

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°3 du 14-11-2024

— Durée : 4 heures. Solutions —

Problème n° 1 – Diode Laser

Agrégation externe 2015

A. Principe de fonctionnement de la diode laser

1. L'acronyme LASER signifie $\boxed{\text{Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation}}$.

2. La diode laser est branché sur une source électrique comme un accumulateur ou une prise de courant classique. Cette énergie électrique permet de placer des atomes dans un niveau d'énergie plus élevé que le niveau fondamental. En faisant une transition entre ce niveau d'énergie élevé E_1 et un niveau plus bas E_2 , il y a émission de l'onde lumineuse. On a $\boxed{E_1 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_0}}$. Cette expression représente l'énergie d'un photon émis mais elle permet aussi de déterminer la longueur d'onde de l'émission laser.

3. La cohérence temporelle de la diode laser est caractérisée par son caractère plus ou moins monochromatique. C'est le longueur du train d'onde ou encore longueur de cohérence qui est significative. Pour une émission laser, on a couramment $\boxed{\ell_c = c\tau = 0,30 \text{ m}}$ si τ est la durée moyennes des trains d'ondes.

4. On peut rendre le faisceau de lumière parallèle à condition de placer la diode laser au $\boxed{\text{foyer objet}}$ d'une lentille convergente de courte focale plutôt pour que la largeur du faisceau ne soit pas trop grande et que l'on conserve une puissance surfacique élevée pour le faisceau laser.

B. Caractérisation du spectre de la diode laser

Détermination de la longueur d'onde centrale de la diode laser

5. Dans la configuration dite lame d'air, les deux miroirs de l'interféromètre de MICHELSON sont perpendiculaires : $\boxed{M_{1m} \perp M_{2f}}$. La lame d'air est perceptible en utilisant le miroir M_2 (miroir fixe) et l'image M'_1 par la lame semi-réfléchissante du miroir M_1 (miroir mobile). Le schéma de l'interféromètre est donné à la figure 1.

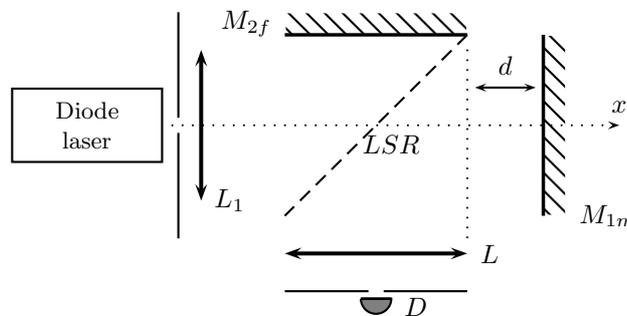


FIGURE 1 – Interféromètre de MICHELSON

6. On reprend la démonstration la plus simple du cours en raisonnant sur les deux images de la source S par M_{2f} et par M'_{1m} . Ces deux sources secondaires sont décalées de la distance $2d$. Comme les ondes sont parallèles, la différence de marche se situe au départ sur les deux sources dans la direction i évaluée par rapport à la direction S_1S_2 . On a aisément : $\boxed{\delta = 2d \cos i}$.

7. On a une situation d'interférences à deux ondes, l'intensité lumineuse est donnée par la formule de FRESNEL : $\boxed{I = 2I_0(1 + \cos \frac{2\pi 2d \cos i}{\lambda})}$. Les franges d'interférences sont des anneaux parce que si l'on prend, par exemple, une frange brillante alors $2d \cos i = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$. Une frange est déterminée par une valeur de l'angle i donnée. Par invariance par rotation autour de l'axe optique, on obtient des franges circulaires.

8. Le point central montré sur la figure de l'énoncé n'est pas une frange brillante, ni une frange sombre d'ailleurs. Par conséquent, p_0 n'est ni un entier, ni entier auquel on ajoute $1/2$. C'est donc forcément un réel, il est donc tout à fait possible d'écrire : $\boxed{p_0 = \frac{2d}{\lambda_0} = p_c + \varepsilon}$ avec $p_c \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < 1$.

