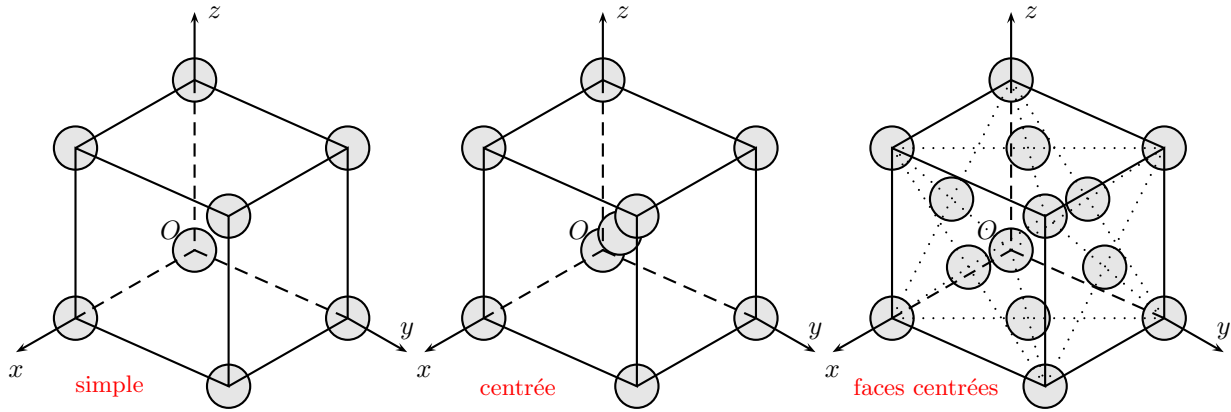


FIG. 5 – Structures cubiques simple, centrée et faces centrées

1. Pour les trois structures (CS), (CC) et (CFC), donner le nombre d'atomes dans une maille.

2. On appelle nœud la position du centre d'un atome. Un plan réticulaire est un plan du cristal comportant au moins trois nœuds non alignés. D'après les propriétés du cristal, un plan réticulaire contient une infinité de nœuds. On montre qu'un plan réticulaire quelconque traversant la maille cubique de sommet O est caractérisé par trois entiers $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$ appelés indices de MILLER, de sorte que le plan réticulaire coupe les axes Ox , Oy et Oz en trois points de coordonnées $A(a/h, 0, 0)$, $B(0, a/k, 0)$ et $C(0, 0, a/l)$. Dans le cas où l'un des indices de MILLER est nul, le point d'intersection correspondant est rejeté à l'infini. La distance séparant le point O du plan réticulaire (h, k, l) vaut $d_{(h,k,l)} = a/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$. Pour les trois structures, (CS), (CC) et (CFC), représenter la disposition des nœuds dans les plan réticulaires $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$.

3. On fait parvenir sur le cristal une onde électromagnétique plane monochromatique de longueur d'onde λ . En quelques lignes et sans calcul, expliquer pourquoi les atomes du cristal émettent une onde électromagnétique de même fréquence que l'onde incidente.

4. Soient deux atomes occupant les positions O_1 et O_2 , voir la figure 6. On note \mathbf{u} et \mathbf{u}' les vecteurs unitaires dirigeant respectivement l'onde incidente et l'onde émise à l'infini par les atomes. Exprimer la différence de marche $\delta_{1/2}$ entre les rayons parallèles passant par O_1 et O_2 en fonction des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{u}' , $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$.

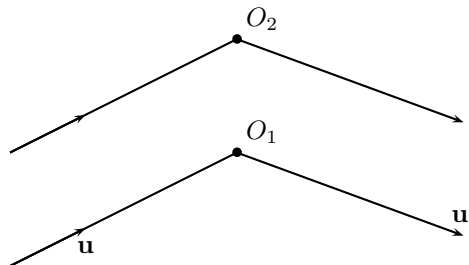


FIG. 6 – Diffraction par deux atomes voisins

5. On considère les atomes d'un même plan réticulaire et on note θ et θ' les angles respectifs entre les vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{u}' et ce plan, voir la figure 7. Expliquer pourquoi le rayonnement résultant de l'émission par les atomes de ce plan est particulièrement intense dans la direction $\theta' = -\theta$.

