

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°5 du 09-01-2025

— Durée : 4 heures —

Problème n° 1 – Glissement dans un bol

Adapté Oral 2023

On considère un bol assimilé à un hémisphère de rayon intérieur a . Dans ce bol, on étudie le mouvement de glissement d'un point matériel M de masse m sur la surface intérieure du bol sachant que le coefficient de frottement entre M et le bol est f . On considère que le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique sont tous deux égaux à f . Pour les applications numériques, on prendra $f = 0,2$. Le bol est posé sur une table parfaitement horizontale. Il reste immobile sur cette table quel que soit le mouvement de M . La table constitue un référentiel galiléen. Voir le schéma de la figure 1. On repère la position de M par la donnée de l'angle θ défini sur la figure 1. On lâche la masse m depuis une position repérée par l'angle θ_0 , le mouvement se déroulera donc dans un plan vertical. On négligera les frottements fluides avec l'air.

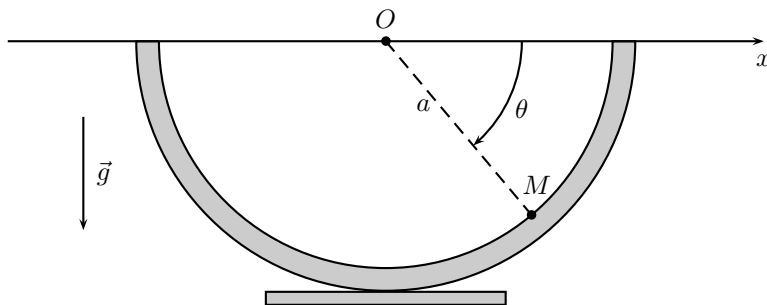


FIGURE 1 – Glissement de la masse m dans le bol

1. Montrer que si l'angle θ_0 est supérieur à un certain angle limite θ_{lim} que l'on caractérisera, alors la masse m ne glisse pas. On ne s'intéressera qu'aux angles inférieurs à $\pi/2$. Déterminer numériquement θ_{lim} .

On se place dorénavant dans le cas où $\theta_0 < \theta_{\text{lim}}$.

2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ dans le cadre du glissement. On posera $\omega_0^2 = g/a$ pour faire apparaître une pulsation caractéristique du mouvement.

3. Pour résoudre cette équation différentielle, on suggère de poser $\psi = \dot{\theta}^2$. Montrer qu'alors, l'équation du mouvement est :

$$\frac{d\psi}{d\theta} + 2f\psi = 2\omega_0^2(\cos\theta - f\sin\theta)$$

4. On pose maintenant $\varphi = \psi/\omega_0^2$. Définir, à plusieurs constantes d'intégrations près, la forme de la solution $\varphi(\theta)$.

On souhaite faire une résolution numérique de ce problème grâce à un programme *Python*. On note T la norme de la composante tangentielle de la force de contact, N la norme de la composante normale. On note aussi E_m l'énergie mécanique de la masse m . Pour éviter de travailler avec des grandeurs dimensionnées, on pose :

$$\begin{cases} t_r = \omega_0 t \\ \eta = \frac{N}{mg} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{T}{mg} \\ e_m = \frac{E_m}{mga} \end{cases}$$

où t_r est un temps adimensionné ou temps réduit, η et τ les forces de contact réduites et e_m l'énergie mécanique réduite.

5. Montrer que, dans une situation de glissement, l'équation différentielle du mouvement devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt_r^2} + f \left(\frac{d\theta}{dt_r} \right)^2 = \cos\theta - f\sin\theta$$

6. Donner les expressions de η , τ et e_m en fonction de θ et $\frac{d\theta}{dt_r}$ toujours dans le cadre du glissement.

On passe à l'étude numérique du problème en se basant sur les grandeurs adimensionnées ou réduites.

On écrit un programme *Python* pour obtenir les courbes d'évolution de θ , $\frac{d\theta}{dt_r}$, e_m , η et τ .

```

from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Conditions initiales
theta0=10*np.pi/180
y0=[theta0,0]
# Précision du 0 pour éviter des problèmes de non arrêt du programme
epsilon=1e-7
# Paramètre
f=0.2
# Expression des frottements solides
def T(theta, dtheta):
    if abs(dtheta) < epsilon:
        if abs(np.cos(theta))< ??? :
            return ???
        elif dtheta>0:
            return ???
        else:
            return ???
    elif ???
        return ???
    else:
        return ???
# Fonction qui calcule les valeurs des dérivées
def syst(t,y):
    theta=y[0]
    dtheta=y[1]
    d2theta=np.cos(y[0])-T(theta, dtheta)
    return [dtheta,d2theta]
# Temps (ici le temps correspond à  $t_r$ )
ti=0
tf=10
t=np.linspace(ti,tf,1001)
# Résolution de l'équation différentielle
sol=solve_ivp(syst, [ti,tf], y0,method='RK45', t_eval=t)
# Récupération des solutions
theta=sol.y[0,:]
thetapoint=sol.y[1,:]
# Conversion en degrés de l'angle theta
thetadeg=???
```

Les lignes de code permettant d'effectuer les tracés des graphiques ne sont pas fournies.

