

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°7 du 06-03-2025

— Durée : 4 heures. Solutions —

Problème n° 1 – Couleur de la Lune totalement éclip­sée Mines MP 2020

A. Sources de lumière éclairant la Lune

1. En utilisant la direction du zénith fournie sur la photographie, on comprend que la Lune - qui est dans le cas d'une éclipse totale - est encore dans le cône d'ombre pour la partie droite par rapport à la direction du zénith. Elle sort de l'éclipse. La photographie a été réalisée entre les dates correspondant à 3 et 4. C'est donc entre 3 et 4.

2. L'angle de divergence angulaire pour la diffraction est de l'ordre du rapport de la longueur d'onde et de la taille du motif qui diffracte. On peut écrire que $\theta_d \simeq \frac{\lambda}{R_T} \simeq 2 \times 10^{-14}$ rad. Pour effectuer ce calcul, on prendra par exemple $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ puisqu'il faut considérer le domaine du visible. La divergence du faisceau sous l'effet de la diffraction crée une longueur a_d à la distance r_L qui est $a_d = \theta_d r_L \simeq 10^{-5}$ m car l'angle θ_d est très petit. a_d représente une distance d'environ $10 \mu\text{m}$. Il est totalement impossible que la diffraction soit responsable de l'éclairage de la Lune. On peut proposer la réfraction (qui sera étudiée plus loin dans le sujet...) des rayons solaires dans l'atmosphère terrestre, la réflexion de la lumière du Soleil sur d'autres planètes ou encore l'éclairage direct par d'autres étoiles que le Soleil. C'est la réfraction dans l'atmosphère de la Terre qui est le facteur prédominant.

B. Modèle d'atmosphère isotherme

3. On considère un volume $d\tau$ de fluide qui subit uniquement son poids $\rho_a d\tau \vec{g}$ et la résultante des forces de pression dues au fluide qui l'entoure. Cette dernière force s'écrit $-\text{grad} P d\tau$. On applique la relation de la Dynamique au système dans le référentiel terrestre que l'on suppose galiléen. On a donc $\rho_a d\tau \vec{a} = \rho_a d\tau \vec{g} - \text{grad} P d\tau$. Le fluide est supposé à l'équilibre, l'accélération de $d\tau$ est nulle : $\vec{a} = \vec{0}$. On retrouve ainsi la loi de la statique des fluides que l'on pouvait citer sans démonstration : $\text{grad} P = \rho_a \vec{g} = -\rho_a g \vec{e}_Z$. On peut donc écrire $\frac{dP}{dZ} = -\rho_a g$. On affine à un fluide à l'état gaz que l'on modélisera par la loi des gaz parfait. Il est compressible, sa masse volumique dépend de la pression comme on peut le constater : $P = \frac{n}{V} RT = \frac{m}{V} \frac{RT}{M_a} = \rho_a \frac{RT}{M_a}$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on arrive facilement à $\frac{d\rho_a}{dZ} + \frac{M_a g}{RT} \rho_a = 0$. La solution est triviale : $\rho_a(Z) = \rho_a(0) \exp\left(-\frac{Z}{H_c}\right)$ avec $H_c = \frac{RT}{M_a g} \simeq 8,5 \text{ km}$.

4. On utilise la loi des gaz parfaits en veillant à utiliser les unités légales : $\rho_a(0) = \frac{10^5 \times 29 \times 10^{-3}}{8,31 \times 293}$. On trouve $\rho_a(0) \simeq 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Au sommet du mont Everest, on se situe à peu de chose près à $Z \simeq H_c$. Le renseignement numérique $\exp(-1) \approx 1/3$ s'avère étonnamment utile... On trouve $\rho_a(\text{Everest}) \simeq 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pour conclure sur le caractère réaliste ou non du modèle de l'atmosphère isotherme, il ne faut pas commettre l'erreur de comparer les températures en °C mais bien en K. Le rapport est $\frac{293}{250} \simeq 1,2$. On commet sur l'évaluation de la masse volumique une erreur de 20%, c'est loin d'être négligeable mais cela ne rend pas caduque le modèle isotherme puisqu'il reste encore dans le bon ordre de grandeur. Une conclusion contraire aurait aussi été acceptée si elle est basée sur une discussion numérique juste.