9. L'ordre d'interférence du plus petit anneau brillant correspond alors à un ordre qui vaut le premier entier en dessous de p_0 puisque si i augmente δ diminue puisque $\delta = 2d \cos i$ et que $\cos i$ diminue pour $0 < i < \pi/2$. Le plus petit entier pour le premier anneau brillant est donc $\boxed{p = p_c}$. Pour un anneau brillant d'ordre $p \in \mathbb{N} \leq p_c$ est

donné par $\rho_p = f' \tan i \simeq f' i$ avec $\cos i = \frac{p}{p_0} = 1 - \frac{i^2}{2}$. En utilisant $p_0 = \frac{2d}{\lambda_0}$, on arrive finalement à l'expression de i puis à celle de ρ_p qui est : $\rho_p = f' \sqrt{2 - \frac{p\lambda_0}{d}}$.

10. Le premier anneau brillant ($m = 1$) est obtenu pour $p = p_c$, le second anneau $m = 2$ pour $p = p_c - 1$ et par conséquent le m -ième anneau pour $p = p_c - (m - 1)$. On a vu avant que $p = (p_c + \varepsilon)(1 - \frac{i^2}{2})$ d'où $p - p_c - \varepsilon = -p_0 \frac{i^2}{2} = -\frac{di^2}{\lambda_0}$. Avec $p - p_c = -(m - 1)$, on arrive donc à $i = \sqrt{\frac{(m-1+\varepsilon)\lambda_0}{d}}$. Le rayon du m -ième anneau est donc bien donné par : $R_m = f' \sqrt{\frac{(m-1+\varepsilon)\lambda_0}{d}}$.

11. Les rayons des dix premiers anneaux brillants sont fournis dans le tableau ci-dessous.

n° de l'anneau	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R (cm)	3,0	4,6	5,7	6,8	7,6	8,5	9,2	9,9	10,5	11,1
R^2 (cm ²)	9,0	21,2	32,5	46,2	57,8	72,3	84,6	98,0	110,3	123,2

12. D'après le calcul du rayon des anneaux brillants, on obtient pour le carré $R_m^2 = \frac{f'^2 \lambda_0}{d} m - \frac{f'^2 (1-\varepsilon)\lambda_0}{d}$. Si l'on effectue le tracé de $R_m^2 = f(m)$, on obtient une fonction affine de pente $a = \frac{f'^2 \lambda_0}{d}$. En effectuant une régression linéaire sur les points du tableau, on trouve $a = 1,28 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. À partir de cette expression, on trouve : $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$. La méthode de détermination de λ n'est pas très précise car la détermination du rayon R_m sur la figure fournie est assez incertaine, on a certainement entre 5% et 10% d'incertitude. Une meilleure méthode de détermination de la longueur d'onde est d'ailleurs présentée par la suite.

13. La couleur vert-jaune correspond à $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$, on est dans une zone où la perception de la couleur évolue beaucoup avec de petits écarts de longueurs d'onde. Dans cette zone, 10 nm suffisent pour changer assez radicalement la perception de la couleur qui dépend aussi de l'observateur...

14. Si d augmente, alors on voit les franges d'interférences - c'est-à-dire les anneaux - sortir par l'extérieur de la figure. Leur rayon augmente. En effet, on fixe son attention sur la frange brillante d'ordre p correspondant à un rayon ρ_p . On a donc $\delta = 2d \cos i = p_0 \lambda$ avec $p\lambda_0 = \text{Cte}$. Par conséquent, si d augmente, alors $\cos i$ doit diminuer. L'angle i augmente, ce qui fait que le rayon ρ_p augmente. Le contraste diminue car la raie n'est pas purement monochromatique lorsque la différence de marche augmente.

Détermination de la largeur spectrale de la diode laser

15. L'allure de la courbe $\frac{dI}{d\sigma}$ est donnée à la figure 2. Le rapport $\Delta\sigma/\sigma_0$ est très vraisemblablement petit.

