

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°7 du 06-03-2025

— Durée : 4 heures —

Calculatrice interdite

Problème n° 1 – Couleur de la Lune totalement éclip­sée Mines MP 2020

Les phénomènes naturels terrestres ou célestes ont nourri, au fil des âges, les cultures des civilisations anciennes et contribué à forger leur vision du monde. Les exemples astronomiques sont nombreux. Il n'est pas rare de trouver, par exemple, des bâtiments orientés selon les directions astronomiques des levers et couchers du Soleil ou de Vénus, astres qui furent souvent associés à des divinités importantes. Dans ce problème, on se propose d'étudier un phénomène physique auquel les Mayas, civilisation précolombienne d'Amérique centrale, ont été confrontés.

Lorsqu'une éclipse de Lune se produit, cet astre, majeur pour les Mayas, change d'aspect durant plusieurs heures. Dans une société où le mécanisme précis d'une éclipse est méconnu, l'interprétation et la signification du phénomène se réfère souvent, sinon toujours, à une origine mythologique ou religieuse. C'est en particulier le cas de la couleur évocatrice prise par la Lune lorsqu'elle se trouve totalement immergée dans l'ombre de la Terre, couleur dont l'analyse fait l'objet de ce problème. Des données numériques figurent à la fin du sujet.

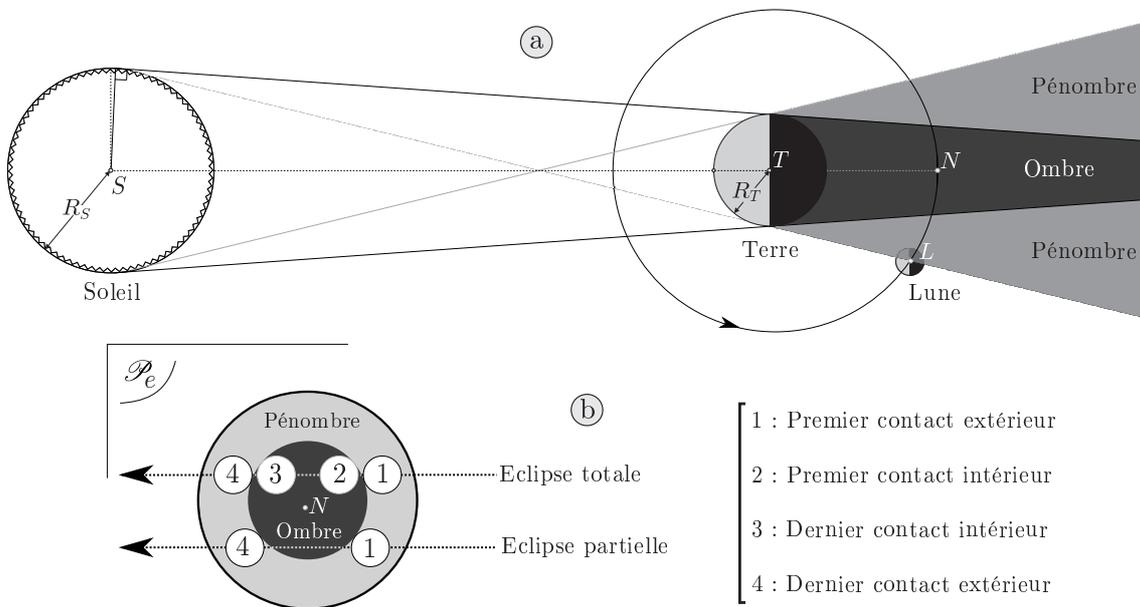


FIGURE 1 – Chronologie d'une éclipse de Lune : a) Phénomène général ; b) Vision depuis la Terre de l'évolution dans une section droite du cône d'ombre terrestre au niveau de l'orbite lunaire. Les disques blancs contenant un chiffre représentent le disque lunaire dans l'étape repérée par ce chiffre.

Une éclipse se produit lorsque la Lune entre dans le cône d'ombre de la Terre (figure 1a). On note N le point situé sur l'axe ST de symétrie de révolution du cône d'ombre terrestre (S centre du Soleil et T centre de la Terre) à la distance $r_L = TL$ de T (L centre de la Lune) à l'opposé du Soleil (figure 1a). Dans un plan frontal \mathcal{P}_e orthogonal à ST , et placé en N , l'éclipse suit la chronologie indiquée sur la figure 1b. On note respectivement R_S , R_T et R_L les rayons solaire, terrestre et lunaire.

Des considérations de géométrie élémentaire montrent que dans le plan \mathcal{P}_e , la Lune tient plus de deux fois dans le cône d'ombre de la Terre. Pourtant, durant la totalité (entre le premier contact intérieur et le dernier contact intérieur), c'est-à-dire lorsque la Lune est entièrement plongée dans l'ombre de la Terre, elle est nettement visible dans le ciel !

A. Sources de lumière éclairant la Lune

La photographie reproduite sur la figure 2 a été prise, depuis Toulouse, lors de l'éclipse totale de Lune du 28 septembre 2015. La direction du zénith (sens de la verticale ascendante) est indiquée sur la figure.

Eclipse de Lune du 28 septembre 2015



FIGURE 2 – Éclipse de Lune.

1. Situer la photographie de la figure 2 dans la chronologie de la figure 1b.

On suppose désormais que la Lune est totalement immergée dans l'ombre de la Terre (éclipse totale) et que son centre L occupe le point N de son orbite.