C. Onde électromagnétique incidente

5. L'onde se propage dans le vide, c'est un modèle onde plane que l'on propose la relation de dispersion associée à l'équation de D'ALEMBERT est $k = \frac{\omega}{c}$. La polarisation du champ électrique est sur \vec{e}_y et la direction de propagation \vec{e}_x . On a donc $\vec{E} = \vec{e}_y E_m \cos(\omega t - kx)$. À partir de l'équation de MAXWELL-FARADAY $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on obtient la relation de structure $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E})$. Le champ magnétique de l'onde est : $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{E_m}{c} \cos(\omega t - kx)$. La représentation 3D de l'onde électromagnétique qui se propage est située à la figure 1.

6. Par définition, le vecteur de POYNTING est $\vec{R}(x, t) = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{e}_x \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx)$. L'intensité correspond à la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING. Nous savons que $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$, on peut en déduire que $I_0 = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}$. Le champ électrique de l'onde envoyée par le Soleil est donc $E_m = \sqrt{2\mu_0 c I_0} \simeq 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

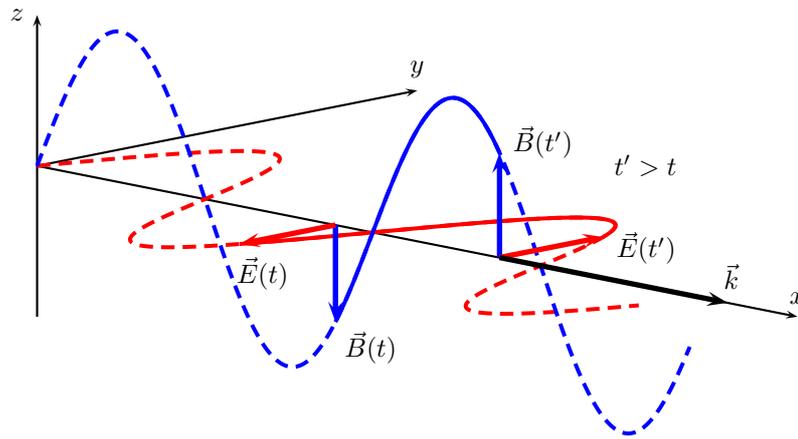


FIGURE 1 – Onde électromagnétique polarisée rectilignement

D. Transfert du rayonnement solaire à travers l’atmosphère terrestre

7. Si l’on note m_a la masse d’une molécule d’air, on a $\eta_a(x) = \frac{\rho_a(x)}{m_a}$. En général, on donne plutôt la masse molaire M_a de l’air tout en rappelant qu’il s’agit d’une moyenne des masses molaires des différents constituants.

On doit alors faire intervenir la constante d’AVOGADRO. On a donc : $\eta_a(x) = \frac{\rho_a(x)}{M_a} \mathcal{N}_A$.

8. On considère un volume élémentaire $d\tau = Sdx$ de section S situé entre les abscisses x et $x + dx$. On travaille en régime indépendant du temps. On a donc $\frac{dE}{dt} = 0 = P_{\text{entre}} - P_{\text{sort}} + P_{\text{créée}}$. La puissance qui entre est $SI(x)$, la puissance qui sort $SI(x + dx)$. Pour les termes de création (algébriques), on a ici de l’absorption de puissance qui correspond aux deux termes proposés. Pour la puissance diffusée, le nombre de molécules contenues dans le système est $\eta_a(x)Sdx$ et la puissance correspondante $k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 I(x)\eta_a(x)Sdx$. Pour l’absorption par les poussières, on a de la même façon $k_p I(x)\eta_p(x)Sdx$. En simplifiant l’ensemble de l’équation par la section S , on arrive à

$$0 = I(x) - I(x + dx) - k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 I(x)\eta_a(x)dx - k_p I(x)\eta_p(x)dx.$$

9. En divisant par dx , on obtient l’équation différentielle suivante : $\frac{dI}{dx} + [k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \eta_a(x) + k_p \eta_p(x)]I(x) = 0$. Cette équation différentielle possède une solution en exponentielle de l’opposé de la primitive du terme en facteur de $I(x)$. La solution est donc bien de la forme $I(x) = I(0) \exp[-d_o(x)]$ avec une densité optique définie par :

$$d_o(x) = k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \int_0^x \eta_a(\xi)d\xi + k_p \int_0^x \eta_p(\xi)d\xi.$$

E. Réfraction atmosphérique

10. L’atmosphère terrestre réfracte-t-elle les rayons lumineux qui la traversent car elle possède un indice de réfraction plus élevée que celui du vide qui est 1. On a $n_a > 1$. La valeur n’est pas très différente de 1 mais elle l’est suffisamment pour que le phénomène de réfraction se produise. De plus, dans l’atmosphère, l’indice de réfraction varie en fonction de la pression et de la température. Il y a en quelque sorte une succession de dioptries et cela provoque un parcours incurvé de la majorité des rayons lumineux.