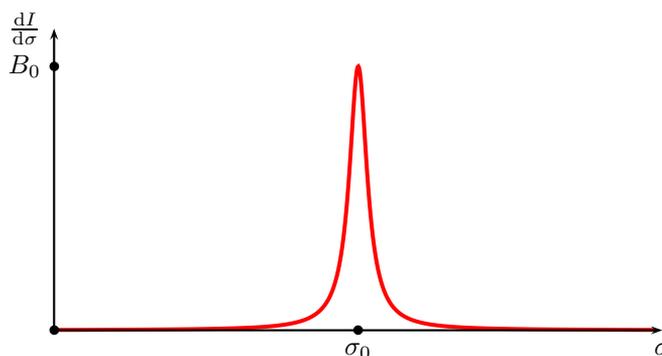


FIGURE 2 – Allure du spectre de la diode laser supposé centré sur la longueur d'onde λ_0

16. Deux ondes émises par une même source à deux longueurs d'onde différentes ne donnent pas lieu à des interférences, car les ondes doivent être synchrones pour obtenir le phénomène d'interférences.

17. On observe au foyer image de la lentille convergente d'observation. La différence de marche est $\delta = 2d$ puisque l'angle d'incidence est nul : $i = 0$. Chaque portion $d\sigma$ du spectre envoie une intensité élémentaire donnée par la formule de FRESNEL à savoir $dI = B_0 \frac{1}{1+(\frac{\sigma-\sigma_0}{\Delta\sigma})^2} (1 + \cos 2\pi 2d\sigma) d\sigma$. Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir l'éclairement total. On a donc bien une forme comme celle proposée, à savoir $I(t) = \int_0^{+\infty} f(\sigma) d\sigma$, à condition de poser $f(\sigma) = B_0 \frac{1}{1+(\frac{\sigma-\sigma_0}{\Delta\sigma})^2} (1 + \cos 2\pi 2d\sigma)$.

18. L'épaisseur de la lame d'air évolue en fonction du temps selon $d = V_0 t$ si l'on prend la date $t = 0$ lors du passage par le contact optique. Sur l'enregistrement, on voit que cette date correspond à 50 s. On

décalera la variable temps de $t = t - 50$ lorsque cela sera nécessaire pour effectuer des mesures. Grâce aux deux intégrales fournies, on trouve que l'intensité est donnée par : $I(t) = \frac{I_{max}}{2}(1 + \exp -2\pi\Delta\sigma 2V_0t \cos 2\pi\sigma_0 2V_0t)$. $\exp -2\pi\Delta\sigma 2V_0t$ représente la fonction lente par rapport à $\cos 2\pi\sigma_0 2V_0t$ qui est beaucoup plus rapide dans son évolution au cours du temps car $\sigma_0 \gg \Delta\sigma$. Cette fonction représente le contraste des interférences. On a donc $C(t) = \exp -2\pi\Delta\sigma 2V_0t$ qui sert d'enveloppe à l'évolution des franges de brillantes à sombres.