Imaginons, pour commencer l'analyse, que la Terre soit dépourvue d'atmosphère.

2. Proposer un ordre de grandeur de l'angle θ_d caractéristique de la diffraction de la lumière solaire par la Terre, en admettant que cet angle est identique au phénomène de diffraction produit par une ouverture circulaire de même diamètre que la Terre, éclairé par une onde plane de direction ST . En déduire la taille caractéristique a_d de la figure de diffraction dans le plan d'observation \mathcal{P}_e . La diffraction peut-elle éclairer le disque lunaire durant la phase de totalité? Citer, dans le contexte de l'hypothèse envisagée, d'autres sources possibles d'éclairage du disque lunaire.

On tiendra désormais compte de la présence de l'atmosphère terrestre, toutes les autres sources de lumière envisageables étant insuffisantes pour expliquer l'éclairage de la Lune durant la phase de totalité.

B. Modèle d'atmosphère isotherme

On suppose que l'atmosphère terrestre est en équilibre mécanique à une température $T \approx 20^\circ\text{C}$ uniforme et stationnaire. On cherche le profil altimétrique de masse volumique : c'est-à-dire l'expression de la masse volumique ρ_a en fonction de l'altitude Z mesurée depuis un point G de la surface terrestre (figure 3). Le vecteur unitaire \vec{e}_Z sera dirigé dans le sens de la verticale ascendante, et on note $g \approx 9,80\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, l'intensité du champ de pesanteur terrestre. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M_a \approx 29\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. On note $R \approx 8,31\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

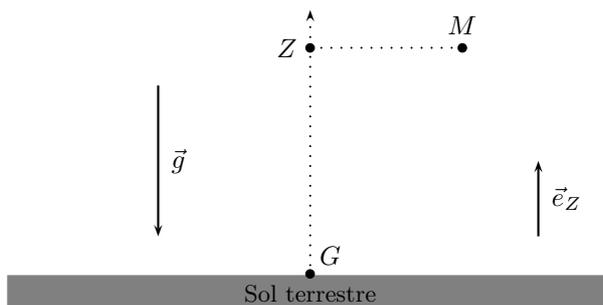


FIGURE 3 – Un point dans l'atmosphère terrestre.

3. Déterminer le profil altimétrique de masse volumique $\rho_a(Z)$ en fonction de $\rho_a(0)$ et d'une hauteur caractéristique H_c que l'on exprimera et dont on calculera la valeur numérique.

4. Évaluer numériquement la masse volumique de l'air au niveau de la mer (pression d'environ 1 bar) puis en déduire celle de l'air au sommet du mont Everest (8 848 m d'altitude) : on indique que $\exp(-1) \approx 1/3$. Les valeurs moyennes annuelles de pression et de température relevées au sommet de l'Everest sont respectivement 321 hPa et -23°C . Le modèle isotherme est-il réaliste?

C. Onde électromagnétique incidente

Une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique, se propage dans le vide illimité le long et dans le sens d'un axe (O, \vec{e}_x) , l'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans lequel on note x, y et z les coordonnées spatiales d'un point de l'espace et t , le temps.

Le champ électrique de l'onde est polarisé rectilignement selon \vec{e}_y . On note $\mu_0 \approx 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide, c la constante d'EINSTEIN (célérité dans le vide des ondes électromagnétiques), $E_m > 0$ l'amplitude du champ électrique, $B_m > 0$ celle du champ magnétique, ω la pulsation de l'onde, $E(x, t)$ la composante du champ électrique et $B(x, t)$, celle du champ magnétique. La phase du champ électrique, à l'origine spatio-temporelle, est nulle.

5. Donner les expressions réelles des champs de vecteur électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} puis exprimer B_m en fonction notamment de E_m . Représenter sur un même graphique, à une date t donnée, l'évolution spatiale du champ électrique ainsi que celle du champ magnétique.

6. Exprimer le vecteur de POYNTING $\vec{R}(x, t)$ en fonction notamment de E_m . Calculer l'ordre de grandeur de E_m pour une onde électromagnétique véhiculant une intensité $I_0 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$.

D. Transfert du rayonnement solaire à travers l'atmosphère terrestre

L'onde électromagnétique précédente se propage désormais dans l'atmosphère terrestre et rencontre sur son trajet, des molécules du gaz atmosphérique, mais aussi, dans la stratosphère (entre 15 et 20 km d'altitude), de fines poussières en suspension (aérosols).

Le gaz atmosphérique a pour effet de diffuser sélectivement l'onde incidente (dépendance fréquentielle), réduisant ainsi la puissance transportée par l'onde. On modélise la diffusion atmosphérique en supposant que chaque molécule rencontrée diffuse, en moyenne temporelle, la puissance \mathcal{P}_a donnée par :

$$\mathcal{P}_a = k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 I$$

où k_a et ω_0 sont des constantes qui caractérisent la composition chimique du gaz atmosphérique et I l'intensité de l'onde électromagnétique. On note $\eta_a(x)$ le nombre de molécules par unité de volume du gaz atmosphérique, x désignant toujours l'abscisse mesurée le long de la direction de propagation.

Les poussières ont pour effet d'absorber non sélectivement (indépendance fréquentielle) l'onde incidente, réduisant aussi la puissance transportée. On modélise l'effet des poussières sur le rayonnement en supposant que chaque poussière rencontrée absorbe, en moyenne temporelle, la puissance \mathcal{P}_p donnée par :

$$\mathcal{P}_p = k_p I$$

où k_p est une constante qui caractérise la composition chimique des poussières. On note $\eta_p(x)$ le nombre de poussières par unité de volume.