7. Compléter les lignes du programme qui font apparaître ???.

8. À la figure 2, on donne les courbes représentant θ , $\frac{d\theta}{dt_r}$, e_m , η et τ . Quels commentaires pouvez-vous faire à partir de l'ensemble de ces courbes ?

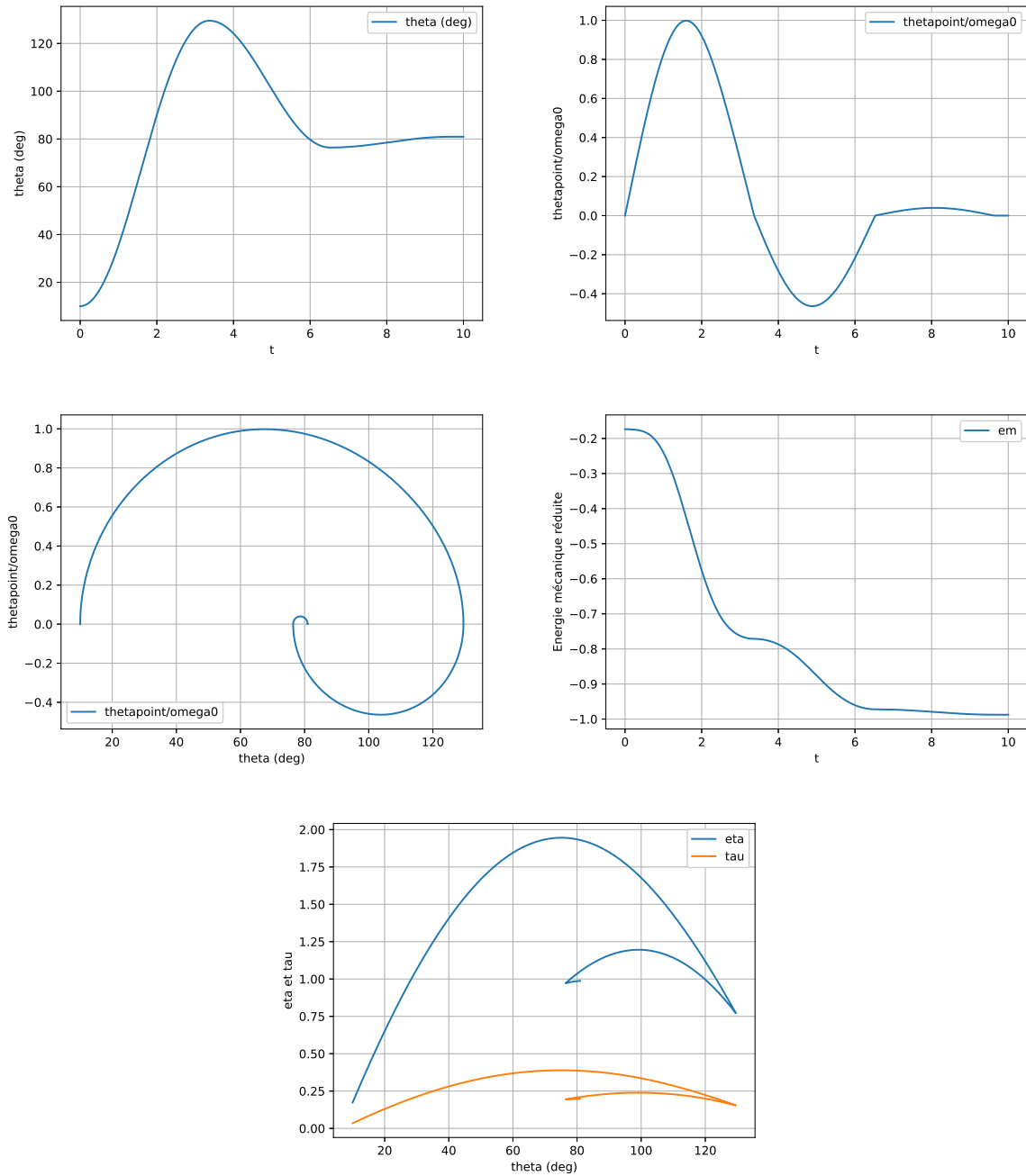


FIGURE 2 – Évolutions de θ , $\frac{d\theta}{dt_r}$, e_m , η , τ

9. On effectue une seconde simulation numérique en modifiant une condition initiale. À la lumière des informations de la figure 3, indiquer quelle a été la condition initiale modifiée et comment elle a été modifiée ? Toujours en utilisant les graphiques proposés, quels commentaires pouvez-vous faire ?

