

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°3 du 08-11-2011

— Durée : 4 heures. Solutions —

Problème n° 1 – Mesure de la vitesse d'une onde de choc

X MP 2009

A. Principe de la détermination

1. La lame séparatrice S_1 dédouble le faisceau lumineux qui va ainsi effectuer deux chemins optique différents en passant soit par la voie basse, soit par la voie haute de l'interféromètre. Toutes les conditions sont requises - à condition que la différence de chemin optique n'excède pas la longueur de cohérence du laser qui est assez élevée de l'ordre du mètre assez facilement - pour obtenir des interférences.

2. En sortie de S_2 , on observe des interférences constructives entre les deux faisceaux. On doit former une image de la source d'intensité maximale et uniforme.

3. La rotation d'un angle α entraîne la rotation de la direction de l'onde émergeant du miroir d'un angle 2α . L'onde 1 possède le vecteur d'onde $\mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_x$ alors que l'onde 2 est incliné d'un angle 2α par rapport à \mathbf{e}_x . On a donc : $\mathbf{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [\cos 2\alpha \mathbf{e}_x + \sin 2\alpha \mathbf{e}_y]$. Les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à chacun de ses vecteurs d'ondes. Les interférences en sortie constituent maintenant des franges brillantes et des franges sombres.

4. On a $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} x$ et $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} [x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha]$. Cette dernière expression peut évoluer car l'angle de rotation est très petit, à savoir à l'ordre 1 où $\cos 2\alpha \simeq 1$ et $\sin 2\alpha \simeq 2\alpha$: $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} (x + 2\alpha y)$.

5. La différence de phase est $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\alpha y$. On a donc une situation d'interférence à deux ondes. L'amplitude du champ électrique total est $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_0 \exp i\omega t (1 + \exp j \frac{2\pi}{\lambda} 2\alpha y)$. On trouve donc une intensité de la forme : $I = 2E_0^2 (1 + \cos \frac{2\pi 2\alpha y}{\lambda})$. On notera que cette formule n'est pas tout à fait satisfaisante sur le plan dimensionnel puisqu'il serait préférable d'écrire que I est proportionnelle au carré du champ électrique plutôt qu'égal au champ électrique, la constante de proportionnalité assurant le dimensionnement correct de la formule.

6. On a un réseau de franges brillantes et de franges sombres d'équations $y = \text{Cte}$. L'interfrange correspond à la période de la fonction d'intensité lumineuse. On a : $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$.

7. La différence de marche supplémentaire δ correspond à un retard temporel de $\tau = \frac{\delta}{c}$ par définition. À la différence de marche que nous avons calculée précédemment, il faut ajouter $\delta = c\tau$. On a donc $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (2\alpha y + c\tau)$. On donc : $I = 2E_0^2 (1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (2\alpha y + c\tau))$.

8. L'effet de l'étalon sur la figure d'interférences est une translation du système de franges. On peut le comprendre facilement en considérant la position, par exemple, de la frange brillante d'ordre $p = 0$ qui dans la première situation était située en $y = 0$ (phase nulle) et qui dans le second cas va être située en $y = -\frac{c\tau}{2\alpha}$.

9. La formule proposée traduit l'effet DOPPLER. La phase de l'onde 2 est donnée par $\varphi_2 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} = \frac{\omega}{c} (2\alpha y + c\tau)$ puisque le vecteur d'onde vérifie la relation de dispersion classique dans l'air ou le vide. Avec $\omega = \omega_0 + \frac{2V_0}{c} \omega_0$, on trouve que $\varphi_2 = 2\pi \frac{y}{i} + \omega_0 \tau + \frac{2\omega_0 V_0 \tau}{c}$. On obtient l'expression de l'intensité fournie par l'énoncé, à savoir : $I_{S_2}(y, V_0) = 2E_0^2 [1 + \cos (\omega_0 \tau + \phi(V_0) + 2\pi \frac{y}{i})]$ en posant effectivement que $\phi(V_0) = 4\pi \tau V_0 / \lambda_0$ puisque la longueur d'onde λ_0 vérifie : $\lambda_0 = c \frac{2\pi}{\omega_0}$.

10. Le tracé de l'évolution au cours du temps de l'interférogramme dans le plan de sortie de la séparatrice S_2 correspond à des discontinuités du système de franges puisque la modification de vitesse est quasi-instantanée. Cela correspond à ce que l'on voit sur la figure qu'on demande d'analyser dans la partie suivante.

B. Exploitation d'un interférogramme expérimental

11. La dimension de la zone visualisée est de $300 \mu\text{m}$. On y compte 6 interfranges et donc $6i = 300 \mu\text{m}$. On a, de ce fait : $i = 50 \mu\text{m}$.