11. On a $\frac{R_T + Z}{R_T + Z_0} = \frac{1 + \frac{Z}{R_T}}{1 + \frac{Z_0}{R_T}}$. Comme Z et Z_0 sont très petits devant R_T , on peut en déduire que $\frac{R_T + Z}{R_T + Z_0} \simeq 1 + \frac{Z - Z_0}{R_T} = 1 + \frac{u}{R_T}$. En passant au carré, on arrive à $\left(\frac{R_T + Z}{R_T + Z_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{u}{R_T}\right)^2 \simeq 1 + \frac{2u}{R_T}$. On peut donc déterminer la forme approchée demandée :

$$\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} \simeq \sqrt{\frac{2u}{R_T}}$$

on a immédiatement $dn = \varepsilon_\lambda \frac{d\rho_a}{\rho_a(0)}$. Pour la différentielle de la masse volumique, il est préférable de la modifier un peu avant d’agir. On a $\rho_a(Z) = \rho_a(0) \exp -\frac{Z}{H_c}$. Cela veut dire en particulier que $\rho_a(Z_0) = \rho_a(0) \exp -\frac{Z_0}{H_c}$.

On peut donc écrire que $\rho_a(Z) = \rho_a(Z_0) \exp -\frac{Z - Z_0}{H_c} = \rho_a(Z_0) \exp -\frac{u}{H_c}$. On différencie en u directement pour écrire que

$$d\rho_a = -\frac{\rho_a(Z_0)}{H_c} \exp -\frac{u}{H_c} du.$$

12. Avec le travail préparatoire effectué à la question précédente, on peut écrire que $dn = -\frac{\varepsilon_\lambda}{H_c} \frac{\rho_a(Z_0)}{\rho_a(0)} \exp -\frac{u}{H_c} du$. Au vu de l’aide fournie par l’énoncé, il faut effectuer le changement de variable $v = \frac{u}{H_c}$. Il faut aussi changer les bornes car $n = 1$ correspond à un vide parfait que l’on peut supposer situé à $Z \rightarrow \infty$. Cela signifie que

pour u et donc v , on a aussi l'infini. Pour $n = n_0$, on se situe au point le plus proche de la surface de la Terre et donc $Z = Z_0$ ce qui correspond à $u = 0$ ainsi que $v = 0$. On peut écrire l'intégrale proposée par l'énoncé selon : $\theta_d = -2\varepsilon_\lambda \frac{\rho_a(Z_0)}{\rho_a(0)} \int_\infty^0 \sqrt{\frac{R_T}{2u}} \exp -\frac{u}{H_c} \frac{du}{H_c}$. Pour effectuer le changement de variable en v , il suffit de faire apparaître H_c dans la racine : $\sqrt{\frac{R_T H_c}{2u H_c}} = \sqrt{\frac{R_T}{2H_c v}}$. On a $\theta_d = \varepsilon_\lambda \frac{\rho_a(Z_0)}{\rho_a(0)} \sqrt{\frac{2R_T}{H_c}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} \exp -vdv$. On peut donc utiliser le résultat de l'intégrale d'où $\theta_d = \varepsilon_\lambda \sqrt{\frac{2\pi R_T}{H_c}} \frac{\rho_a(Z_0)}{\rho_a(0)}$. On utilise enfin le fait que $\frac{\rho_a(Z_0)}{\rho_a(0)} = \exp -\frac{Z_0}{H_c}$. On a en fin de compte : $\Theta(Z_0) = \sqrt{\frac{2\pi R_T}{H_c}} \exp -\frac{Z_0}{H_c}$. La déviation est maximale pour $Z_0 = 0$.

13. On a $\delta\theta_d = \Theta(Z_0)d\varepsilon_\lambda$ et $d\varepsilon_\lambda = -2\frac{\lambda^2}{\lambda^3}d\lambda$. On peut donc écrire que $\delta\theta_d = -\Theta(Z_0)\frac{2\lambda^2}{\lambda^3}\delta\lambda$.

14. Le schéma de la situation est réalisé à la figure 2. L'atmosphère terrestre est capable d'éclairer N puisque l'angle de déviation requis est de $41'$, valeur inférieure aux $70'$ de déviation maximale.