19. Pour déterminer $\lambda_0 = 1/\sigma_0$, on utilise le zoom qui montre à quelle vitesse évoluent les franges. La période temporelle de cette évolution quasi-périodique est celle de $\cos 2\pi\sigma_0 2V_0t$. La période est $T = \frac{1}{\sigma_0 2V_0} = \frac{\lambda_0}{2V_0}$. Sur le graphique qui zoome une partie de l'enregistrement, on voit que 12 périodes correspondent à une durée de 4s. La période est donc $T = \frac{1}{3}$ s. La vitesse de chariotage est $V_0 = \frac{5}{6} \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit que $\lambda_0 = 556 \text{ nm}$. Cette mesure est cohérente avec la précédente et elle est certainement beaucoup plus précise. Pour déterminer la largeur spectrale de la diode laser, il faut s'intéresser à l'enveloppe et donc au contraste $C(t)$. À la date $t = 0$, le maximum de l'enveloppe se situe à 0,57 alors que le minimum est à 0,43. Le contraste $C_0 = \frac{I_{max,0} - I_{min,0}}{I_{max,0} + I_{min,0}} = 0,14$. À la date $t = 50$ s, on a un contraste maximal, c'est à ce moment-là que l'on passe par le contact optique, on a $C_{50s} = 1$. On note $\Delta t = 50$ s, l'intervalle de temps à partir duquel on va travailler. On a donc $\exp -2\pi\Delta\sigma 2V_0\Delta t = 0,14$. On a donc $1,97 = 2\pi\Delta\sigma 2V_0\Delta t$. Cela permet d'exprimer la largeur spectrale de la diode en nombre d'onde : $\Delta\sigma = \frac{1,97}{2\pi 2V_0\Delta t} = 3,6 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$.

20. On a, par définition du nombre d'ondes, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. En différentiant cette expression, on obtient $d\sigma = -\frac{d\lambda}{\lambda^2}$. Comme $\Delta\sigma \ll \sigma_0$, on va assimiler dérivée et taux de variation pour écrire, en valeur absolue, que : $\Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$.

21. Avec une source classique monochromatique, on obtiendrait une fonction d'éclairement beaucoup plus simple : $I(t) = \frac{I_{max}}{2}(1 + \cos 2\pi\frac{2V_0t}{\lambda_0})$. Dans le cas de la raie large évoquée avant, on trouve $\Delta\lambda = \frac{1,97 \times \lambda_0^2}{2\pi 2V_0\Delta t}$. L'application numérique conduit à $\Delta\lambda = 1,2 \text{ nm}$. Pour une source plus classique, on aura au minimum quelques nanomètres de largeur spectrale pour les bonnes sources à spectre de raies.

22. En fait, ces annulations régulières du contraste traduisent la présence d'un doublet de longueurs d'ondes dans le spectre la diode laser. Les deux longueurs d'ondes sont relativement proches.

Problème n° 2 – Réfrigérateur domestique

Banque PT 2019

A. Modélisation d'une machine réfrigérante ditherme

1. L'objectif du réfrigérateur est d'extraire de l'énergie de la source froide pour la donner à la source chaude. Comme un tel transfert thermique est contre-nature, il est indispensable d'apporter de l'énergie au fluide caloporteur sous forme de travail $W > 0$. Le fluide puise donc de l'énergie dans la source froide $Q_f > 0$ et en donne à la source chaude $Q_c < 0$.

2. L'efficacité de la machine correspond au rapport de l'énergie utile, c'est-à-dire au transfert énergétique recherché, sur l'énergie coûteuse. La fonction du réfrigérateur étant de maintenir à 4 °C environ son compartiment intérieur, c'est Q_f qui est l'énergie utile. Le réfrigérateur est branché sur le secteur ce qui permet de lui fournir de l'énergie électrique pour obtenir le travail W nécessaire. L'efficacité est donc $e_f = \frac{Q_f}{W}$. Lorsque le fonctionnement de la machine est supposé réversible, on obtient une efficacité maximale. En effet, le premier principe appliqué à un fonctionnement cyclique de la machine permet d'écrire que $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_c + Q_f = 0$. Le second principe impose $\Delta S_{\text{cycle}} = S_{tr} + S_{cr} = 0$ avec $S_{cr} \geq 0$. Pour l'entropie transférée, on a des transferts thermiques avec deux thermostats aux températures T_c et T_f . On a donc $S_{tr} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$. Nous avons donc $e_f = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-(Q_f + Q_c)} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$. D'après le second principe, on a $\frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$. Cela permet d'écrire que $1 + \frac{Q_c}{Q_f} \leq 1 - \frac{T_c}{T_f}$. Ainsi, on démontre que $e_f \leq \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1}$ que l'on écrit plutôt : $e_f \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$.