12. Puisque la translation de franges est inférieure à l'interfrange, on trouve que : $F = \frac{1}{2}$.

13. Avec les définitions proposées, on a $V_0 = S_V F$ et $F = \frac{\phi(V_0)}{2\pi} = \frac{2\tau V_0}{\lambda_0}$. On trouve que : $S_V = \frac{\lambda_0}{2\tau}$.

14. On a $\delta = 2e \frac{n^2 - 1}{n} = c\tau$. On trouve : $\tau = 158 \text{ ps}$ et $S_V = 1,68 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse de l'interface est donc : $V_0 = 8,37 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

15. Si le système de franges effectue une translation de $F = p + \varepsilon$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < 1$, on ne perçoit que la translation correspondant à $F = \varepsilon$. F est définie que modulo 1. Si on utilise deux sensibilités, alors on

peut écrire que $V_0 = S_V F = S'_V F'$ et sauf si les valeurs numériques s'organisent pour nous piéger, on pourra lever l'indétermination sur F et donc sur V_0 . En multipliant les expériences avec des sensibilités différentes, on pourra trouver avec assurance la vitesse.

Complément : calcul de la différence de marche.

L'ajout de la lame de verre étalon introduit une différence de marche qu'il faut calculer sans oublier que pour éviter l'effet de translation latérale par rapport au miroir du rayon réfléchi, on recule le miroir pour que le rayon passe par le même chemin que le rayon réfléchi sans la présence de la lame étalon d'indice n et d'épaisseur e . Pour comprendre le calcul, on se reportera à la figure 1. Sur la figure Δx matérialise le recul du miroir que l'on doit provoquer pour les rayons en sortie soient confondus.

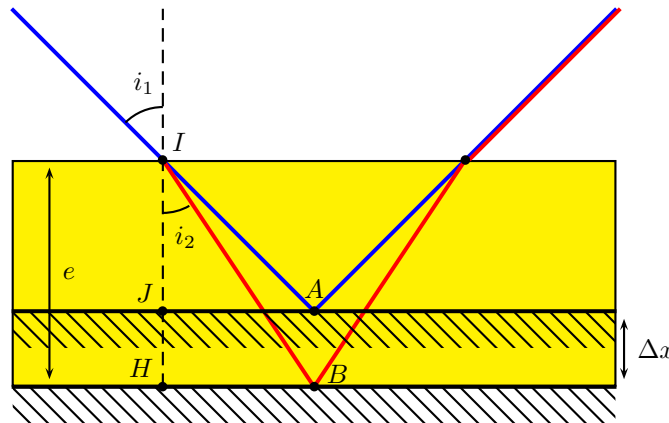


FIG. 1 – Calcul de la différence de marche

La différence de marche correspond à $\delta = 2(nIB - IA)$. On a $IA = \frac{IJ}{\cos i_1} = \frac{e - \Delta x}{\cos i_1}$. De la même façon, on a $IB = \frac{e}{\cos i_2}$. La différence de marche est donc $\delta = 2e \left(\frac{n}{\cos i_2} - \frac{1 - \Delta x/e}{\cos i_1} \right)$. La loi de DESCARTES nous permet d'écrire que $\sin i_1 = n \sin i_2$ et par conséquent que $\cos i_2 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}}$ que l'on peut encore écrire selon $\cos i_2 = \frac{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i_1}}{n}$. On peut alors écrire que la différence de marche est : $\delta = 2e \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i_1}} - \frac{1 - \Delta x/e}{\cos i_1} \right)$. Il faut chercher à éliminer la distance de recul Δx de ce calcul. On utilise la tangente des angles : $\tan i_1 = \frac{JA}{e - \Delta x}$ et $\tan i_2 = \frac{HB}{e}$. Comme $HB = JA$ et en utilisant la relation de DESCARTES, on arrive à $1 - \Delta x/e = \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i_1}}$.

Le calcul de la différence de marche se simplifie et on arrive à finalement l'expression : $\delta = 2e \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i_1}}$.

L'énoncé a proposé de travailler avec $\delta = 2e(n - \frac{1}{n}) = 2e \frac{n^2 - 1}{n}$. Cela signifie que l'incidence a été choisie comme nulle : $i_1 = 0$. Ceci ne correspond pas tout à fait à la figure proposée dans l'énoncé mais cela sera acceptable si la distance séparant S_1 de M_1 est grande devant la distance transversale qui existe entre les deux lignes de l'interféromètre.

Problème n° 2 – Interférences

Centrale TSI 2007

A. Anneaux de Michelson

1. On observe des anneaux, les franges sont donc des franges d'égale inclinaison de la lame d'air constituée par les miroirs M_1 et M_2 qui sont donc **perpendiculaires**.