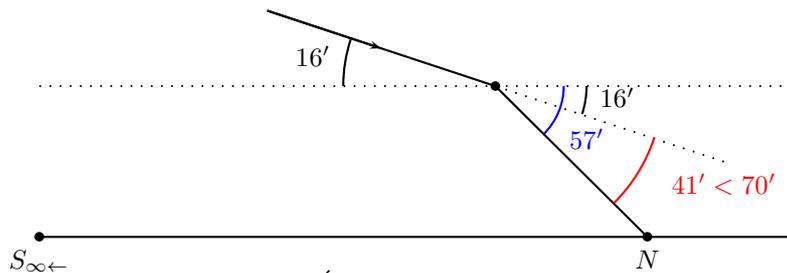


FIGURE 2 – Éclairage possible du point N

F. Prédiction du spectre de la lumière reçue par la Lune

15. On peut déterminer quelques points du spectre de la lumière reçue par la Lune en N en effectuant le produit de I_λ et de $\exp -d_o$. Les valeurs numériques retenues sont dans le tableau qui suit.

λ (nm)	$\exp -d_o$	I_λ ($W \cdot m^{-2} \cdot nm^{-1}$)	$I_\lambda \exp -d_o$ ($W \cdot m^{-2} \cdot nm^{-1}$)
600	0,005	1,8	0,009
650	0,025	1,6	0,040
700	0,065	1,4	0,091
750	0,125	1,3	0,162

La représentation de la courbe est est fournie à la figure 3. On peut considérer qu'en dessous de 600 nm, la puissance reçue est quasiment nulle. La Lune reçoit essentiellement les grandes longueurs d'onde du spectre visible, elle aura donc une couleur rouge-orangé.

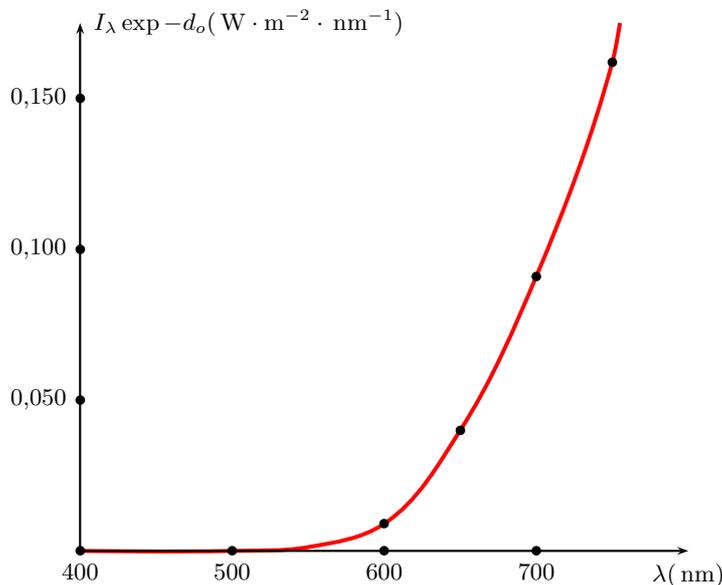


FIGURE 3 – Couleur de la Lune

Problème n° 2 – Freinage par courants de Foucault

ENS Lyon PC 2021

A. Interaction électromécanique entre un aimant et une spire

Analyse qualitative de l'interaction

- Des lignes du champ magnétique \vec{B}_a créé par l'aimant sont représentées sur le schéma de la figure 4.