B. Étude d'un cycle réfrigérant à compression de vapeur

3. Lorsque le fluide passe dans le condenseur, il se liquéfie (partiellement ou totalement). Il dégage de l'énergie lors de ce changement d'état. Cette énergie doit être rejetée à l'extérieur au niveau de la source chaude. Au contraire, pour réaliser une vaporisation du fluide, il faut lui fournir de l'énergie. C'est à ce moment-là qu'il en prélève à la source froide. Cela se produit au niveau de l'évaporateur. Les associations sont donc : $\text{condenseur} \rightarrow \text{source chaude}$ et $\text{évaporateur} \leftarrow \text{source froide}$.

Cycle avec compression réversible

4. Le point 1 se situe sur l'isotherme 10°C et sur l'isobare 3 bar car il fait suite à une vaporisation qui s'est effectuée à 0°C et donc sur l'isobare 3 bar. Pour obtenir la position du point $2s$, il faut suivre l'isentropique $s = 1,75 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ puisque la transformation est supposée adiabatique et réversible. Pour trouver la pression à laquelle il faut s'arrêter, il faut observer qu'entre l'état $2s$ et l'état 3, il se produit un liquéfaction à 40°C ce qui correspond à la pression de 10 bar. La pression au point $2s$ est donc de 10 bar, on observe qu'il se situe sur l'isotherme 50°C . La liquéfaction est complète et on effectue un sous-refroidissement isobare jusqu'à 30°C . Comme on se situe dans la phase liquide, l'isotherme à 30°C est une verticale. Elle n'est pas tracée sur le diagramme $P(h)$ proposé, on possède juste son départ vertical à la limite de la courbe d'ébullition. Cela nous permet de placer le point 3. Pour aller au point 4, il faut suivre une verticale car la détente est isenthalpique. On s'arrête à la pression de 3 bar puisqu'il y aura ensuite l'isotherme isobare à 0°C et 3 bar. On peut placer l'ensemble du cycle sur le diagramme $P(h)$.

5. Les états 1, $2s$, 3 et 4 sont décrits par le tableau suivant :

Point	1	$2s$	3	4
P (bar)	3,0	10,0	10,0	3,0
T ($^\circ\text{C}$)	10	50	30	0
État du fluide	vapeur	vapeur	liquide	liquide+vapeur
h ($\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$)	408	435	242	242

6. On choisit $T_{\text{evap}} < T_f$ pour que le transfert thermique spontané s'effectue bien de la source froide qui sera plus chaude que le fluide. De la même façon, on prend $T_{\text{cond}} > T_c$ pour que le fluide soit plus chaud que la source chaude et qu'ainsi le transfert thermique vers l'air de la cuisine se fasse bien.

7. Pour avoir des transformations $4 \rightarrow 1$ et $2s \rightarrow 3$ isobares, il faut que le fluide soit un **corps pur** puisque seuls les changements d'état des corps purs sont isothermes et isobares.

Cycle avec compression non réversible

8. Pour placer le point 2, il faut utiliser le rendement isentropique. On a donc $h_2 = h_1 + \frac{h_{2s}-h_1}{\eta} = 408 + 36 = 444 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Les coordonnées du point 2 sont donc $(444 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}, 10 \text{ bar})$ puisque la pression doit être de 10 bar pour respecter le caractère isobare de la transformation $2 \rightarrow 3$.

9. Le nouveau cycle suivi par le fluide est représenté dans le diagramme $P(h)$ du document-réponses. La modélisation de l'évolution $1 \rightarrow 2$ n'étant pas précisée, elle est représentée par un segment de droite.

10. Les coordonnées du point 2 ont déjà été établies précédemment. Il faut encore préciser la température par lecture sur les isothermes 70°C et l'état physique qui est **vapeur**.

Détermination de l'efficacité de la machine

11. Le premier principe de la Thermodynamique lorsqu'il est appliqué à un système ouvert en régime d'écoulement stationnaire s'écrit, ici, en grandeur massique : $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_{\text{pot}} = w_u + q$.