2. On considère un rayon lumineux issu d'un point situé à l'extrémité de la source, donc à la distance R du centre de cette source. Comme cette source est placée dans le plan focal objet de la lentille L_1 , ce point produit un faisceau de rayons parallèles entre eux et d'orientation donnée par le rayon passant par le centre optique de L_1 à savoir O_1 . L'angle par rapport à l'axe optique est donc tel que $\tan \varepsilon = \frac{R}{f_1} \simeq \varepsilon$ puisque l'on travaille nécessairement dans les conditions de GAUSS. L'interféromètre de MICHELSON ne change pas l'orientation relative de ces rayons par rapport à l'axe optique de la lentille L_2 puisque la lame semi-réfléchissante ne provoque globalement qu'une rotation de $\pi/2$. Le faisceau de rayons lumineux arrive donc sur la lentille L_2 avec l'angle ε et focalise dans le plan focal image à la position donnée par $f_2 \varepsilon$. On en déduit donc que $R' = \frac{f_2}{f_1} R$ et par conséquent que :

$$R = R' \frac{f_1}{f_2} = 1 \text{ cm}.$$

3. Cette situation s'appelle le **contact optique**. Elle correspond à $e = 0$ et donc à une différence de marche nulle pour tous les rayons lumineux quelle que soit leur inclinaison. Tous les rayons qui se sont réfléchis sur le miroir M_1 font donc avec leur homologue venant du miroir M_2 des interférences constructives d'ordre $p = 0$,

on voit un disque lumineux relativement homogène si la source présente au départ une intensité lumineuse homogène sur toute son extension.

4. On peut montrer, voir cours, que la différence de marche est : $\delta = 2e \cos i$.

5. L'utilisation de lentilles nous oblige à travailler dans les conditions de GAUSS afin de conserver la propriété de stigmatisme et de ne pas influencer la différence de marche calculée avant. On effectue un développement limité selon $\delta = 2e(1 - \frac{i^2}{2})$. Le rayon d'une frange est relié à l'orientation du rayon lumineux par $r = f_2 \tan i \simeq f_2 i$. En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient : $2e - e \frac{r^2}{f_2^2} = p\lambda$ pour un ordre p donné. Le premier rayon sombre possède un ordre $p = n + \frac{1}{2}$ par exemple où $n \in \mathbb{N}$, le second correspondra à $n - 1$ et ainsi de suite. On peut donc écrire que $2e - e \frac{r_1^2}{f_2^2} = p_1\lambda$ et aussi que $2e - e \frac{r_2^2}{f_2^2} = (p_1 - 8)\lambda$. En effectuant la soustraction, on obtient $e \frac{r_2^2 - r_1^2}{f_2^2} = 8\lambda$. On peut donc conclure avec : $e = \frac{8\lambda f_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 5,291 \times 10^{-4} \text{ m}$.

6. On applique la formule précédente avec un décalage d'une unité dans l'ordre d'interférences. On trouve :

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + \frac{\lambda f_2^2}{e}} = 2,2 \text{ cm}.$$

7. On a vu que le rayon d'une frange est donné par $r = f \sqrt{2 - p \frac{\lambda}{e}}$. Cette formule évolue de façon non linéaire avec p et l'effet de la racine carrée fait que l'écart de rayon entre deux franges consécutives diminue progressivement. Les franges sont de plus en plus serrées.

8. Lorsque e évolue, les anneaux se déplacent dans la figure d'interférences. Isolons une frange donnée, on raisonne donc pour $p\lambda$ fixé, cela signifie que $2e \cos i = p\lambda$ est fixé. Si e augmente alors $\cos i$ diminue et donc i augmente. Les anneaux ont un mouvement du centre vers l'extérieur et réciproquement si e diminue. R' est le rayon extrême de la zone d'interférences. Il y correspond à ordre p_b tel que $p_b = (1 - \frac{R'^2}{2f_2^2}) \frac{2e}{\lambda}$, or l'ordre au centre est $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$. On peut donc calculer l'écart qui existe entre l'ordre au centre (le plus élevé) et l'ordre au bord, on trouve : $p_0 - p_b = \frac{R'^2}{2f_2^2} p_0$. Dans le cas où e augmente, l'ordre au centre p_0 augmente et en même temps l'écart $p_0 - p_b$ augmente aussi. Il y a automatiquement plus d'entiers compris dans cet intervalle et donc plus de franges brillantes. Plus on est loin du contact optique, plus on voit de franges brillantes et plus elles sont serrées aussi...

B. Utilisation de lumière polarisée

9. On peut raisonner dans cette première question dans le cadre de l'approximation scalaire, on superpose donc trois amplitudes lumineuses déphasées de la même quantité notée $\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda f_2}$ ce qui se démontre aisément puisqu'on travaille à l'infini (en projection dans le plan focal image de la lentille L_2). En prenant comme origine des phases, la fente centrale, on a donc une amplitude de la forme $s = s_0 \exp j\omega t (\exp -j\varphi + 1 + \exp j\varphi) = s_0 \exp j\omega t (1 + 2 \cos \varphi)$. Le passage à l'intensité lumineuse s'effectue de façon traditionnelle selon $I = \alpha s s^*$. Ici, cela conduit à $I(x) = I_0 (1 + 2 \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f_2})^2$. Le graphique d'évolution de la fonction d'intensité est donné sur la figure 2.