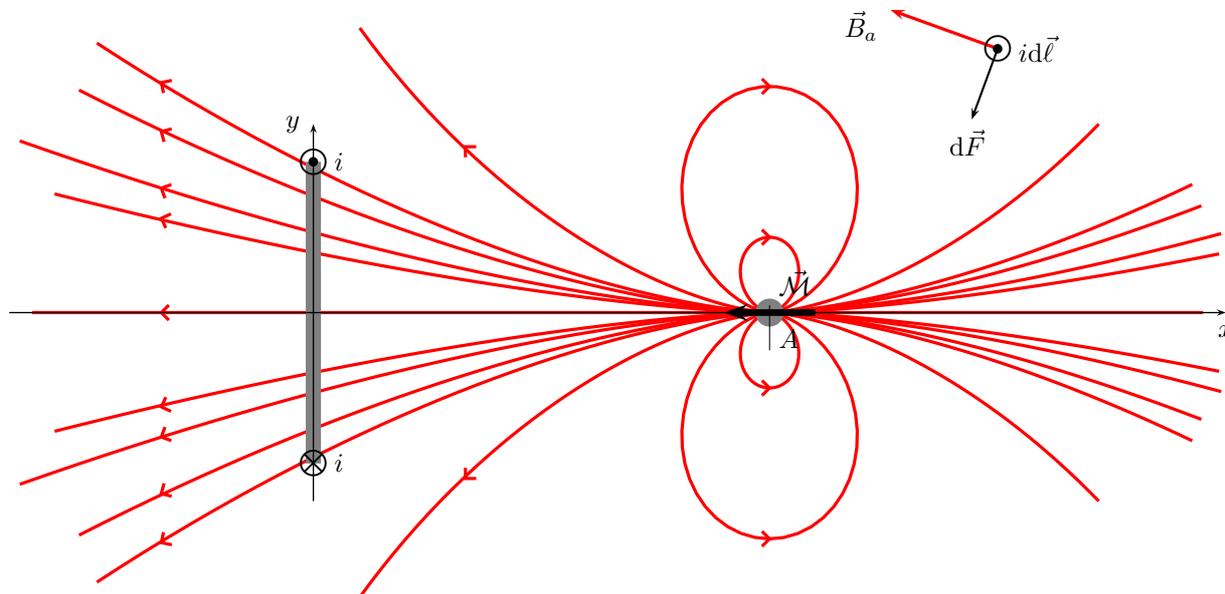


FIGURE 4 – Lignes de champ magnétique créées par l'aimant

2. L'aimant se rapproche, cela revient donc à faire augmenter l'intensité du champ magnétique \vec{B}_a pour la spire. Le flux à travers la spire va augmenter en valeur absolue en tout cas, il y a induction. Par **loi de LENZ**, le sens du courant induit sera tel qu'il tend par ses effets à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. Le sens du courant est tel qu'il y a production d'un champ magnétique induit orienté dans le sens contraire de \vec{B}_a . En appliquant la règle du tire-bouchon ou de la vis, le courant induit doit venir vers nous sur le haut de la spire et nous fuir sur le bas de la spire.

3. Toujours par loi de LENZ, l'aimant doit repousser la spire. La force de LAPLACE qui agit est de la forme $d\vec{F} = id\vec{\ell} \wedge \vec{B}_a$. Le vecteur $d\vec{F}$ est perpendiculaire à $d\vec{\ell}$ et à \vec{B}_a . Voir le schéma de la figure 4 où l'élément de courant a été déplacé pour plus de clarté dans la lecture de la situation. La force de LAPLACE $d\vec{F}$ possède, en général, les deux effets d'une force mécanique : effet de translation et aussi effet de rotation par l'existence d'un moment de force non nul. Ici, lorsqu'on intègre toutes les forces $d\vec{F}$ agissant sur la spire, la résultante est uniquement portée par l'axe Ox et dans le sens de $-\vec{e}_x$. En effet, l'invariance par rotation du problème autour de l'axe Ox fait que les composantes des forces $d\vec{F}$ appartenant au plan Oyz se compensent. Le moment magnétique de la spire est porté par l'axe Ox , il n'y a pas d'effet de rotation car le moment résultant est nul, lui aussi. Par les actions réciproques, la force exercée par la spire sur l'aimant est l'opposée de celle que nous venons de voir. L'aimant est freiné.

4. Comme on l'a vu, lorsque l'aimant se rapproche, l'induction tend à créer un courant positif. Si l'aimant est loin de la spire l'effet n'est pas sensible, il augmente lorsque l'on se rapproche par croissance de l'intensité du champ magnétique. La croissance de la norme du champ magnétique ralentit et passe par un maximum lorsque l'aimant se situe en O . L'intensité est donc passé par un maximum et diminue ensuite pour s'annuler lorsque B_a passe par son maximum. Lorsque l'aimant poursuit sa route sur la gauche de la spire, l'intensité du champ magnétique diminue. La loi de LENZ va encore nous permettre de dire que le courant induit sera cette fois-ci dans le sens contraire de la première phase et donc négatif. Car la spire essaie de s'opposer à la baisse du champ magnétique en créant un champ \vec{B} induit orienté sur la gauche. Le courant passera par un minimum négatif cette fois. Voir le graphique de la figure 5. Le minimum sera moins marqué que le maximum pour $i > 0$ puisque la force exercée sur l'aimant le freine, sa vitesse va diminuer rendant l'induction moins importante.