12. L'énergie potentielle concernant le fluide ne peut qu'être l'énergie potentielle de pesanteur qui, ramenée à l'unité de masse, s'écrit $e_{\text{pot}} = gz$ où z est une altitude évaluée par rapport à une référence choisie en $z = 0$. On peut admettre aisément qu'entre le bas et le haut d'un réfrigérateur la hauteur soit de 1,5 m. Le fluide parcourt l'échangeur thermique situé derrière le réfrigérateur quasiment sur toute la hauteur. On peut donc choisir d'évaluer la plus grande variation d'énergie potentielle de pesanteur grâce à cette donnée : $\Delta e_{\text{pot}} \simeq 15 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$ en prenant $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Les variations d'enthalpie sont largement dans l'ordre de grandeur du $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Les variations d'énergie potentielle de pesanteur sont donc largement négligeables.

13. Dans l'hypothèse d'uniformité de l'écoulement, le débit massique d'écrit $\mathcal{D} = \mu VS$ où μ est la masse volumique du fluide. Comme la masse volumique est l'inverse du volume massique $v = \frac{1}{\mu}$, on a ; $\mathcal{D} = \frac{VS}{v}$.

14. Si l'on se réfère à la loi des gaz parfaits $PV = nRT$ que l'on adapte à l'unité de masse et donc au volume massique, on peut écrire que $v = \frac{rT}{P}$ où $r = R/M$ est la constante massique du gaz parfait considéré et M sa masse molaire. On voit donc que le volume massique sera d'autant plus grand que la température sera élevée et la pression faible. C'est le **point 1** qui sera celui où le volume massique sera le plus grand.

15. À l'aide de l'expression du débit massique, on arrive à $V = \frac{\mathcal{D}v^{\text{max}}}{S} = 7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

16. L'énergie cinétique massique maximale est $e_c = \frac{V^2}{2}$. Cette expression permet de situer les variations

possibles de l'énergie cinétique : $\Delta e_c \simeq 25 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Comme pour l'énergie potentielle de pesanteur, on peut largement négliger les variations d'énergie cinétique.

17. Le travail coûteux est celui dépensé pour faire fonctionner le compresseur. Comme la transformation est adiabatique $q = 0$ et compte tenu des approximations que l'on vient de voir, le premier principe en écoulement stationnaire se résume à $\Delta_{12}h = h_2 - h_1 = w_u = w_{comp}$. Pour l'énergie utile, c'est le transfert thermique dans l'évaporateur. Celui-ci ne comporte pas de pièces mobiles susceptibles de transférer du travail utile $w_u = 0$, on a donc $\Delta_{41}h = h_1 - h_4 = q_f$. On en conclut donc que : $e_f = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}$.

18. Avec les valeurs numériques du tableau, on trouve : $e_f = \frac{408 - 242}{444 - 408} = 4,6$.

19. La puissance thermique extraite de la source froide est $\mathcal{P}'_{th} = \mathcal{D}\Delta_{14}h$. On trouve : $\mathcal{P}'_{th} = 1,7 \text{ kW}$. La puissance du compresseur est $\mathcal{P} = \mathcal{D}\Delta_{12}h$. On trouve : $\mathcal{P} = 440 \text{ W}$.

20. La vapeur est surchauffée après son évaporation pour être sûr qu'il ne reste pas de liquide car cela pourrait à la longue endommager le compresseur.

21. Le sous-refroidissement est réalisé pour qu'il ne reste pas de vapeur. Cela n'est pas possible de descendre à une température inférieure à celle de la source chaude qui est l'air de la cuisine communément 20°C .