7. Exprimer $\eta_a(x)$ en fonction notamment de la masse volumique du gaz atmosphérique $\rho_a(x)$ au point d'abscisse x .

8. Effectuer un bilan unidimensionnel de puissance électromagnétique moyenne pour une tranche d'air limitée par les plans d'abscisse x et $x + dx$; en déduire la relation liant l'intensité $I(x + dx)$ de l'onde en $x + dx$ en fonction notamment de l'intensité $I(x)$ en x : il faudra prendre en compte les deux phénomènes, de diffusion et d'absorption.

9. Montrer qu'il est possible d'écrire $I(x)$ sous la forme suivante :

$$I(x) = I(0) \exp[-d_o(x)]$$

où $d_o(x)$ est un facteur, appelé « densité optique », que l'on exprimera en fonction des quantités intégrales :

$$\int_0^x \eta_a(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad \int_0^x \eta_p(\xi) d\xi$$

E. Réfraction atmosphérique

Lorsqu'un rayon lumineux solaire traverse l'atmosphère terrestre, il subit une réfraction (figure 4).

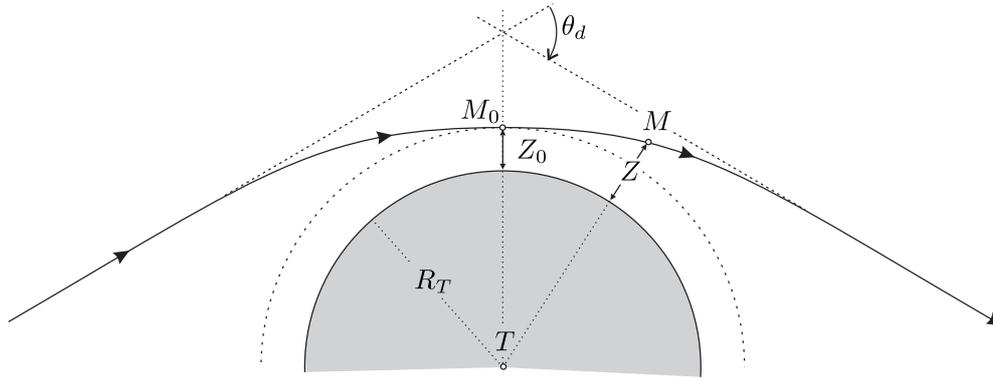


FIGURE 4 – Déviation d'un rayon lumineux par l'atmosphère terrestre.

On note M un point quelconque sur la trajectoire du rayon, et Z , son altitude. On note M_0 le point de la trajectoire le plus proche du sol, et Z_0 son altitude. On pose :

$$r = TM = R_T + Z \quad \text{et} \quad r_0 = TM_0 = R_T + Z_0$$

Pour une longueur d'onde donnée, l'indice de l'air $n(Z)$ dépend de l'altitude, selon la loi de variation suivante :

$$n(Z) = 1 + \varepsilon_\lambda \frac{\rho_a(Z)}{\rho_a(0)} \quad \text{où} \quad \varepsilon_\lambda = a + \left(\frac{\lambda_r}{\lambda}\right)^2, \quad a = 2,8 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad \lambda_r = 0,42 \text{ nm}, \quad \text{on note} \quad n_0 = n(Z_0).$$

L'angle θ_d , de déviation totale du rayon après traversée de l'atmosphère (Fig. 4), est donné par :

$$\theta_d(Z_0, \lambda) \approx 2 \int_1^{n_0} \left\{ \left[\frac{r(n)}{r_0(n_0)} \right]^2 - 1 \right\}^{-1/2} dn$$

10. Pourquoi l'atmosphère terrestre réfracte-t-elle les rayons lumineux qui la traversent ?

11. En tenant compte des ordres de grandeur du problème, précisément $Z \ll R_T$ et $Z_0 \ll R_T$, exprimer $\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}$ en fonction de $u = Z - Z_0$. Exprimer dn en fonction de $d\rho_a$ puis $d\rho_a$ en fonction de $H_c, \rho_a(Z_0), u$ et du .

On donne la valeur de l'intégrale suivante, qui se ramène aisément à l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv = \sqrt{\pi}$$

12. Déduire des expressions obtenues à la question précédente que l'angle de déviation totale, d'un rayon monochromatique passant en M_0 , s'écrit :

$$\theta_d(Z_0, \lambda) \approx \Theta(Z_0)\varepsilon_\lambda$$

où $\Theta(Z_0)$ est une fonction de Z_0 que l'on exprimera en fonction de R_T et H_c et Z_0 . Pour quelle valeur particulière de Z_0 , notée Z_m , la déviation d'un rayon lumineux est-elle maximale ?

13. Exprimer l'écart de déviation $\delta\theta_d$ correspondant à deux rayons incidents passant au même point M_0 (et donc caractérisés par le même Z_0) mais possédant des longueurs d'ondes qui diffèrent de $\delta\lambda$.

La minute d'arc ($1'$), soit le soixantième de degré, vaut environ : $1' \approx 3 \times 10^{-4}$ rad.