5. La force augmente lorsque l'intensité augmente, c'est-à-dire lorsque le flux du champ magnétique varie le plus rapidement. Elle présente un maximum qu'il n'est pas évident à situer précisément sans étude quantitative

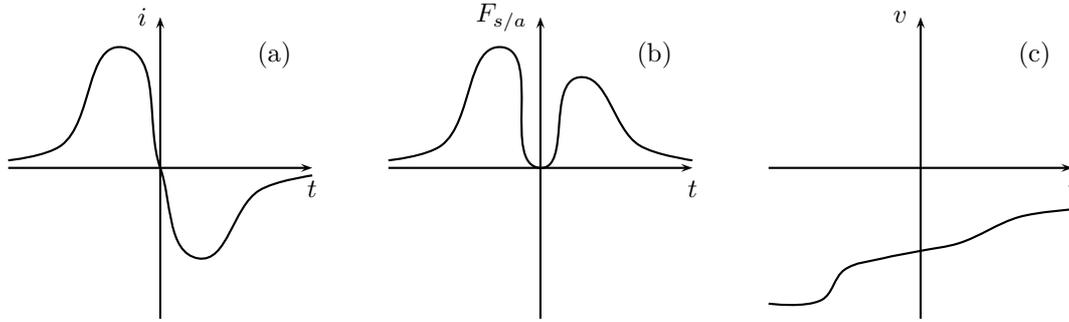


FIGURE 5 – Représentation de l’allure de i (a), de l’allure de la force exercée par la spire sur l’aimant (b) et de l’allure de la vitesse de l’aimant (c)

car tous les paramètres interviennent comme l’intensité du champ magnétique, l’orientation moins divergente les lignes de champ magnétique et la vitesse de l’aimant qui a commencé à ralentir. . . Quoiqu’il en soit, il est logique d’imaginer qu’il existe un maximum. Un autre point important est l’orientation de la force qui agit sur l’aimant : elle est **toujours sur $+\vec{e}_x$** . Il y a freinage aussi bien lorsque l’aimant se situe avant la spire qu’une fois qu’il est passé à travers. C’est la conséquence, toujours, de la loi de LENZ : lorsque l’aimant s’approche, l’induction tend à l’empêcher d’approcher et une fois passé dans la spire, l’induction s’oppose à son éloignement. La force est représentée de façon qualitative à la figure 5.

6. La vitesse v va rester négative mais le freinage fait que **$|v|$ diminue**. Le freinage est d’autant plus efficace que la force est grande. L’évolution de la vitesse est aussi représentée à la figure 5.

7. Si le moment magnétique de l’aimant était orienté dans l’autre sens, le champ magnétique \vec{B}_a le serait aussi. Cela changerait le signe du flux magnétique et donc de sa dérivée. L’intensité du courant serait changée de signe. Par contre, la **force $\vec{F}_{s/a}$ serait inchangée** puisque \vec{B}_a et i changeant de signe, le produit serait le même. L’évolution de la vitesse serait toujours la même, il y aurait toujours le même freinage.

8. Sur le plan énergétique, l’aimant perd de l’énergie cinétique lors du freinage. Cette énergie a servi à produire le courant induit qui va dissiper cette énergie en raison de l’effet JOULE dans la résistance de la spire. On a **$-\Delta E_c = \int P_J dt$** .

Étude analytique de l’interaction

9. Le moment magnétique de l’aimant est défini par rapport à son aimantation. On a $\mathcal{M} = M \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6\mu_0} B^*$. En tenant compte de l’orientation, on a $\vec{\mathcal{M}} = -\frac{\pi D^3 B^*}{6\mu_0} \vec{e}_x$. En observant les vecteurs unitaires proposés pour le repérage dans cette étude, on constate que $-\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = \cos \varphi$. On obtient donc l’expression suivante pour le champ magnétique : **$\vec{B}_a(Q) = B^* \frac{D^3}{24r^3} (3 \cos \varphi \vec{e}_r + \vec{e}_x)$** .