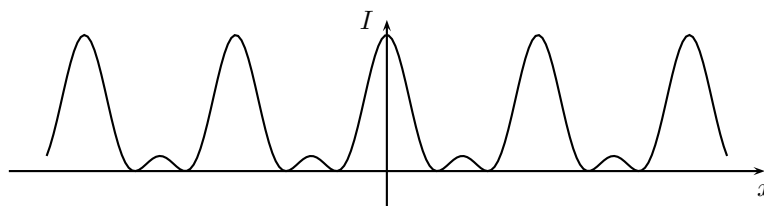


FIG. 2 – Interférences à 3 ondes

Sur la figure 2, on peut voir des maxima très marqués qui correspondent à $\delta = p\lambda$ avec p entier. La valeur de l'intensité est alors $I = 9I_0$, les trois ondes se superposent de façon constructive. Pour $p = n + \frac{1}{2}$ avec n entier. Deux ondes consécutives sont en opposition de phase et font des interférences destructives mais la troisième se trouve en phase avec la première et cela génère une intensité $I = I_0$. On constate que les ordres entiers sont renforcés par rapport aux autres valeurs de l'ordre. Cette situation va s'accroître lorsque le nombre de fentes va croître... comme pour un réseau!

10. Il faut faire un calcul maintenant sur les amplitudes vectorielles des ondes. L'amplitude complexe du champ électrique résultant de la superposition des trois ondes est de la forme : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_01 \exp -j\varphi + \mathbf{E}_02 + \mathbf{E}_03 \exp j\varphi$. Pour trouver l'intensité, il faut effectuer le produit scalaire avec le champ vectoriel complexe conjugué : $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_01 \exp j\varphi + \mathbf{E}_02 + \mathbf{E}_03 \exp -j\varphi$. On a $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \mathbf{E}_01^2 + \mathbf{E}_02^2 + \mathbf{E}_03^2 + 2\mathbf{E}_01 \cdot \mathbf{E}_02 \cos \varphi + 2\mathbf{E}_01 \cdot \mathbf{E}_03 \cos 2\varphi + 2\mathbf{E}_02 \cdot \mathbf{E}_03 \cos \varphi$. D'après les hypothèses de l'énoncé, on a $E_01 = E_02 = E_03 = E_0$ et du fait de l'utilisation des polariseurs

rectilignes $\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{03} = 0$ et $\mathbf{E}_{02} \cdot \mathbf{E}_{03} = 0$ alors que $\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} = E_0^2$. La formule de l'intensité est donc : $I(x) = I_0(3 + 2 \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f_2})$. Cette formule peut être réécrite selon $I(x) = I_0 + 2I_0(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f_2})$. On voit donc qu'il y a superposition de l'intensité I_0 due à la fente \mathcal{F}_3 qui n'interfère pas avec les autres fentes et du système d'interférences traditionnelles de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . La représentation est réalisée sur la figure 3.

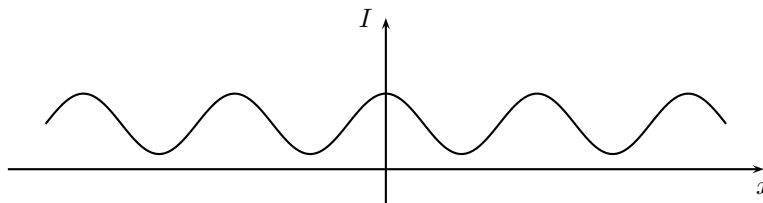


FIG. 3 – Interférences en lumière polarisée - Situation $1 \diamond 2 + 3$

11. La nouvelle utilisation des polariseurs impose $\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{03} = E_0^2$ alors que $\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} = 0$ et $\mathbf{E}_{02} \cdot \mathbf{E}_{03} = 0$. En reprenant le produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$, on trouve que $I(x) = I_0(3 + 2 \cos \frac{2\pi 2ax}{\lambda f_2})$. Cette formule peut être réécrite selon $I(x) = I_0 + 2I_0(1 + \cos \frac{2\pi 2ax}{\lambda f_2})$. On voit donc qu'il y a superposition de l'intensité I_0 due à la fente \mathcal{F}_2 qui n'interfère pas avec les autres fentes et du système d'interférences traditionnelles de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_3 qui sont distantes de $2a$. L'interfrange est donc divisée par 2, cela se voit bien que la représentation de $I(x)$ réalisée sur la figure 4.