En adoptant la valeur numérique réaliste $H_c \approx 7,3$ km du profil atmosphérique de masse volumique, et pour la longueur d'onde $\lambda_m = 504$ nm du maximum d'émission spectrale solaire : $\theta_d(Z_m, \lambda_m) \approx 70'$.

Avec les valeurs $\delta\lambda \approx 350$ nm, $Z_0 = Z_m$ et $\lambda = \lambda_m$, sur l'étendue du domaine visible, l'application numérique donne $|\delta\theta_d| \approx 0,25'$. La dépendance chromatique de la déviation étant négligeable devant l'angle de déviation, on supposera que les rayons sont identiquement déviés, indépendamment de leur longueur d'onde, avec un angle pouvant varier entre $0'$ et $\theta_{d,M} = 70'$.

14. L'angle sous lequel le rayon terrestre est vu depuis N est d'environ $\theta_T \approx 57'$ tandis que celui sous lequel le rayon solaire est vu depuis la Terre vaut environ $\theta_S \approx 16'$. L'atmosphère terrestre est-elle capable de dévier la lumière solaire pour éclairer le point N ? On justifiera quantitativement la réponse en s'appuyant sur un schéma.

F. Prédiction du spectre de la lumière reçue par la Lune

Le spectre de la lumière solaire hors de l'atmosphère terrestre est donné sur la partie gauche de la figure 5 (spectre de référence E-490-00). Le calcul numérique basé sur le modèle qui vient d'être développé permet de tracer, sur la partie droite de la figure 5, l'atténuation $\exp(-d_o)$ en N en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde incidente.

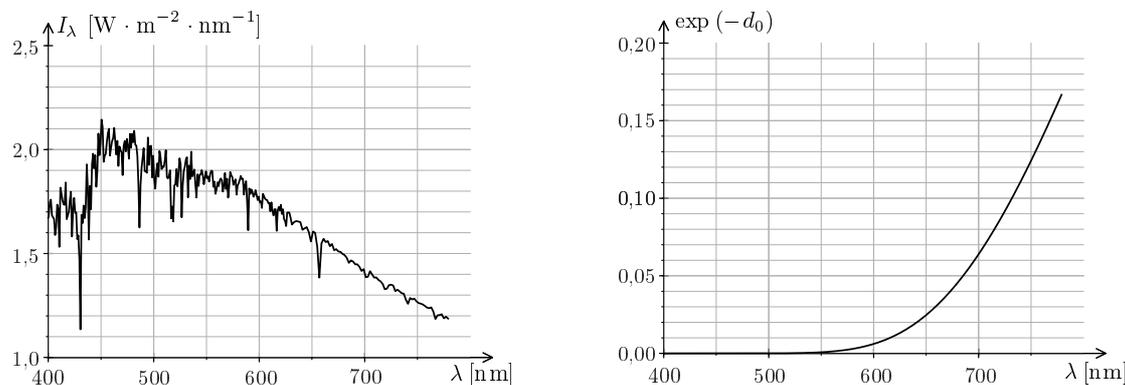


FIGURE 5 – À gauche : Spectre solaire hors de l'atmosphère terrestre. À droite : facteur d'atténuation spectrale $\exp(-d_o)$.

15. À l'aide des deux schémas de la figure 5, déterminer quelques points du spectre de la lumière reçue par la Lune en N et représenter la courbe correspondante. Conclure sur la couleur de la Lune totalement occultée.

Données astronomiques

Constante d'EINSTEIN : $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Distance Terre-Lune (centre à centre) : $r_L = TL \approx 3,84 \times 10^8 \text{ m}$

Rayon du Soleil : $R_S \approx 6,96 \times 10^8 \text{ m}$

Rayon de la Terre : $R_T \approx 6,37 \times 10^6 \text{ m}$

Rayon de la Lune : $R_L \approx 1,74 \times 10^6 \text{ m}$

Problème n° 2 – Freinage par courants de Foucault

ENS Lyon PC 2021

Nous nous intéressons au phénomène de freinage par courants induits. Dans une première partie, nous étudions l'interaction électromécanique entre un aimant et une spire fermée sur elle-même, en mouvement relatif. En seconde partie, la spire est remplacée par un milieu conducteur continu. Les résultats prévus par le modèle développé y sont comparés à ceux issus d'une expérience. Cette partie s'appuie sur des résultats établis en première partie, seuls les éléments indispensables y sont donnés.

Données :

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Conductivité électrique du cuivre : $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Masse de l'aimant (en néodyme) : $m = 4 \text{ g}$

Diamètre de l'aimant : $D = 10 \text{ mm}$

moment magnétique, par unité de volume, du néodyme : $M = B^*/\mu_0$ où $B^* = 1,3 \text{ T}$

Toutes les questions de nature qualitative attendent une réponse argumentée.