10. Il y a deux méthodes pour faire le calcul du flux du champ magnétique dans cette configuration. La surface de la spire est un disque, on introduit le repérage d’un point de ce disque par (u, β) de type coordonnées polaires où β est l’angle de la direction du rayon vecteur et u la distance depuis le centre du disque. Un élément de la surface est donc donné par $d\vec{S} = udud\beta \vec{e}_x$, on oriente la surface de la sens positif du courant induit établi au début du problème. Le flux élémentaire à travers cette surface est $d\phi_{a/s} = udud\beta \vec{e}_x \cdot (B^* \frac{D^3}{24r^3} (3 \cos \varphi \vec{e}_r + \vec{e}_x))$. On obtient $d\phi_{a/s} = B^* \frac{D^3}{24r^3} udud\beta (1 - 3 \cos^2 \varphi)$ qu’il va falloir intégrer. . . Les variables qui interviennent sont liées entre elles, on privilégiera l’angle φ , sachant que l’angle β est indépendant lui. On a $u = s \tan \varphi$ et donc $du = s \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$. D’autre part, $r = \frac{s}{\cos \varphi}$ qui permet de remplacer r^3 dans la formule du flux élémentaire. En utilisant ces expressions, on arrive, après calcul, à l’expression suivante du flux élémentaire : $d\phi_{a/s} = B^* \frac{D^3}{24s} d\beta (\sin \varphi - 3 \sin \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi$. L’intégration sur l’angle β ne pose aucune difficulté et s’étend de 0 à 2π . Pour l’angle φ , on va de 0 à θ tel que défini par l’énoncé. On a donc $\phi_{a/s} = B^* \frac{\pi D^3}{12s} ([-\cos \varphi]_0^\theta + [\cos^3 \varphi]_0^\theta)$. Finalement, on a $\phi_{a/s} = B^* \frac{\pi D^3}{12s} (\cos^3 \theta - \cos \theta) = B^* \frac{\pi D^3}{12s} \cos \theta (\cos^2 \theta - 1) = -B^* \frac{\pi D^3}{12s} \cos \theta \sin^2 \theta$. Or, dans cette situation, on a $\cos \theta = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}$ et $\sin^2 \theta = \frac{a^2}{a^2 + s^2}$. Cela nous conduit à $\phi_{a/s} = -B^* \frac{\pi D^3}{12a} \frac{a^3}{(a^2 + s^2)^{3/2}}$. En introduisant $X = s/a$, on arrive à l’expression voulue par l’énoncé : **$\phi_{a/s} = -B^* \frac{\pi D^3}{12a} \frac{1}{(1+X^2)^{3/2}}$** . Cela permet d’identifier $\phi_0 = -B^* \frac{\pi D^3}{12a}$

qui a bien la dimension d’un flux magnétique comme le produit d’un champ magnétique par une surface et $F(X) = \frac{1}{(1+X^2)^{3/2}}$. Comme on vient de le constater, le calcul du flux du champ magnétique n’est pas simple. Une seconde méthode permet de faire moins de calcul et utilise plus le sens physique, encore faut-il y penser. . . On utilise le fait que $\text{div } \vec{B}_a = 0$. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est conservatif : on a

$\oiint_{S_f} \vec{B}_a \cdot dS_f \vec{n}_{ext} = 0$. On constitue une surface fermée grâce au disque que nous avons utilisé avant et grâce à une calotte sphérique de rayon $\sqrt{a^2 + s^2}$ qui s'appuie sur le périmètre du disque. Si l'on note ϕ_1 le flux sur le disque et ϕ_2 sur la calotte sphérique orientée par le même sens du contour (périmètre du disque) que pour le disque. Le flux sur la surface fermée orientée par des normales extérieures est donc $-\phi_1 + \phi_2 = 0$. On a donc $\phi_1 = \phi_2$. On vient de redémontrer que le flux du champ magnétique est le même à travers n'importe quelle surface ouverte s'appuyant sur le même contour en l'occurrence celui formé par la spire. On peut donc calculer le flux du champ \vec{B}_a à travers la calotte sphérique. nous allons constater que ce flux est beaucoup plus simple car le vecteur surface élémentaire est de la forme $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$. On utilise des coordonnées sphériques faisant intervenir les angles β et φ qui sont les angles traditionnels des coordonnées sphériques. En coordonnées sphériques traditionnelles, on a une surface élémentaire sur la sphère de rayon r d'expression $d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$. Ici, il faut se méfier de la transposition puisque l'angle β joue le rôle du φ habituel alors θ correspond à l'angle φ défini par l'énoncé. On a donc $d\vec{S} = (a^2 + s^2) \sin\varphi d\varphi d\beta$. En effectuant le produit scalaire $\vec{B}_a \cdot dS \vec{e}_r$, on arrive à l'expression suivante du flux du champ magnétique : $d\phi_{a/s} = B^* \frac{\pi D^3}{24(a^2 + s^2)^{3/2}} (a^2 + s^2) 2 \cos\varphi \sin\varphi d\varphi d\beta$. On voit donc $\sin^2\varphi$ comme primitive et en intégrant avec les mêmes bornes, on trouve heureusement la même expression du flux du champ magnétique que celle calculée par l'autre méthode : $\phi_{a/s} = -B^* \frac{\pi D^3}{12a} \frac{1}{(1+X^2)^{3/2}}$.