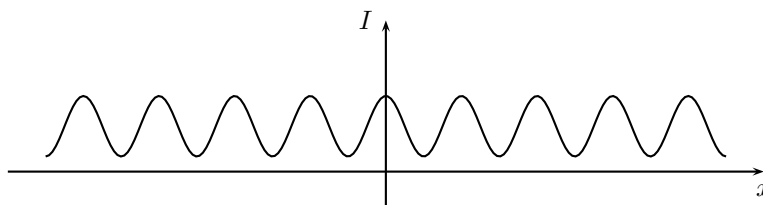


FIG. 4 – Interférences en lumière polarisée - Situation $1 \diamond 3 + 2$

Problème n° 3 – Diffraction des rayons X par un cristal d'argent Centrale MP 2011

A. Relation de Bragg

1. Pour le réseau cubique simple (CS), on a $8 \times \frac{1}{8} = 1$ atome par maille. En cubique centré (CC), on rajoute celui du centre de la maille, il y a donc 2 atomes. Enfin, pour le réseau (CFC), on compte $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ atomes par maille.

2. La disposition des nœuds dans les plan réticulaires $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$ est représentée sur le schéma de la figure 5.

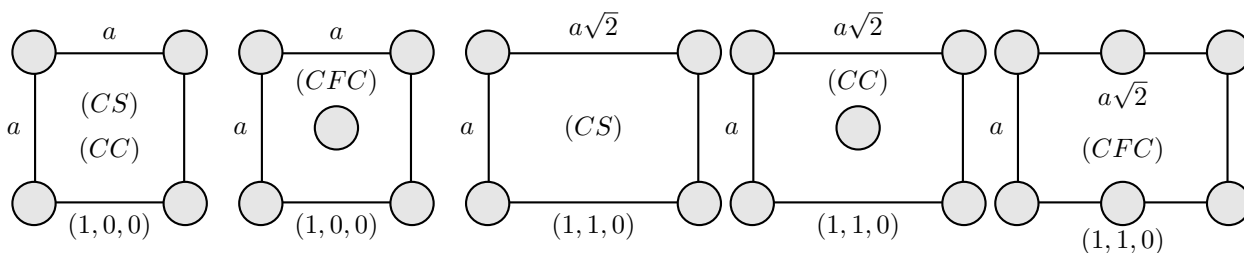


FIG. 5 – Plans réticulaires $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$

3. Les électrons des atomes vont subir le champ électrique de l'onde de la forme $\mathbf{E}_0 \cos \omega t$. Ils vont obéir à une équation différentielle du type $m \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = -e \mathbf{E}_0 \cos \omega t - \gamma \mathbf{v}$, cette dernière force représentant un amortissement lié aux interactions de l'électron avec son environnement. Après un régime transitoire, on aura une vitesse et donc une position de l'électron qui évolueront à la pulsation ω de l'onde donnée par la solution particulière de l'équation différentielle étudiée. Ceci ne sera plus valable en présence de non linéarité résultant d'un éclairage fort par exemple où des pulsations comme 2ω pourraient apparaître. Du fait de leur mouvement, les électrons provoquent une polarisation oscillante à la pulsation ω . En considérant, les dipôles oscillants à ω dans le modèle du dipôle rayonnant, ils émettront à leur tour une onde électromagnétique à la pulsation ω .

4. La différence de phase, dans cette situation de rayons à l'infini, est $\varphi_{1/2} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2$. La différence de marche sera donc : $\delta = (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2$.

5. $\theta' = -\theta$ est la direction de l'optique géométrique pour la réflexion. C'est bien dans cette direction que l'on récupérera un maximum d'intensité.

6. Lorsque la différence de marche correspond à un multiple entier de la longueur d'onde, on observera un maximum de lumière. En effectuant une projection des vecteurs unitaires des directions des rayons, on obtient $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{u}' = \cos \theta' \mathbf{e}_x + \sin \theta' \mathbf{e}_y$. On fera attention à cette dernière expression qui correspond bien à la situation proposée car les angles θ et θ' sont orientés et si l'on pose $\theta > 0$, on observe que $\theta' < 0$. Comme $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 = d_{(h,k,l)} \mathbf{e}_y$, on arrive à la relation $\delta = d_{(h,k,l)} (\sin \theta - \sin \theta') = m\lambda$ qui exprime la condition pour obtenir des interférences constructives. On aura, par conséquent, dans la direction privilégiée de réflexion de DESCARTES $\theta' = -\theta$, un maximum d'intensité si effectivement l'angle θ vérifie : $\sin \theta_{(h,k,l)} = \frac{\lambda \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}{2a}$.

7. On ne peut pas utiliser la lumière visible pour étudier la structure d'un cristal d'après son rayon diffracté car les cristaux présentes des paramètres de maille $a \simeq 100 \text{ pm}$ alors que la longueur d'onde dans le visible est $\lambda = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$. Les rayons X sont donc adaptés à cette étude car leur longueur d'onde est justement dans le domaine des valeurs de a .