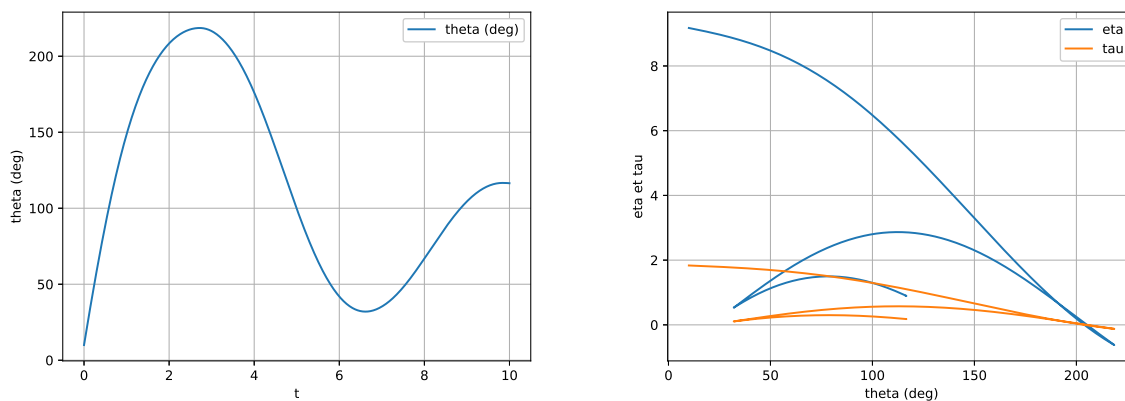


FIGURE 3 – Évolutions de θ , η , τ lors de la seconde simulation

Problème n° 2 – Ralentissements et freinages

X MP 2015

A. Marées et synchronisations d'oscillateurs

Les forces gravitationnelles s'exerçant entre deux corps célestes en mouvement sont à l'origine d'effets de marée, analogues aux marées océaniques : les effets inertiels et les forces de gravitation s'exerçant sur un corps sont variables d'un point à un autre et la force de marée est le bilan des écarts entre ces différentes forces. Dans cette étude, on négligera, en raison de leur faible importance, les effets inertiels associés aux rotations propres des divers corps. Un objet - par exemple la Lune - réputé homogène, sphérique, de masse $2m$, de centre O et de rayon R_L est en orbite circulaire de rayon $d \gg R_L$ autour d'un objet ponctuel (T) - par exemple la Terre - réputé fixe et de masse M . Pour simplifier l'étude, le satellite (figure 4a) est décomposé par la pensée en deux hémisphères identiques (figure 4b), modélisés chacun par son centre de masse, situé sur l'axe de l'hémisphère à la distance $b = \frac{3}{8}R_L$ de O et portant la masse m . Le système Terre - Lune sera considéré comme isolé ; par symétrie, il pourra être traité comme un système plan. Le référentiel d'étude de la figure 4c, Oxy , est en translation circulaire autour de (T) : les axes gardent des directions fixes par rapport aux étoiles lointaines et la vitesse angulaire de révolution Ω_r est constante, $\Omega_r = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$.

Quelques symboles et données numériques relatifs à la première partie

Symbole et valeur	Sens et occurrence
$d = 360 \times 10^6 \text{ m}$	Distance Terre-Lune
$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	Constante de gravitation
$M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$	Masse de la Terre
$2m = \frac{M}{81}$	Masse de la Lune
$R_L = 1750 \times 10^3 \text{ m}$	Rayon de la Lune
$R = 6400 \times 10^3 \text{ m}$	Rayon de la Terre

Étude qualitative

Cas statique

1. La force totale subie par le satellite est développable en série de R_L ; le terme d'ordre zéro correspond au modèle ponctuel : masse $2m$ localisée en O . Les termes suivants correspondent aux effets de marée. La configuration initiale étant représentée à la figure 4(c), déterminer, au premier ordre en b/d , l'expression de la force subie par G_1 de la part de la Terre.