A. Interaction électromécanique entre un aimant et une spire

Une spire circulaire de rayon a , de centre O , d'axe (Ox) et de surface orientée par le vecteur unitaire \vec{e}_x , est fermée sur elle-même et maintenue fixe. Le fil de cuivre qui la constitue est de section carrée $e \times e$ ($e \ll a$). Un aimant sphérique, de diamètre D et de masse m , est astreint à se déplacer selon l'axe (Ox) . Vis-à-vis de son comportement magnétique, nous considérons que cet aimant peut être représenté par le moment magnétique permanent $\vec{M} = -M\vec{e}_x$ ($M \geq 0$), supposé conserver toujours la même orientation. La position du centre de l'aimant est repérée par le point A d'abscisse $s = \overline{OA}$ et nous notons $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ($v = \dot{s}$) sa vitesse. À l'instant initial ($t = 0$), son centre se situe au point A_0 d'abscisse s_0 ($s_0 > 0$) et est animé de la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ ($v_0 < 0$). Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ est supposé galiléen. Ce système est illustré sur la figure 6. Le point Q est un point quelconque de l'espace et le point $P = Q(0, a, 0)$ un point de la spire. Nous notons β l'angle situant angulairement le plan (O, A, Q) par rapport à l'axe (Oy) (cet angle n'est pas représenté sur la figure). Enfin, l'effet de la gravité ne sera jamais pris en compte et nous négligerons toute influence de l'air sur le mouvement de l'aimant. Nous notons R la résistance de la spire et L son inductance mais nous considérerons que son comportement électrique reste dominé par l'effet résistif (hypothèse H_R).

Analyse qualitative de l'interaction

Il s'agit ici d'analyser qualitativement le comportement électromécanique de ce système. Toutes les questions de cette sous-section devront alors être entendues dans ce sens.

1. Reproduire la spire et l'aimant représentés sur la figure 6 mais vus dans le plan (O, x, y) et non plus en perspective. Tracer l'allure de quelques lignes du champ magnétique \vec{B}_a créé par l'aimant.

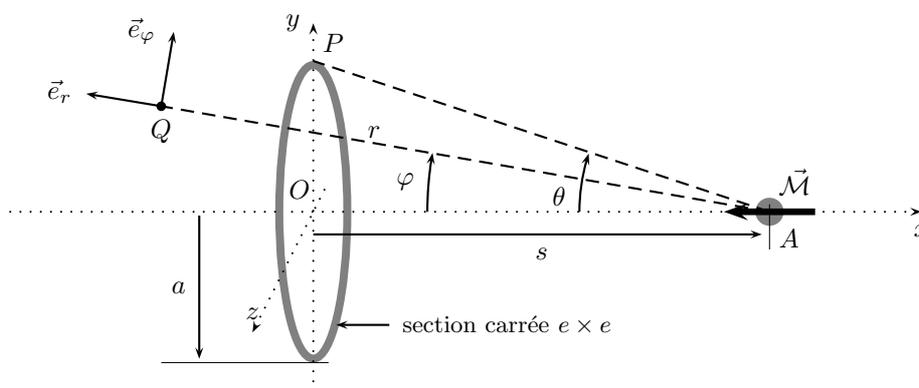


FIGURE 6 – Spire $((O, \vec{e}_x), ae \times e)$ et aimant $(A(s), m, \vec{M}, v\vec{e}_x)$ en interaction électromécanique. Ce système présente une symétrie cylindrique autour de l'axe (Ox) .

2. Nous nous plaçons dans la situation où $s > 0$ et $v < 0$. Indiquer, sur la figure tracée précédemment, le sens du courant i qui apparaît dans la spire. On le représentera au point P en utilisant les symboles \odot ou \otimes pour indiquer qu'il est respectivement sortant ou entrant dans le plan (O, x, y) . Avec l'orientation adoptée

de la surface de la spire, indiquer si ce courant est conventionnellement positif ou négatif. On détaillera le raisonnement tenu.

3. Toujours sur la même figure, représenter la force alors subie par une portion élémentaire de spire autour du point P . Préciser quelles sont toutes les conséquences mécaniques de cette force.

Nous supposons que l'aimant parvient à franchir le point O et poursuivre sa trajectoire dans le domaine des abscisses négatives. Par ailleurs, nous considérons que, dans la situation initiale, l'interaction entre la spire et l'aimant est négligeable.

4. Représenter l'allure graphique de l'évolution temporelle du courant i . On adoptera la convention de signe évoquée dans la question **2.**.

5. Représenter, en correspondance avec le tracé précédent, l'évolution temporelle de la force axiale (composante $F_{a/s}$) que l'aimant fait subir à la spire.

6. Représenter, en correspondance avec les deux tracés précédents, l'évolution temporelle de la vitesse v .

7. Indiquer comment serait modifiée chacune de ces évolutions si le moment magnétique de l'aimant était orienté selon $+\vec{e}_x$, toutes choses égales par ailleurs.

8. Analyser ce système d'un point de vue énergétique.

Étude analytique de l'interaction

Le champ magnétique \vec{B}_a produit par l'aimant en un point Q de l'espace s'exprime :

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ 3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}} \right\}$$

La distance $r = \|\vec{AQ}\|$ et le vecteur unitaire \vec{e}_r sont définis sur la figure 6.

9. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_a(Q)$ en fonction de B^* , D , r , de l'angle φ et des vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_r .

10. Exprimer le flux $\phi_{a/s} = \phi_{a/s}(s)$ du champ magnétique créé par l'aimant à travers la spire (on veillera à respecter les conventions de signe usuelles). L'écrire sous la forme :

$$\phi_{a/s}(s) = \phi_0 F(X) \quad \text{où} \quad X = s/a \quad \text{et} \quad F(0) = 1$$

On explicitera la fonction F et exprimera la constante ϕ_0 en fonction de B^* , D et a .

La façon de conduire ce calcul est laissée libre. Il faudra alors en présenter chacune de ses orientations et étapes.

11. Préciser à quelle condition, portant sur la résistance R et l'inductance L de la spire, ainsi que sur le temps caractéristique τ_i de variation du courant, l'hypothèse H_R adoptée dans la partie introductive est justifiée.