8. Le plan réticulaire $(2, 0, 0)$ est celui d'équation $x = a/2$. Dans le cubique simple, ce plan ne contient aucun atome. Par contre dans le cas des réseaux (CC) et (CFC) , on trouvera des atomes. Le plan $(2, 0, 0)$ est donc bien alors un plan réticulaire. La loi de BRAGG appliquée au plan $(1, 0, 0)$ séparé de a du suivant est $2a \sin \theta_{(1,0,0)} = m\lambda = \lambda$ dans l'ordre 1 seul censé nous intéresser. Si l'on applique la loi de BRAGG au plan réticulaire $(2, 0, 0)$ séparé du suivant de $\frac{a}{2}$ observés dans la direction $\theta_{(1,0,0)}$, on aura $2 \times \frac{a}{2} \sin \theta_{(1,0,0)} = m'\lambda$. Cette relation conduit de façon évidente à $m' = \frac{1}{2}$. L'ordre d'interférence est demi-entier. Il y aura des interférences destructives entre les ondes issues du plan $(1, 0, 0)$ et celles issues du plan $(2, 0, 0)$. Cela explique l'absence de maximum de lumière dans la direction $\theta_{(1,0,0)}$.

9. Pour l'angle d'incidence $\theta_{(1,1,0)}$, on travaille sur les plans contenant une parallèle à l'axe Oz et, pour visualiser passant en diagonale de longueur $a\sqrt{2}$ dans le plan Oxy . D'après la loi de BRAGG, la condition d'obtention du maximum d'ordre 1 est donnée par $\sin \theta_{(1,1,0)} = \frac{\lambda}{a\sqrt{2}}$. On observe qu'entre le plan décrit et son homologue d'orientation passant par O , il n'y a pas de plan réticulaire contenant des atomes aussi bien dans le réseau (CS) que dans le réseau (CC) . Par conséquent, on observera bien un maximum d'intensité pour ces deux cas. Par contre, dans le cas du réseau (CFC) , on constate qu'un plan réticulaire se trouve présent entre les deux plans évoqués avant. Pour le visualiser : c'est celui qui contient les atomes des faces Oxy et Oyz de la maille représentée. Ce plan se situe à la distance $d = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ des plans précédents, c'est-à-dire au milieu des deux plans précédemment utilisés dans le raisonnement. Si on applique la relation de BRAGG, on trouve comme dans la question précédente qu'il correspond à un ordre $m'' = \frac{1}{2}$ et donc à des interférences destructives puisqu'on aura $2 \times \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin \theta_{(1,1,0)} = m''\lambda$. Il n'y aura pas d'intensité pour le réseau (CFC) dans l'orientation $(1, 1, 0)$.

B. Chambre de Debye-Scherrer

10. On utilise une poudre plutôt qu'un monocristal (d'ailleurs, il faudrait en posséder un, ce qui n'est jamais simple à obtenir par croissance à partir d'un microcristal) pour avoir toutes les orientations possibles des plans réticulaires pour une direction incidente des rayons X.

11. En observant la figure définissant les angles θ et θ' , on constate que l'angle D défini ici n'est autre que la déviation du faisceau incident. Compte tenu de l'orientation logique des rayons incidents et émergents, on aura $D = 2\theta' = -2\theta$.

12. La valeur de la déviation donnée montre qu'on travaille en valeur absolue pour la déviation. La relation de BRAGG pour l'orientation $(1, 1, 1)$ est $\sin \theta_{(1,1,1)} = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2a}$. Avec $\theta_{(1,1,1)} = \frac{D}{2} = 8,65^\circ$, on trouve $a = 409 \text{ pm}$.

13. Pour l'argent, il n'y a pas de raies correspondant aux indices de MILLER $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$. Avec les études que l'on a réalisées avant, cela signifie que seul le réseau (CFC) est possible pour l'argent. Dans ce réseau la tangence des atomes se produit sur la diagonale d'une face où l'on trouve donc 4 fois le rayon atomique de l'argent : $a\sqrt{2} = 4R$. Ceci nous permet de calculer ce rayon : $R = \frac{a}{2\sqrt{2}} = 145 \text{ pm}$.

C. Réseau de Bragg

Réalisation

14. Si l'on considère une onde réfléchi par la face d'entrée d'une couche quasi-transparente et celle réfléchi par la face de sortie, on aura une différence de marche de $\delta = 2ns$ entre les deux. Or, pour la longueur d'onde λ telle que $\lambda = 2ns$, on a donc une différence de marche $\delta = \lambda$. Ceci correspond à un ordre 1 et donc à des interférences constructives. On obtiendra donc bien en réflexion une intensité élevée.

15. Les autres longueurs d'onde fortement réfléchies seront celles pour lesquelles l'ordre d'interférences p sera un entier : $p \in \mathbb{N}$ pour $\delta = p\lambda$. Ce seront celles telles que : $\lambda = \frac{2ns}{p}$.