2. En considérant les forces gravitationnelles subies par G_1 , montrer qu'il existe une limite d_m à d , en deçà de laquelle le satellite se brise (limite de Roche).

3. Calculer d_m pour le système Terre-Lune. Le résultat pourrait-il inciter à penser que la Lune s'est détachée de la Terre, ou au contraire montrer que cette hypothèse est peu plausible ?

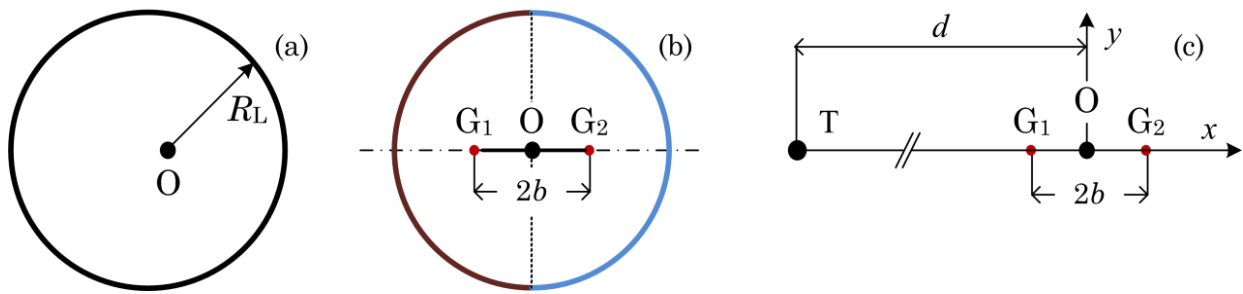


FIGURE 4 – Le satellite en (a) est modélisé en (b) par deux points massifs situés aux centres de masse respectifs, G_1 et G_2 , de deux hémisphères. La situation initiale est représentée en (c).

Déformation de la planète pendant sa révolution

Le satellite est constitué d'un noyau rigide entouré d'un manteau déformable qui peut glisser avec frottement sur ce noyau. Un point P de la surface du satellite, de masse m_0 , est repéré dans le plan Oxy par $OP = r$ (figure 5).

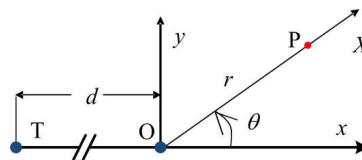


FIGURE 5 – Notations pour l'effet de marée ; seuls les centres des planètes ont été représentés.

4. Montrer que, au premier ordre en r/d , la force de marée en P , appelée force de marée interne, s'exprime par $\vec{F} = \frac{GMm'}{d^3}(2r \cos \theta \vec{e}_x - r \sin \theta \vec{e}_y)$ sont les vecteurs unitaires portés respectivement par Ox et Oy .

5. Indiquer sur un schéma le sens des forces de marée en P et en P_0 , diamétralement opposé à P . On notera \vec{e}_r le vecteur unitaire porté par OP . Expliquer l'apparition d'un bourrelet à la surface du satellite et déterminer qualitativement la forme d'équilibre du satellite à deux instants différents de la révolution orbitale. Quelle est la conséquence de cette déformation sur son mouvement ?

Synchronisation des périodes

Considérations énergétiques

6. Si l'orbite lunaire était circulaire avec son axe de rotation perpendiculaire au plan de révolution, on observerait de la Terre, à la même heure, toujours la même surface lunaire ; en réalité, 59% de la surface de la Lune peut être observée depuis la Terre. Comment cela se peut-il ?

Le centre de masse du système isolé Terre - Lune est noté G ; on note $\mu = \frac{2Mm}{M+2m}$ sa masse réduite et l'on rappelle la relation $MGT^2 + 2mGO^2 = \mu d^2$. On conviendra que, dans le référentiel galiléen barycentrique, la planète et le satellite décrivent des cercles centrés sur G , avec la même vitesse angulaire $\Omega(t)$. La période de rotation propre de la Terre est d'environ 86 400 s ; la vitesse angulaire correspondante est notée $\omega(t)$; la période de rotation de la Lune est de vingt-sept jours, on note $\Omega(t)$ la vitesse angulaire correspondante : les vitesses angulaires de rotation et de révolution de la Lune sont, à chaque instant, quasiment identiques ; on admet que les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ sont colinéaires et de même sens (voir figure 6) sont colinéaires et de même sens (voir figure 6) ; la grandeur d peut elle aussi dépendre du temps.