C. Association réfrigérateur-congélateur

22. Pour placer le point 1', il faut déterminer la pression de cet état car la température est connue, on se trouve sur l'isotherme 0°C dans le domaine vapeur. Au point 4, on effectue une vaporisation partielle à 0°C . Puis, on effectue une détente isenthalpique qui amène sur le palier de changement d'état à -20°C pour poursuivre la vaporisation du fluide. Cela signifie que le point 4'' se trouve sur l'isobare correspondante à environ 1,3 bar. Comme la suite de l'évolution jusqu'au point 1' est isobare, les coordonnées de ce point sont $(402 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}, 1,3 \text{ bar})$. Il faut encore déterminer les coordonnées des points 4' et 4'' qui possèdent la même enthalpie du fait de la détente isenthalpique qui les sépare. Les puissances transférées sur 44' et 4''1' doivent être identiques. Comme elles sont proportionnelles aux variations d'enthalpie correspondantes, 4' et 4'' doivent se situer au milieu du segment 41' quand on parle d'enthalpie. Comme $h_4 = 242 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et que $h_{1'} = 402 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, on trouve que $h_{4'} = h_{4''} = 322 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Le point 4' se situe donc à $322 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et 3,0 bar, le point 4'' à $322 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et 1,3 bar.

23. Pour la représentation du cycle avec congélateur, on se référera au document-réponses. Pour le tracer de l'étape 1'2', la seule chose que nous savons c'est qu'elle est adiabatique. Sans autre information, on ne pourra que tracer un segment de droite entre ces deux points pour simplifier.

24. Pour répondre à la question, il faut avoir en tête le théorème des moments qui dit, en quelque sorte, que la proportion de vapeur dans le fluide au point 4' est le rapport des segments $\frac{L_{0^\circ\text{C}}4'}{L_{0^\circ\text{C}}V_{0^\circ\text{C}}}$ où $L_{0^\circ\text{C}}$ et $V_{0^\circ\text{C}}$ sont les extrémités du palier de vaporisation à la température de 0°C . Pour le point 4'', c'est le même résultat que l'on exploite à savoir le rapport $\frac{L_{-20^\circ\text{C}}4''}{L_{-20^\circ\text{C}}V_{-20^\circ\text{C}}}$. Il suffit d'observer les segments sur le graphique pour conclure, sans aucune équivoque, que la proportion de vapeur est plus élevée en 4'' qu'en 4'.

25. L'efficacité globale de l'ensemble réfrigérateur-congélateur est fournie par le rapport du transfert thermique total réalisé dans les deux évaporateurs successifs entre 4 et 1' et du travail de compression entre 1' et 2'. On a donc $e_f = \frac{h_{1'} - h_4}{h_{2'} - h_{1'}} = \frac{402 - 242}{63}$. On trouve : $e_f = 2,5$.

D. Utilisation d'un réfrigérateur

Évaluation des fuites thermiques

26. λ est positif. En effet, $T_c > T$, le réfrigérateur reçoit de l'énergie par transfert thermique depuis l'air de la cuisine malgré le fait que les parois du réfrigérateur soient bien calorifugées.

27. On applique le premier principe de la Thermodynamique à l'intérieur du réfrigérateur qui ne fait que recevoir du transfert thermique par les parois. On a donc $C \frac{dT}{dt} = \lambda(T_c - T)$ que l'on écrira de façon plus traditionnelle $C \frac{dT}{dt} + \lambda T = \lambda T_c$. On peut poser $\tau = \frac{C}{\lambda}$ le temps caractéristique de l'évolution de la température intérieure du réfrigérateur lorsque celui-ci est débranché.

28. La forme de la solution de la température est $T(t) = T_c + A' \exp -\frac{t}{\tau}$. En utilisant la condition initiale $T = T_f$ à la date $t = 0$, on trouve rapidement $T(t) = T_c - (T_c - T_f) \exp -\frac{t}{\tau}$.

29. T_c est l'asymptote de la courbe $T(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. On lit $T_c = 293 \text{ K} = 20^\circ\text{C}$. Pour la température de

départ, on lit $T_f = 277 \text{ K} = 4 \text{ °C}$ à la date $t = 0$ ce qui est la valeur attendue pour l'intérieur d'un réfrigérateur en fonctionnement permanent.