Première application : transmission par modulation d'amplitude

16. On a $2ns = \lambda_0$, on trouve $s = 0,513 \mu\text{m}$ et une fréquence $f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 1,94 \times 10^{14}$ Hz.

17. Si $S(t)$ est de la forme $\cos 2\pi ft$, lorsqu'on effectue le produit $\cos 2\pi ft \times \cos 2\pi f_0 t$, on obtient les fréquences $f_0 + f$ et $f_0 - f$. L'intervalle de fréquence occupé est donc de $2f_{max} = 2$ GHz.

18. L'accumulation des intervalles de fréquences doit représenter l'intervalle total disponible : $N2f_{max} = f_1 - f_2$. Avec $f_1 = \frac{c}{\lambda_1}$ et $f_2 = \frac{c}{\lambda_2}$, on trouve que $N = \text{ENT} \left[\frac{c}{2f_{max}} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right]$. Cela donne numériquement : $N = 1248$ signaux modulés.

Deuxième application : correction de la dispersion chromatique

19. On a $\tau(\lambda) = \frac{L}{c}(n_0 - \alpha(\lambda - \lambda_0))$. Avec cette formule, on peut calculer le décalage temporel d'arrivée de deux ondes de longueurs d'ondes différentes selon $\Delta\tau = \frac{\alpha L}{c}(\lambda_2 - \lambda_1)$. La valeur numérique conduit à $\Delta\tau = 2,4$ ns.

20. La dispersion chromatique dégrade la transmission de l'information parce qu'il y a un étalement très important. Cette durée de décalage est très grande devant la période d'un signal de fréquence située autour de 10^{14} Hz, les informations vont complètement se mélanger.

21. Avec l'utilisation d'un pas variable, on joue sur le fait que des ondes vont plutôt se réfléchir au début de la zone de pas variable et d'autres plutôt à la fin. Grâce à cela, on va pouvoir compenser le retard avant que le signal corrigé ne soit utilisé. Il faut donc que la longueur d'onde λ_2 qui correspond à l'onde la plus rapide car $n_2 < n_1$ fasse plus de chemin que l'autre pour que la plus lente (λ_1) puisse la rattraper. λ_2 doit se réfléchir en fin de zone pour $s = s_{max}$ et λ_1 en début de zone pour $s = s_{min}$. C'est bien pour cela que la variation de s est croissante dans le sens de propagation initial. On a donc $2n_2 s_{max} = \lambda_2$ et $2n_1 s_{min} = \lambda_1$. La variation de pas est donc $\Delta s = s_{max} - s_{min} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{n_2} - \frac{\lambda_1}{n_1} \right)$. Après calcul, on trouve $\Delta s = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2n_0} + \frac{\alpha(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_0)}{2n_0^2}$. L'application numérique montre que le second terme de l'expression précédente est très faible devant le premier. On peut se permettre d'écrire que : $\Delta s = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2n_0} = 6,6$ nm.

22. Nous avons déjà expliqué que la plus lente devait rattraper la plus rapide et donc faire le moins de chemin dans la zone de pas variable.

23. La plus rapide de longueur d'onde λ_2 va faire un parcours supplémentaire de $2L_B$ dans la fibre optique à la vitesse $v(\lambda_2) = \frac{c}{n(\lambda_2)}$. La durée mise pour ce parcours doit correspondre à $\Delta\tau$. On a donc $\Delta\tau = \frac{2L_B}{c} n(\lambda_2)$ d'où $L_B = \frac{c\Delta\tau}{2n(\lambda_2)} = 23,8$ cm.

Étude de la bande passante

24. Par définition, puisque $n = 1$, on a : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

25. On se situe en $x = qs$, cela simplifie l'expression des champs proposés. Quoi qu'il en soit, il faut observer que \underline{B}_q résulte de la réflexion de \underline{A}_q et de la transmission de \underline{D}_q . On peut donc écrire que $\underline{B}_q = \underline{r}\underline{A}_q + \underline{t}\underline{D}_q$. Par une même approche, on comprend que \underline{C}_q résulte de la transmission de \underline{A}_q et de la réflexion de \underline{D}_q . On a donc : $\underline{C}_q = \underline{t}\underline{A}_q + \underline{r}\underline{D}_q$. De cette dernière expression, on obtient \underline{A}_q en fonction des paramètres souhaités et en le remplaçant ensuite dans la première équation, on obtient l'expression de \underline{B}_q . Cela conduit à $\underline{A}_q = \frac{1}{\underline{t}}\underline{C}_q - \frac{\underline{r}}{\underline{t}}\underline{D}_q$ et $\underline{B}_q = \frac{\underline{r}}{\underline{t}}\underline{C}_q + \frac{\underline{t}^2 - \underline{r}^2}{\underline{t}}\underline{D}_q$. En tenant compte des expressions de \underline{t} et de \underline{r} , on arrive à la relation écrite sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_q \\ \underline{B}_q \end{pmatrix} = \frac{1}{\chi} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{1-\chi^2} \\ i\sqrt{1-\chi^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{C}_q \\ \underline{D}_q \end{pmatrix}$$