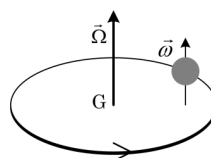


FIGURE 6 – Schématisations de la rotation et de la révolution de la Terre

7. Établir l'expression de l'énergie cinétique de révolution du système Terre - Lune.

8. Admettant que l'énergie cinétique de rotation d'une boule de rayon r' et de masse m' , en rotation (ω') autour d'un axe de direction fixe passant par son centre, est $E_c = \frac{1}{5}m'r'^2\omega'^2$, montrer que, avec une approximation que l'on précisera, l'énergie cinétique du système Terre-Lune est $E_c \simeq \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2$.

9. Montrer que, avec la même approximation, la norme du moment cinétique barycentrique du système est $\sigma_G \simeq \mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega$. Donner, à l'ordre 0 en b/d , l'énergie mécanique du système.

10. Considérant l'équilibre des forces s'exerçant sur la Terre et sur la Lune, établir la relation liant d , Ω , M et m (on obtient une relation ressemblant à une loi de KÉPLER). En déduire le lien entre les petites variations relatives $\frac{\delta\Omega}{\Omega}$ et $\frac{\delta d}{d}$.

11. Considérant à présent le moment cinétique barycentrique du système isolé Terre - Lune, établir le lien entre les petites variations $\delta\omega$ et δd et en déduire l'expression de $\frac{\delta\omega}{\delta\Omega}$ en fonction de m , M , d et R . La valeur numérique de ce rapport est 35,6.

12. Déduire des considérations précédentes que l'expression de la petite variation d'énergie mécanique associée à une petite variation de $\delta\omega$ est $dE = \frac{2}{5}M(\omega - \Omega)R^2\delta\omega$.

Stabilité du système Terre-Lune

Le frottement associé aux marées dissipe de l'énergie. La Lune s'éloigne de la Terre à raison de 3 à 4 cm par an. L'étude des anneaux de croissance de coraux fossiles montre qu'il y a 500 millions d'années la durée du jour était de 21 heures.

13. Quels sont les signes, aujourd'hui, de $\delta\omega$, $\delta\Omega$ et δd ? Quelle sera la durée du jour dans un siècle?

14. Le résultat calculé à la question précédente est-il en accord avec les données du préambule? L'intervalle de temps séparant deux nouvelles lunes (lunaison) augmente-t-il ou diminue-t-il? Sa variation est-elle plus rapide ou plus lente que celle de la durée du jour?

15. Montrer que la dissipation d'énergie finit par ne plus avoir lieu. Calculer la durée du jour et la distance Terre - Lune au terme du processus de dissipation.

16. Estimer la durée du processus de synchronisation et la comparer à l'âge de l'Univers, soit environ 10^{10} années.

17. Calculer E_{DM} , énergie dissipée par effet de marée entre la période actuelle et la fin du processus. Le Soleil dissipe 4×10^{26} W; combien de secondes lui faudrait-il pour dissiper E_{DM} ?

Problème n° 3 – Un morceau de Scotch[®]

Centrale MP 2017

Conditionné sous forme de rouleau, un ruban adhésif (généralement désigné par le terme Scotch[®]) est constitué de deux couches solidaires l'une de l'autre : une couche molle sur la face interne (celle qui colle) et une couche dure sur la face externe du rouleau (qui paraît néanmoins souple car très fine). L'épaisseur de l'ensemble est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres.

A. Principe de l'essai de pelage

Pour tester les propriétés d'adhésion d'un ruban adhésif, on réalise généralement des essais de *pelage*. Pour cela, on commence par coller le ruban adhésif à tester sur un support rigide. Puis on mesure la force $F_p = \|\vec{F}_p\|$ qu'il est nécessaire d'appliquer à l'extrémité du ruban pour le décoller du support tout en maintenant un angle θ constant entre le support et la portion de ruban décollée, voir les figures 7 et 8.

1. Au niveau microscopique, les interactions qui permettent l'adhésion du ruban sur le support sont des liaisons de VAN DER WAALS. Citer un autre type de liaison chimique et comparer qualitativement l'énergie de liaison de ce type de liaison à celle d'une liaison de VAN DER WAALS.

En première approximation, la force de VAN DER WAALS entre deux molécules distantes de r dérive du potentiel de LENNARD-JONES $E_{LJ}(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}$, où α et β sont deux constantes positives.

2. Identifier, en justifiant la réponse, le caractère attractif ou répulsif de chacun des deux termes figurant dans cette expression.

3. Représenter l'allure de E_{LJ} en fonction de r . Indiquer graphiquement à quoi correspond l'énergie de liaison entre les deux molécules.