6. On considère à présent la famille de plans réticulaires parallèles au plan (h, k, l) régulièrement écartés de la distance $d_{(h,k,l)}$. Montrer que le rayonnement diffracté par ces plans est intense pour un angle d'incidence θ vérifiant la relation de BRAGG $\sin \theta = \frac{m\lambda}{2d_{(h,k,l)}}$. Par la suite, on se restreindra à l'ordre $m = 1$ et on posera :

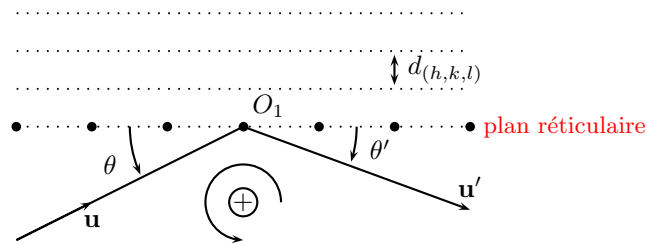


FIG. 7 – Diffraction au niveau d'un plan réticulaire

$$\sin \theta_{(h,k,l)} = \frac{\lambda}{2d_{(h,k,l)}} = \frac{\lambda \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}{2a}$$

7. Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser la lumière visible pour étudier la structure d'un cristal d'après son rayon diffracté.

8. La présence de la famille de plans réticulaires (h, k, l) est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que le cristal présente un maximum d'émission pour l'angle d'incidence $\theta_{(h,k,l)}$. Ainsi le réseau (CS) donne bien un maximum d'émission pour l'angle $\theta_{(1,0,0)}$ mais pas les réseaux (CC) et (CFC) . Expliquer ce phénomène en examinant le rayonnement émis par les nœuds éventuellement présents dans le plan défini par les indices de MILLER $(2, 0, 0)$.

9. De la même façon, prévoir si les réseaux (CS) , (CC) et (CFC) produisent un maximum d'émission pour l'angle d'incidence $\theta_{(1,1,0)}$.

B. Chambre de Debye-Scherrer

Afin de déterminer la structure cristalline d'un solide, un échantillon est divisé en un grand nombre de micro-cristaux aléatoirement orientés. La poudre ainsi obtenue est placée dans un capillaire, sur le trajet d'un faisceau parallèle et monochromatique de rayons X. Le rayonnement diffracté est analysé par un détecteur pouvant tourner autour d'une monture circulaire centrée sur l'échantillon (chambre de DEBYE-SCHERRER). Le signal reçu présente un ensemble de raies repérées par l'angle D (non orienté) par rapport à la direction incidente du faisceau, réparties de façon symétrique. Voir la figure 8.

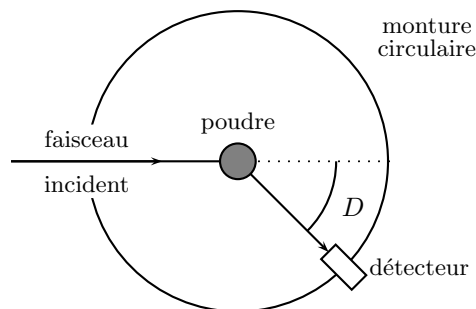


FIG. 8 – Chambre de DEBYE-SCHERRER

10. Quel est l'intérêt d'utiliser une poudre ?

11. Quelle est la relation entre l'angle D d'une raie et les indices de MILLER (h, k, l) caractérisant les plans réticulaires responsables de ce maximum d'émission ?

12. L'argent cristallise selon une maille cubique. La raie correspondant aux indices de MILLER $(1, 1, 1)$ est obtenue en $D = 17,3^\circ$ pour un faisceau de longueur d'onde $\lambda = 71,0$ pm. Quel est le paramètre de maille ?

13. Pour l'argent, il n'y a pas de raies correspondant aux indices de MILLER $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$. Quel est le réseau correspondant ? En déduire le rayon métallique de l'argent.

C. Réseau de Bragg

Réalisation

On obtient un réseau de BRAGG en plaçant dans une fibre optique N couches quasi-transparentes et faiblement réfléchissantes équidistantes d'une pas s , avec $N \gg 1$. Lorsqu'une onde lumineuse se propage dans ce milieu, il se produit une réflexion partielle de faible amplitude à chaque traversée des couches, dans les deux sens de propagation, voir le schéma de la figure 9.