30. Si l'on trace la tangente à la courbe $T(t)$ à la date $t = 0$, on trouve approximativement $\tau = 12 \text{ h}$ puisque le point d'intersection avec l'asymptote de cette tangente possède une abscisse à la date $t = \tau$. On en déduit $\lambda = \frac{C}{\tau}$. On trouve $\lambda = 6,9 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$. On notera que λ possède la dimension d'une conduction thermique ce qui n'est pas surprenant au vu de la définition que l'on a proposé des fuites thermiques.

Fonctionnement en régime stationnaire

31. Avec l'hypothèse de l'énoncé, on a $e_{f,\text{réelle}} = K \frac{T_f}{T_c - T_f} = 4,3$.

32. En régime permanent, la puissance P_{th} des fuites est donnée par : $P_{th} = \lambda(T_c - T_f) = 110 \text{ W}$.

33. Pour que l'on reste en régime permanent, il faut que la puissance prélevée à la source froide soit égale à celle des fuites que nous venons de calculer. Or, par définition de l'efficacité du réfrigérateur, on a $e_f = \frac{P_{\text{froide}}}{P_c} = \frac{P_{th}}{P_c}$.

On en déduit que $P_c = \frac{P_{th}}{e_f} = 26 \text{ W}$.

Mise en route du réfrigérateur

34. On applique le premier principe de la Thermodynamique à l'intérieur du réfrigérateur en comptant 2 transferts thermiques : les fuites à travers la paroi $\lambda(T_c - T)$ et le prélèvement d'énergie au niveau de la source froide qu'il faut exprimer. À une date t quelconque, l'intérieur du réfrigérateur se trouve à une température $T_f \leq T(t) \leq T_c$. À cette date, l'efficacité de la machine ditherme est $e_f(t) = K \frac{T}{T_c - T}$. La puissance prélevée au niveau de l'évaporateur est donc $\frac{P_c}{e_f(t)} = \frac{P_c K (T_c - T)}{T}$. La température obéit donc à l'équation différentielle

$C \frac{dT}{dt} = \lambda(T_c - T) - \frac{P_c K (T_c - T)}{T}$. On peut identifier les constantes recherchées : $A = \frac{K P_c}{C}$ et aussi $B = \frac{\lambda}{C} = \frac{1}{\tau}$.

Numériquement, on trouve $A = 2,2 \times 10^{-5} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$ et $B = 2,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

35. En négligeant, dans l'équation différentielle précédente, les fuites thermiques à travers la paroi du réfrigérateur, on obtient l'équation différentielle $\frac{dT}{dt} = -A \frac{T}{T_c - T}$. En séparant les variables, on arrive à $(\frac{T_c}{T} - 1) dT = -A dt$. On peut intégrer chaque membre pour obtenir $T_c \ln T - T = -At + \alpha$ où α est une constante d'intégration que l'on détermine avec la condition initiale $T = T_c$ à la date $t = 0$. On a donc $\alpha = T_c \ln T_c - T_c$. On peut donc écrire la relation demandée : $T_c \ln \frac{T_c}{T} + T - T_c = At$.

36. On a $t_f = \frac{1}{A} (T_c \ln \frac{T_c}{T_f} + T_f - T_c)$. On trouve $t_f \simeq 5 \text{ h } 45 \text{ min}$. Cette durée est deux fois plus courte que la durée τ caractéristique de l'évolution de la température en présence des pertes puisque l'on avait trouvé que $\tau \simeq 12 \text{ h}$. Au début de l'évolution de $T(t)$ lorsque $T(t)$ n'est pas encore très éloignée de T_c , on a une très forte efficacité. Comme P_c est supposée constante, le transfert thermique avec la source froide sera donc très important, il est tout à fait légitime de négliger les pertes. Évidemment, cela n'est plus vrai lorsque $T(t)$ s'approche de T_f car, à ce moment-là, l'objectif est que les pertes thermiques soient compensées par le transfert thermique avec l'évaporateur.