4. Justifier qualitativement que le travail W_{adh} que doit fournir l'opérateur pour décoller le ruban adhésif du support est proportionnel à l'aire A de la surface de contact entre le ruban et son support.

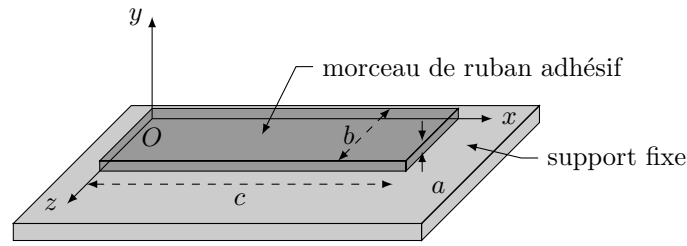
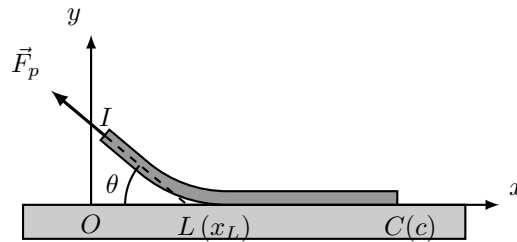


FIGURE 7 – Positionnement du ruban adhésif sur le support avant l'essai de pelage

FIGURE 8 – Schéma de principe et paramétrage de l'essai de pelage; x_L désigne l'abscisse du *front de pelage*

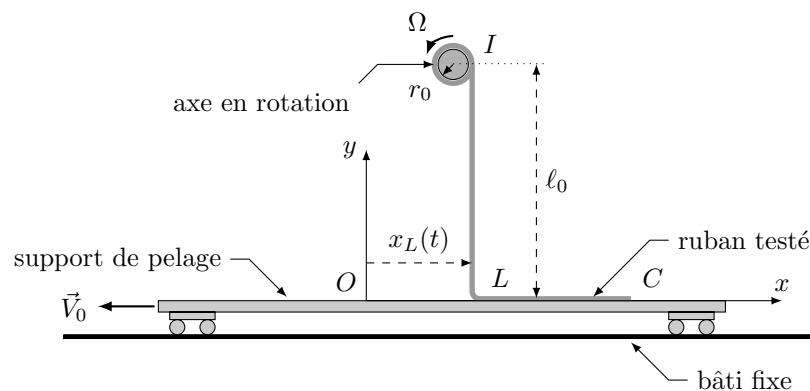
Pour la suite du problème, on note $W_{adh} = \gamma A$, où γ est une constante positive caractéristique du ruban et du support mis en contact.

On considère dans cette question que le décollement se fait de façon quasi-statique et que le ruban est parfaitement inextensible. Le problème étant invariant par translation selon Oz , on raisonne dans le plan Oxy . On rappelle que l'angle θ reste constant au cours de cette opération.

5. Exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_I$ du point I (point d'application de la force \vec{F}_p) lorsque le front de pelage (voir la figure 8) progresse de dx_L , ainsi que le travail δW_p de la force de pelage associé à cette progression.

6. En déduire l'expression de la force de pelage F_p en fonction de γ , b et θ .

Le dispositif utilisé en pratique est représenté sur la figure 9. Le pelage est réalisé au moyen d'une tige horizontale, de rayon r_0 , en rotation autour de son axe, et sur laquelle s'enroule le ruban au cours de l'essai (l'axe de la tige est fixe dans le référentiel du laboratoire et situé à une hauteur ℓ_0 au-dessus du support). Le support sur lequel est collé l'autre extrémité du ruban est animé d'un mouvement de translation horizontale à la vitesse constante \vec{V}_0 dans le référentiel du laboratoire.

FIGURE 9 – Schéma du dispositif pratique utilisé pour l'essai de pelage. Le repère Oxy est lié au support de pelage. Les points I et L correspondent aux limites entre les parties collée et décollée du ruban.

7. Le repère Oxy étant lié au support, quelle loi d'évolution $x_L(t)$ devrait-on observer si l'angle θ reste

constant ?

8. On rappelle que le ruban est supposé inextensible. Comment doit-on choisir Ω et $\|\vec{V}_0\|$ pour maintenir un angle de pelage constant au cours de l'essai ?

9. Initialement, le ruban est positionné de sorte à avoir un angle de pelage $\theta \approx 90^\circ$. Commenter ce choix.