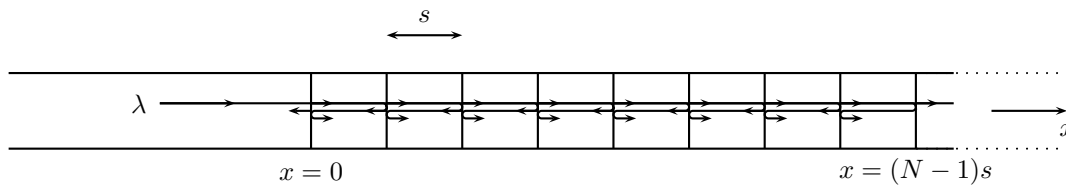


FIG. 9 – Réseau de BRAGG

14. Pour une radiation incidente de longueur d’onde λ dans le vide, on note n l’indice optique de la fibre optique. À l’aide du modèle scalaire des ondes lumineuses, expliquer qualitativement pourquoi un rayonnement de longueur d’onde $\lambda = 2ns$ est fortement réfléchi par ce système.

15. Quelles autres longueurs d’onde sont également fortement réfléchies ? Dans la suite du problème, on ne s’intéressera pas à cette possibilité.

Première application : transmission par modulation d’amplitude

Les réseaux de BRAGG sont de plus en plus utilisés dans les transmissions par fibre optique afin de sélectionner précisément une longueur d’onde avant de moduler le signal en amplitude. Pour cela, on peut utiliser le système de la figure 10 dans lequel le rayonnement initial contient les longueurs d’ondes λ comprises entre $\lambda_1 = 1,54 \mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 1,56 \mu\text{m}$, ce qui correspond à une fenêtre de transparence de la silice utilisée dans la composition des fibres optiques. L’indice optique moyen est égal à $n_0 = 1,51$ dans cet intervalle.

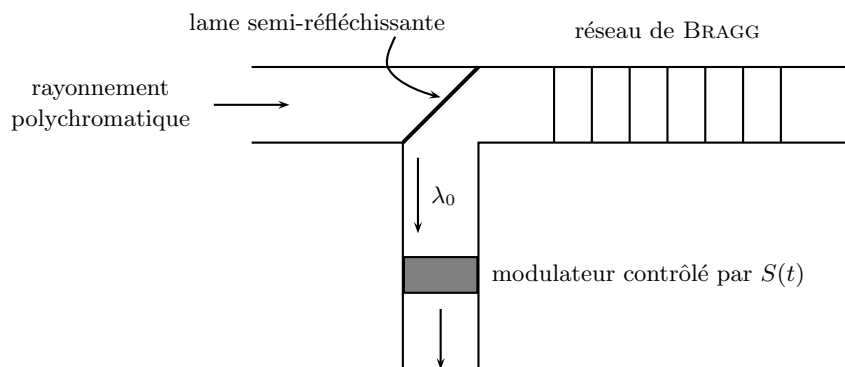


FIG. 10 – Modulateur

16. Quel doit être le pas s du réseau de BRAGG pour que la longueur d’onde λ_0 sélectionnée par le système soit égale à $1,55 \mu\text{m}$? Calculer la fréquence f_0 correspondante.

17. Le modulateur modifie l’amplitude de l’onde lumineuse en fonction d’un signal d’information $S(t)$ dépendant du temps. En un point situé à la sortie du modulateur, le champ électrique est de la forme $\mathbf{E} = GS(t) \cos 2\pi f_0 t \mathbf{u}$ où G est une constante multiplicative et \mathbf{u} la direction de polarisation supposée constante. Pour un signal $S(t)$ sinusoïdal de fréquence f , quelle est la composition en fréquence de $\mathbf{E}(t)$? En déduire le domaine spectral du champ électrique pour un signal $S(t)$ occupant l’intervalle de fréquence $[0, f_{max} = 1 \text{ GHz}]$.

18. En rajoutant d’autres dispositifs du même type accordés sur des fréquences f_0 différentes, combien de signaux modulés en amplitude peuvent être transmis sur une même fibre optique sans chevauchement des plages de fréquences dans l’intervalle de longueur d’onde $[1,54 \mu\text{m}; 1,56 \mu\text{m}]$? On considérera que les signaux modulateurs occupent l’intervalle de fréquence $[0, f_{max} = 1 \text{ GHz}]$.