26. Dans cette question, il faut traduire le déphasage lié au chemin optique s parcouru lorsqu'on passe d'une couche à l'autre. On a donc $\underline{A}_{q+1} = \underline{C}_q \exp -iks$ et $\underline{B}_{q+1} = \underline{D}_q \exp iks$. Cela donne $\underline{C}_q = \underline{A}_{q+1} \exp iks$ et $\underline{D}_q = \underline{B}_{q+1} \exp -iks$. On peut introduire, pour faciliter les calculs, une notation matricielle $\begin{pmatrix} \underline{C}_q \\ \underline{D}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp iks & 0 \\ 0 & \exp -iks \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A}_{q+1} \\ \underline{B}_{q+1} \end{pmatrix}$. Si l'on appelle \mathbf{D} cette matrice de déphasage, on constate que $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{D}$ en produit matriciel évidemment. Après calculs, on arrive à l'expression :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\chi} \begin{pmatrix} \exp iks & -i\sqrt{1-\chi^2} \exp -iks \\ i\sqrt{1-\chi^2} \exp iks & \exp -iks \end{pmatrix}$$

27. On a vu que le lien de q à $q+1$ s'exprimait très bien sous forme matricielle avec \mathbf{Q} . Pour passer de 1 à N , on retrouvera la matrice issue du produit successif des N matrices \mathbf{Q} qui s'exprime par \mathbf{Q}^N . Cette matrice permet donc de relier les grandeurs d'entrée avec celles de sortie de la fibre. Avec les notations proposées, on arrive à $\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_N \\ 0 \end{pmatrix}$. En respectant les règles du calcul matriciel, on obtient $A_0 = M_{11}A_N$ et

$$B_0 = M_{21}A_N. \text{ Par définition du coefficient de réflexion, on aboutit à : } \boxed{\rho = \frac{B_0}{A_0} = \frac{M_{21}}{M_{11}}}.$$

28. On constate de façon évidente un effet de réseau. L'énergie est d'autant plus concentrée dans les ordres entiers correspondant à $ks = m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$. En effet, puisque $ks = m\pi$, on a $\frac{2\pi}{\lambda}s = m\pi$ qui équivaut à $2s = m\lambda$. Or, $2s$ est bien la différence de marche pour $n = 1$ entre un rayon réfléchi par une couche et celui réfléchi par la couche suivante. C'est donc bien une situation d'interférences constructives à N ondes comme dans un réseau. On terminera en observant que plus N est élevé plus le coefficient de réflexion énergétique sera proche de 1 dans les ordres entiers.

29. La bande passante $\Delta\nu$ associée à un pic de réflectivité du réseau de BRAGG est définie par la largeur de l'intervalle de fréquence pour lequel $|\xi| > 1$. La valeur maximale de $\cos ks$ est 1. Donc $\xi_{max} = \frac{1}{\chi}$ est un peu supérieur à 1 puisque $\chi \lesssim 1$. Les limites de la bande passante sont donc définies pour $\xi = 1$, c'est-à-dire pour $\cos ks = \chi$. Le maximum principal est donné par $ks = m\pi$, prenons $m = 0$ pour faciliter la compréhension, on travaille donc sur le premier pic de réflectivité. Dans ce cas $\nu = 0$ puisque $k = \frac{2\pi\nu}{c}$. On recherche donc la première fréquence positive qui assure $\cos k_c s = \chi$ où k_c est la valeur du vecteur d'onde qu'on pourrait qualifier de vecteur de coupure par analogie avec le langage des filtres. Cette fréquence est $\frac{\Delta\nu}{2}$ puisque $\Delta\nu$ est la largeur de la bande passante qui, du fait de la parité de la fonction cosinus, est symétrique par rapport à la fréquence centrale. La valeur de χ nous fait constater que $\cos k_c s \lesssim 1$ ce qui signifie que $k_c s \ll 1$. On effectue un développement limité pour écrire que $\chi = 1 - \frac{k_c^2 s^2}{2}$. Ainsi $k_c s = \sqrt{2(1-\chi)}$ et comme $k_c = \frac{2\pi\frac{\Delta\nu}{2}}{c}$, on en déduit que $\frac{\pi\Delta\nu}{c}s = \sqrt{2(1-\chi)}$. Le même raisonnement est reproductible pour $m \neq 0$, la bande passante autour de chaque pic de réflectivité est donc : $\boxed{\Delta\nu = \frac{c}{\pi s} \sqrt{2(1-\chi)}}$.