12. Établir que le courant i est lié à la position et la vitesse de l'aimant selon la relation :

$$i = K_1 \frac{X \dot{X}}{(1 + X^2)^{5/2}} \quad \text{où} \quad \dot{X} = \frac{dX}{dt}$$

On exprimera la constante K_1 en fonction de ϕ_0 et R .

13. Exprimer la force $\vec{F}_{a/s}$ que l'aimant fait subir à la spire (sans remplacer, ici, le courant i par son expression). Vérifier qu'elle se met sous la forme :

$$\vec{F}_{a/s} = K_2 \frac{X}{(1 + X^2)^{5/2}} i \vec{e}_x$$

On exprimera la constante K_2 en fonction de B^* , D et a .

14. Donner l'expression du produit $K = K_1 K_2$ en fonction de B^* , D , a et R , puis celle de la force en fonction de K , X et \dot{X} . Analyser la dépendance de cette force vis-à-vis des différents paramètres puis vis-à-vis des variables X et \dot{X} .

Adoptons un point de vue réciproque en exprimant la force que la spire fait subir à l'aimant. Parcourue par le courant i , la spire crée, au point A de l'axe (Ox) , le champ \vec{B}_s d'expression :

$$\vec{B}_s = (A) = B_{s0} \frac{1}{(1 + X^2)^{3/2}} \vec{e}_x \quad \text{où} \quad B_{s0} = \frac{\mu_0 i}{2a}$$

L'aimant, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$, est alors soumis à une force $\vec{F}_{s/a}$ qui s'exprime :

$$\vec{F}_{s/a} = \left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \vec{B}_s$$

15. Exprimer la force $\vec{F}_{s/a}$. vérifier que ce résultat concorde avec celui obtenu en réponse à la question 13..

16. Dans la première approche, nous avons négligé la composante inductive de la bobine. Dans la seconde, nous avons considéré le champ magnétique qu'elle produit et donc, tacitement, l'existence de son flux propre. Faut-il percevoir ici une contradiction ?

B. Interaction électromécanique entre un aimant et un bloc de cuivre

Étudions maintenant, sur la base des résultats établis dans la partie précédente, l'interaction électromécanique entre un aimant et un milieu conducteur en mouvement relatif. La spire est remplacée par un bloc de cuivre (fixe) que nous considérons comme étant semi-infini, occupant l'espace $(x \in]-\infty, 0]) \times (y \in]-\infty, +\infty[) \times (z \in]-\infty, +\infty[)$. L'aimant est lancé en direction de l'origine O depuis une situation initiale (s_0, v_0) telle que $s_0 > 0$ et $v_0 < 0$. Ici encore, l'aimant est astreint à se déplacer selon l'axe (Ox) et à conserver la même orientation de son moment magnétique $\vec{M} = -M\vec{e}_x$ ($M \geq 0$). Ce système est illustré sur la figure 7.

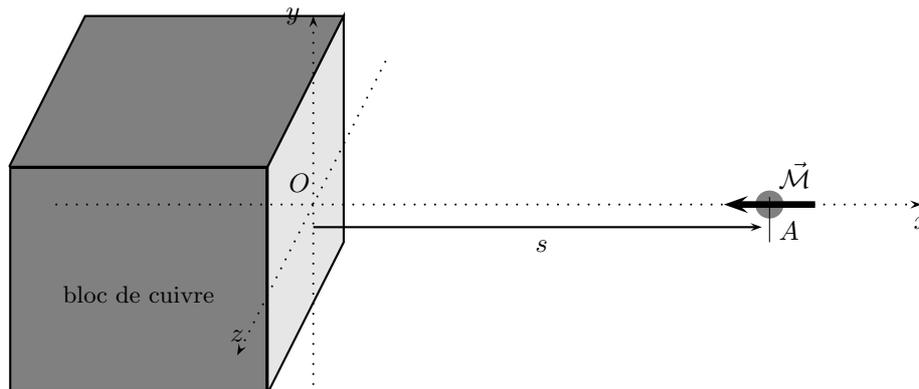


FIGURE 7 – Bloc de cuivre semi-infini et aimant $(A(s), m, \vec{M}, v\vec{e}_x)$ en interaction électromécanique.

Modélisation et expérience

Sur la base du résultat obtenu avec une spire, nous établissons ici un modèle de la force d'interaction entre l'aimant et le bloc de cuivre. Nous analyserons les résultats obtenus en les comparant à ceux issus d'une expérience.

17. Dans le cadre réel d'une expérience, le bloc de cuivre n'est évidemment pas semi-infini. Au vu de l'expression de la force $\vec{F}_{s/a}$ obtenue à la question 14., cette hypothèse paraît-elle toutefois défendable ?

18. Préciser, sur la base d'une argumentation, la géométrie des lignes de courant apparaissant dans le bloc de cuivre.

19. Comparer, qualitativement, l'efficacité du freinage de l'aimant par la spire et par le bloc de cuivre.

Nous souhaitons déterminer s'il existe a priori des échelles d'espace δ^* et de temps τ^* propres à ce système. L'expression de la force $\vec{F}_{a/s}$ obtenue en réponse à la question 14. fait apparaître une dépendance relativement aux grandeurs dimensionnées B^* , D , a (rayon de la spire), R (résistance de la spire) et de la vitesse v . Le principe fondamental de la dynamique ferait, par ailleurs, intervenir la masse m de l'aimant. Dans la situation qui nous intéresse maintenant (passage de la spire à un milieu continu) le paramètre a disparaît et la conductivité électrique σ se substitue à la résistance.