Deuxième application : correction de la dispersion chromatique

On considère une fibre optique de longueur $L = 10 \text{ km}$ dans laquelle les informations sont transmises à l’aide d’un rayonnement occupant la plage de longueur d’onde $[\lambda_1 = 1,54 \mu\text{m}; \lambda_2 = 1,56 \mu\text{m}]$. Dans ce domaine spectral, la dispersion chromatique de la fibre est représentée par la loi $n(\lambda) = n_0 - \alpha(\lambda - \lambda_0)$ avec $n_0 = 1,51$, $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$, $\alpha = 3600 \text{ m}^{-1}$.

19. Soit $\tau(\lambda)$ la durée de propagation le long de la fibre d’un signal lumineux de longueur d’onde λ . Calculer numériquement $\Delta\tau = \tau(\lambda_1) - \tau(\lambda_2)$.

20. Expliquer pourquoi la dispersion chromatique dégrade la transmission de l’information.

21. On peut corriger la dispersion chromatique en plaçant à la sortie de la fibre optique un réseau de BRAGG de pas variable représenté sur la figure 11, produisant une réflexion des composantes monochromatiques λ en

différents endroits selon la valeur locale du pas s . Calculer la variation Δs de la valeur locale du pas entre les deux extrémités du réseau de BRAGG.

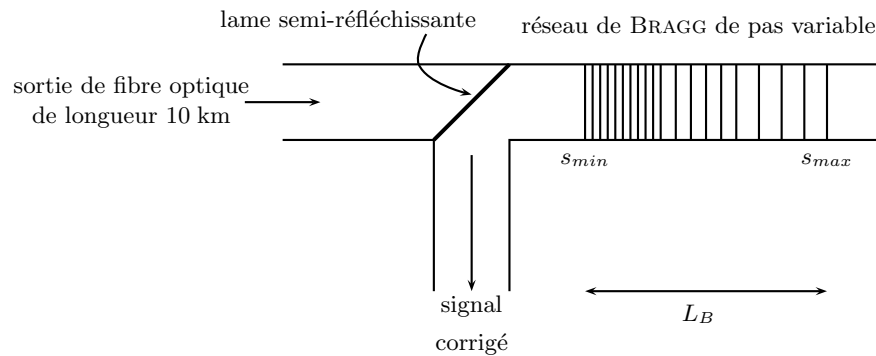


FIG. 11 – Réseau de BRAGG de pas variable

22. Expliquer pourquoi la plus petite valeur du pas local s_{min} doit être placée à l'entrée du réseau de BRAGG, du côté le plus proche de la lame semi-réfléchissante.

23. Calculer la longueur totale L_B du réseau de BRAGG nécessaire à la correction de la dispersion chromatique.

Étude de la bande passante

On revient à l'étude d'un réseau de BRAGG d'axe x' contenant N couches réfléchissantes, considérées infiniment minces, placées régulièrement en $x = qs$, q désignant un entier compris entre 0 et $N - 1$, voir la figure 10. En notation complexe, pour des rayonnements monochromatiques se propageant vers les x croissants ou vers les x décroissants, le coefficient de réflexion \underline{r} et le coefficient de transmission \underline{t} du champ électrique à travers une couche s'écrivent $\underline{r} = i\sqrt{1 - \chi^2}$, $\underline{t} = \chi$, où χ est un réel positif légèrement inférieur à 1. De part et d'autre de la couche réfléchissante placée en $x = qs$, le champ électrique est la somme de deux ondes progressives se propageant en sens inverse, et s'écrit sous la forme :

$$x \in](q-1)s, qs[\quad \underline{\mathbf{E}} = (\underline{A}_q \exp -ik(x - qs) + \underline{B}_q \exp ik(x - qs)) \exp i\omega t \mathbf{e}_y$$

$$x \in]qs, (q+1)s[\quad \underline{\mathbf{E}} = (\underline{C}_q \exp -ik(x - qs) + \underline{D}_q \exp ik(x - qs)) \exp i\omega t \mathbf{e}_y$$

24. Pour simplifier, nous assimilerons le milieu de la fibre optique à du vide d'indice $n = 1$. Donner l'expression de k en fonction de la longueur d'onde λ des ondes lumineuses.