B. Modélisation du comportement dynamique du ruban au cours de l'essai

La loi d'évolution de $x_L(t)$ prévue précédemment n'est pas toujours observée en pratique car le ruban présente un comportement légèrement élastique. Au début de l'essai, le ruban commence en effet par se tendre sans se décoller. Puis, lorsque la tension est suffisante, le décollement se produit brutalement, réduisant par conséquent la tension. Le décollement s'arrête alors spontanément, jusqu'à ce que la poursuite du mouvement tende suffisamment le ruban pour que le décollement reprenne, et ainsi de suite... Ce phénomène périodique, connu sous le nom de *stick-slip* (ou *collé-glissé*), est à l'origine du bruit caractéristique du décollement d'un ruban adhésif : *scriiich*.

Dans le référentiel \mathcal{R} lié au support de pelage, la dynamique du front de pelage s'apparente à celle du système masse-ressort représenté sur la figure 10. La portion de ruban au contact du support est modélisée par la masse m tandis que la portion décollée du ruban est modélisée par le ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et dont l'extrémité I est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{V}_p = -\vec{V}_0$. L'action du support sur le ruban est modélisée par une force de frottement $\vec{f} = f \vec{u}_x$ obéissant aux lois suivantes :

- la masse m ne glisse pas sur le support tant que $\|\vec{f}\| < F_p$;
- lorsque la masse m glisse sur le support, la force \vec{f} s'oppose au glissement et $\|\vec{f}\| = (1 - \varepsilon) F_p$ (avec ε une constante telle que $0 < \varepsilon < 1$).

On néglige l'action de la pesanteur sur l'évolution du système.

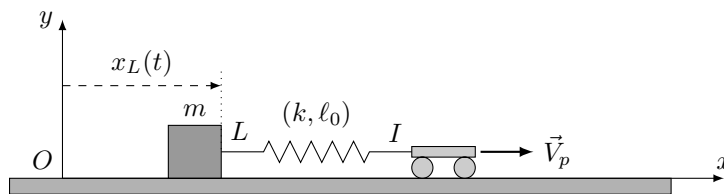


FIGURE 10 – Système modèle pour l'étude du mouvement stick-slip

10. Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ lié au support de pelage peut-il être considéré comme galiléen ?

11. À l'instant $t = 0$, on a $x_L(0) = 0$ et $\ell(0) = \ell_0$. Exprimer la longueur $\ell(t)$ du ressort pour $t > 0$, en fonction de ℓ_0 , $V_p = \|\vec{V}_p\|$, $x_L(t)$ et t .

12. On suppose de plus que $\dot{x}_L(0) = 0$. Montrer que l'évolution du système pour $t > 0$ commence nécessairement par une phase de *stick* (le ruban se tend sans se décoller). Déterminer à quel instant t_0 se termine cette phase.

13. Établir l'équation du mouvement de la masse m lors de la phase suivante (phase de *slip*). Identifier la pulsation propre ω_0 du système.

14. La solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$x_L(t') = C_1 \cos(\omega_0 t') + C_2 \sin(\omega_0 t') + V_p t' + C_3 \quad \text{avec } t' = t - t_0$$

Déterminer les expressions des constantes C_1 , C_2 et C_3 correspondant à cette phase du mouvement.

Une simulation numérique permet de représenter l'évolution de la solution *mathématique* $x_L(t')$ précédente pour différentes valeurs de la vitesse de pelage V_p . Les paramètres choisis pour réaliser cette simulation sont :

$$\varepsilon = 0,15 \quad \frac{F_p}{k} = 1,0 \text{ mm} \quad \omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les courbes correspondant à $V_p = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_p = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sont reproduites sur les figures 11 et 12 du document-réponse. Ces courbes sont accompagnées des portraits de phase du système, pour lesquels on représente $v_L(t') = \frac{dx_L}{dt'}(t')$ en fonction de $\ell(t') - \ell_0$.

15. Faire apparaître, sur chacun des deux portraits de phase du document-réponse, le point représentatif de l'instant $t' = 0$. Indiquer, en le justifiant, quel est le sens de parcours de ces portraits de phase.

16. En justifiant votre raisonnement par des *considérations graphiques précises*, indiquer, pour chacune des deux vitesses de pelage, si la phase de *slip* perdure indéfiniment ou si elle cesse à un instant t'_1 que l'on identifiera clairement sur les courbes.

17. Dans le(s) cas où la phase de *slip* cesse, représenter (directement sur les figures 11 et 12 du document réponse) l'allure de la solution *physique* $x_L(t')$ réellement obtenue et du portrait de phase associé.