20. Nous choisissons, comme dimensions indépendantes, celles de la masse, de la longueur, du temps et de la charge électrique. Exprimer les dimensions $[B^*]$ et $[\sigma]$ dans la base de dimensions (M, L, T, Q) .

21. Une analyse dimensionnelle de ce système permet d'établir que les échelles recherchées (auxquelles il conviendra d'attribuer une signification dans le contexte de cette étude) présentent une dépendance, par rapport aux paramètres dimensionnés du problème, de la forme :

$$\begin{cases} \delta^* = D\Phi(W) & \text{où } W = \frac{m|v_0|}{\sigma B^{*2} D^4} \\ \tau^* = \frac{D}{|v_0|}\Psi(W) \end{cases}$$

où les fonctions (positives) Φ et Ψ restent inconnues. Préciser leur dimension ainsi que celle du groupement W .

22. Indiquer pourquoi une analyse dimensionnelle ne permet pas, dans la situation étudiée, de déterminer les fonctions Φ et Ψ .

La figure 8 présente les résultats issus d'une expérience. Le tracé de gauche représente l'évolution temporelle de l'abscisse $s = s(t)$ de l'aimant et celui de droite celle de sa vitesse $v = v(t)$.

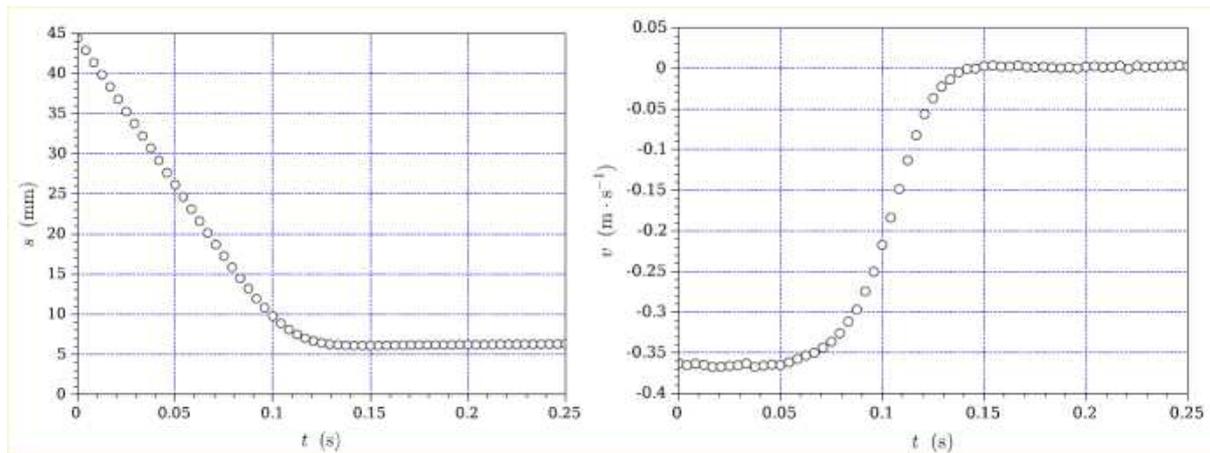


FIGURE 8 – Évolutions temporelles de la position $s = s(t)$ (à gauche) et de la vitesse $v = v(t)$ (à droite) de l'aimant.

23. Commenter les deux évolutions présentées sur la figure 8. Définir et estimer le temps δt et la distance δs caractéristiques de freinage qui apparaissent. Ces grandeurs peuvent alors être identifiées aux échelles τ^* et δ^* .

Le bloc de cuivre peut être considéré comme un assemblage continu de spires élémentaires. Avant de transposer dans ce cadre les résultats établis précédemment, nous devons d'abord nous assurer qu'il est raisonnable de considérer que chacune des spires élémentaires est soumise au même champ magnétique que celui qu'elle percevrait si elle était seule (hypothèse H_B).

24. Préciser pourquoi ce problème se pose effectivement.

25. Lors du déplacement de l'aimant, le bloc de cuivre est soumis à un champ magnétique variable. Nous notons τ_B le temps caractéristique de sa variation. Donner alors l'expression d'une longueur caractéristique δ_B d'écrantage du champ par le milieu conducteur (il n'est pas demandé de l'établir).

26. Estimer la longueur δ_B que l'on peut associer aux évolutions représentées sur la figure 8. Peut-on alors considérer que l'hypothèse H_B est fondée ?

Le résultat obtenu en réponse à la question **14.** conduit à l'expression de la force $\vec{F}_{a/s} = F_{a/s}\vec{e}_x$, que l'aimant fait subir à la spire (de rayon a , de section offerte au courant $e \times e$, située dans le plan (O, x, y) et à la distance $|s|$ de l'aimant), telle que :

$$F_{a/s} = G \frac{a^3 e^2 s^2}{(a^2 + s^2)^5} v \quad \text{où} \quad G = \frac{\pi}{32} (B^* D^3)^2 \sigma \quad \text{et} \quad v = \dot{s}$$

En vue d'exprimer la force $\vec{F}_{a/b}$ que l'aimant fait subir au bloc de cuivre, nous adoptons le paramétrage spatial indiqué sur la figure 9. Le rayon a de la spire élémentaire devient ici une variable continue. La position axiale d'une spire élémentaire, par rapport à l'aimant, est définie par la variable continue u . Attention, on veillera bien à distinguer u de s .