25. Exprimer \underline{B}_q et \underline{C}_q en fonction de \underline{A}_q , \underline{D}_q , \underline{r} et \underline{t} . En déduire, en fonction de χ , les coefficients de la matrice \mathbf{P} telle que :

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_q \\ \underline{B}_q \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \underline{C}_q \\ \underline{D}_q \end{pmatrix}$$

26. Exprimer \underline{C}_q et \underline{D}_q en fonction de \underline{A}_{q+1} , \underline{D}_{q+1} , k et s . En déduire les coefficients de la matrice \mathbf{Q} telle que :

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_q \\ \underline{B}_q \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \underline{A}_{q+1} \\ \underline{B}_{q+1} \end{pmatrix}$$

27. Comme il n'y a pas d'onde réfléchie pour $x > (N - 1)s$, on peut écrire à l'entrée et à la sortie du réseau de BRAGG :

$$x < 0 \quad \underline{\mathbf{E}} = (\underline{A}_0 \exp -ikx + \underline{B}_0 \exp ikx) \exp i\omega t \mathbf{e}_y$$

$$x > (N - 1)s \quad \underline{\mathbf{E}} = \underline{A}_N \exp -ik(x - Ns) \exp i\omega t \mathbf{e}_y$$

Exprimer le coefficient de réflexion du champ électrique $\underline{\rho}$ du réseau de BRAGG en fonction des coefficients \underline{M}_{ij} de la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^N$.

28. Un calcul technique, non développé ici, donne le coefficient de réflexion énergétique $R = |\underline{\rho}|^2$:

$$\xi = \frac{1}{\chi} \cos ks \quad R = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\chi^2} - 1\right) U_{N-1}(\xi)^2}$$

Les fonctions $U_N(\xi)$ sont les polynômes de CHEBYCHEV de deuxième espèce définis par la relation de récurrence :

$$U_0(\xi) = 1 \quad U_1(\xi) = 2\xi \quad N \geq 2 : U_N(\xi) = 2\xi U_{N-1}(\xi) - U_{N-2}(\xi)$$

Le polynôme $U_{N-1}(\xi)$ s'annule $N - 1$ fois dans l'intervalle $[-1, 1]$ pour les valeurs $\xi_m = \cos \frac{m\pi}{N}$ avec $m = 1, m = 2, \dots, m = N - 1$. Pour $|\xi| \geq 1$, $|U_{N-1}(\xi)| \geq N$, et ainsi $\lim_{N \rightarrow \infty} R(\xi) = 1$. La figure 12 donne R en fonction de ks pour $\chi = 0,99$, $N = 10$ et $N = 30$. Commenter l'allure des courbes.

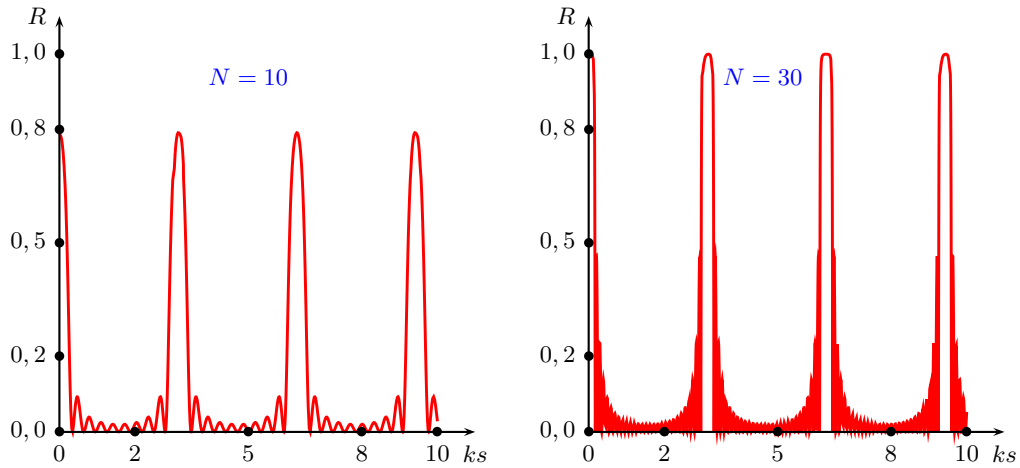


FIG. 12 – Coefficient de réflexion énergétique R

29. On définit la bande passante $\Delta\nu$ associée à un pic de réflectivité du réseau de BRAGG par la largeur de l'intervalle de fréquence pour lequel $|\xi| > 1$. Exprimer $\Delta\nu$ en fonction de χ , s , c en supposant χ légèrement inférieur à 1.