DOCUMENT – RÉPONSE

Nom :

Prénom :

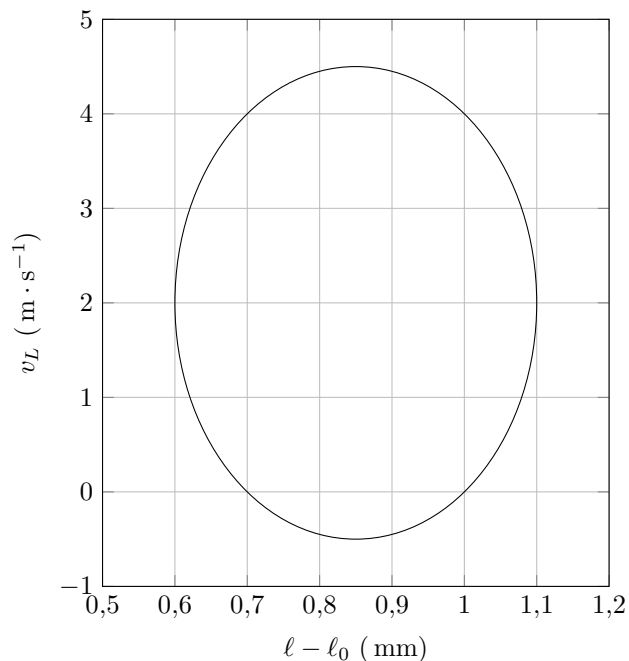
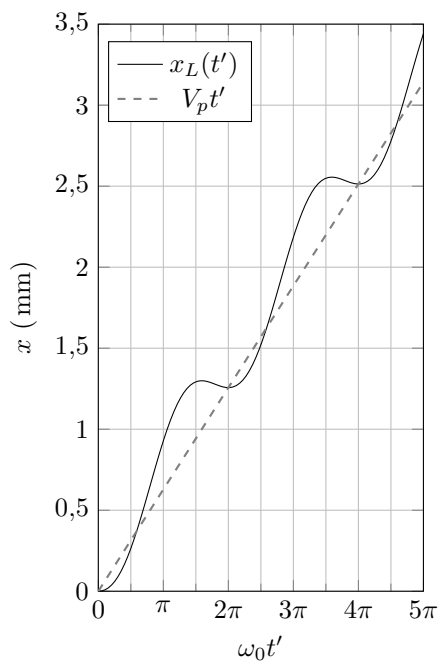


FIGURE 11 – Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

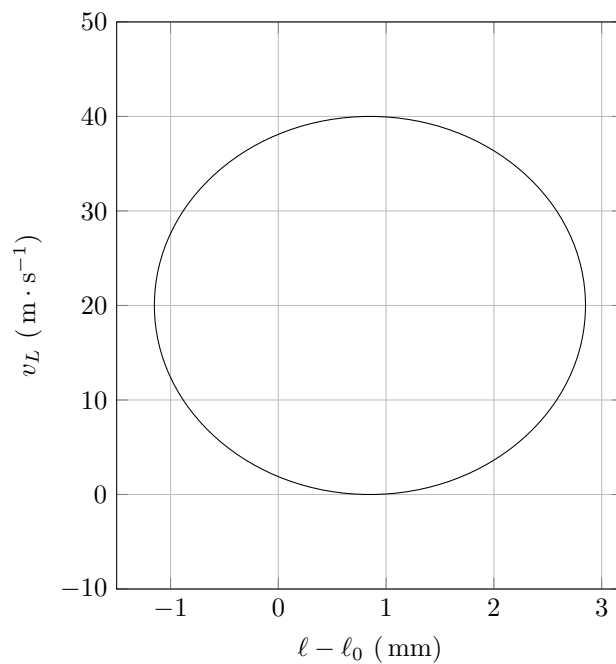
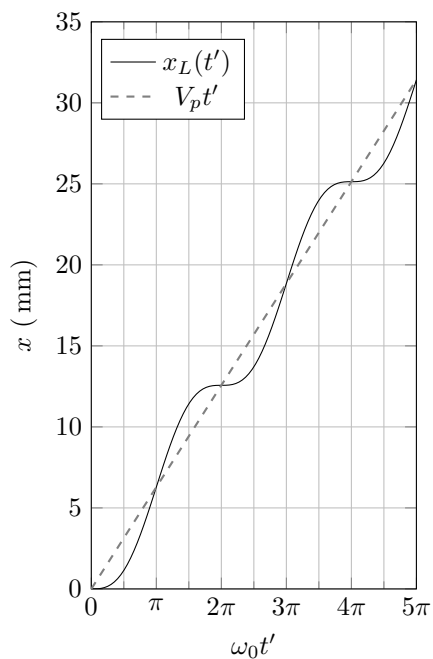


FIGURE 12 – Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.