27. En adaptant l'équation précédente donnant l'expression de la force au paramétrage adopté, établir l'expression de la composante $d^2 F_{a/b}$ de la force que l'aimant fait subir à une spire élémentaire.

28. En déduire que la composante $F_{a/b}$ de la force totale subie par le bloc de cuivre prend la forme :

$$F_{a/b} = \alpha G \frac{v}{s^3}$$

On précisera la valeur du préfacteur numérique α . On donne la valeur de l'intégrale généralisée suivante :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x^2)^5} dx = \frac{1}{24}$$

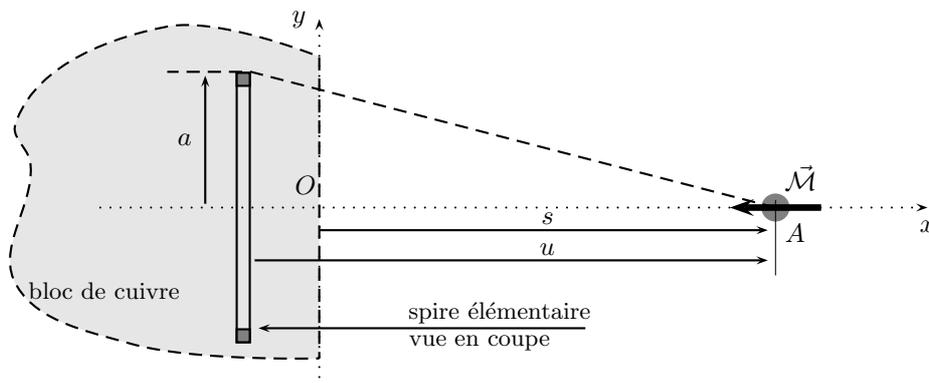


FIGURE 9 – Spire élémentaire, au sein du bloc de cuivre, en interaction électromécanique avec l’aimant $(A(s), m, \vec{M}, v\vec{e}_x)$.

Étude du mouvement dans l’espace des phases

Caractérisons le mouvement de l’aimant dans son espace des phases (s, v) . Nous posons $Q = \alpha G / (2m)$.

- 29. Établir l’équation différentielle dont est solution l’abscisse s de l’aimant.
- 30. En déduire qu’il existe une intégrale première du mouvement $A(s, v) = \text{Cte}$ que l’on exprimera.
- 31. Tracer l’allure du portrait de phase $(v = v(s))$ correspondant qualitativement à la situation expérimentale dont les résultats sont présentés à la figure 8. Comparer, pour cette expérience, Q/s_0^2 à $|v_0|$. Dans toute la suite, nous nous placerons dans cette condition.
- 32. Établir qu’il existe une vitesse initiale critique v_{0c} ($v_{0c} < 0$) en-dessous (algébriquement) de laquelle l’aimant n’entre pas en collision avec le bloc. On l’exprimera en fonction de Q et D .
- 33. Exprimer $|v_{0c}|$ en fonction de B^* , σ , D et m . Commenter les dépendances obtenues. En s’inspirant des équations δ^* et τ^* , et sachant maintenant qu’il existe une vitesse caractéristique, nous pouvons écrire $|v_{0c}|$ sous la forme $|v_{0c}| = |v_0|\Omega(W)$. Préciser l’expression de la fonction Ω .
- 34. Estimer la valeur du module $|v_{0c}|$.

La figure 10 présente les portraits de phase $v = v(s)$ obtenus expérimentalement¹, pour trois valeurs de la vitesse initiale v_0 .

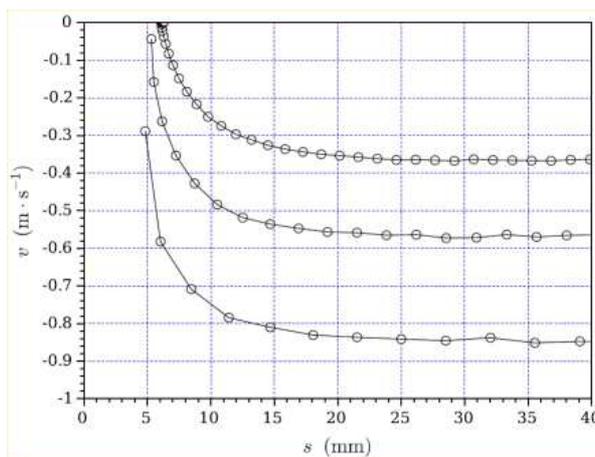


FIGURE 10 – Portraits de phase obtenus expérimentalement pour trois valeurs de la vitesse initiale.

1. L’aimant est suspendu à un fil d’une longueur de un mètre, formant ainsi un pendule. Sa position d’équilibre coïncide avec son contact avec le bloc de cuivre.

35. Estimer, à partir de la figure 10, la valeur du module $|v_{0c}|_{exp}$ de la vitesse critique (expérimentale). La comparer à celle issue de la modélisation.

36. Les points de mesure qui apparaissent sur la figure 10 se succèdent selon le même intervalle de temps (identique pour les trois vitesses initiales). Indiquer comment semble dépendre la distance caractéristique de freinage δ^* avec $|v_0|$. Préciser la forme de la fonction Φ que ce résultat suggère. Même question concernant le temps caractéristique de freinage τ^* .