11. Il faut que $R \gg L\omega$ d'une façon électrocinétique si l'on peut dire. Ici, ω correspond à $\frac{1}{\tau_i}$. Il faut donc que :

$$\tau_i \gg \frac{L}{R}$$

12. La loi de FARADAY donne $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\phi_0 \frac{dF}{dt} = -\phi_0 \frac{dF}{dX} \frac{dX}{dt}$ Comme $X(t) = s(t)/a$, on a $\frac{dX}{dt} = \frac{v}{a}$. De plus, $\frac{dF}{dX} = -\frac{3X}{(1+X^2)^{5/2}}$. On en déduit que la fem induite est donnée par l'expression $e = \phi_0 \frac{3X\dot{X}}{(1+X^2)^{5/2}}$. Comme la spire est uniquement modélisée par une résistance électrique puisque l'on néglige l'autoinduction, on a immédiatement $e = Ri$ où i est l'intensité du courant induit. On peut donc écrire que $i = K_1 \frac{X\dot{X}}{(1+X^2)^{5/2}}$ avec $K_1 = \frac{3\phi_0}{R}$.

13. La force de LAPLACE est orientée sur \vec{e}_x par symétrie. On ne comptera que la projection sur \vec{e}_x de la force élémentaire. On a $d\vec{F}_{a/s} = i\vec{e}_x (ad\beta\vec{e}_\beta \wedge \vec{B}_a) \cdot \vec{e}_x$. On doit exprimer le champ magnétique pour $\varphi = \theta$ et $r = \sqrt{a^2 + s^2}$. On a donc $\vec{B}_a = B^* \frac{D^3}{24(a^2 + s^2)^{3/2}} (3\frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}\vec{e}_r + \vec{e}_x)$. Le produit vectoriel entre \vec{e}_r et \vec{e}_x va faire intervenir $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}}$. On obtient donc la force élémentaire $d\vec{F} = \vec{e}_x i d\beta B^* \frac{D^3}{24(a^2 + s^2)^{3/2}} \frac{3sa}{a^2 + s^2}$. L'intégration sur β est simple puisque cela amène le facteur 2π . On arrive bien à une expression du type de celle proposée $\vec{F}_{a/s} = K_2 \frac{X}{(1+X^2)^{5/2}} i \vec{e}_x$ avec $K_2 = -B^* \frac{\pi D^3}{4a^2}$.

14. On a $K = K_1 K_2 = B^{*2} \frac{\pi^2 D^6}{16a^3 R}$ mais la résistance R dépend aussi de a , on a $R = \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi a}{e^2}$. Finalement, l'expression de K est la suivante : $K = \frac{\sigma B^{*2} \pi D^6 e^2}{32a^4}$. Avec cette expression, on peut constater logiquement que plus le produit $(B^* D^3)^2$ plus la force sera importante. Ceci s'explique par le fait que le produit $B^* D^3$ représente à une constante près le moment magnétique de l'aimant. Plus e est petit plus la force sera petite, cela tient à ce que e^2 est la section de la spire et qu'elle influence fortement la résistance électrique de la spire. Si la résistance électrique est élevée, le courant induit sera faible pour une fem induite donnée. Enfin, on peut voir que plus a est faible plus la force est grande. En effet, plus on est près de l'axe, plus le champ magnétique de l'aimant est de direction proche de la normale à la spire : la contribution au flux est importante. mais il y a aussi un effet sur la résistance électrique puisque la résistance sera d'autant plus petite que a sera petit. La force est proportionnelle à \dot{X} , c'est logique plus la vitesse est importante plus l'induction sera forte et donc la force importante. Pour analyser l'influence de X , c'est plus délicat mais on voit que comme prévu, la fonction passera par un maximum de chaque côté de la spire et sera nulle en $X = 0$ lorsque l'aimant se trouve au milieu de la spire. C'est ce que nous avons prévu dans l'analyse qualitative.

15. On a $\vec{M} \cdot \overrightarrow{grad} = -\mathcal{M} \frac{d}{ds}$ qui va agir sur l'expression $\frac{\mu_0 i}{2a} \frac{1}{(1+X^2)^{3/2}}$ où $X = s/a$. On obtient une force agissant sur l'aimant $\vec{F}_{s/a} = \vec{e}_x \frac{\mathcal{M}\mu_0 i}{2a^2} \frac{-3X}{(1+X^2)^{5/2}}$. En utilisant l'expression du moment magnétique de l'aimant, on trouve que : $\vec{F}_{s/a} = -i \frac{B^* \pi D^3}{4a^2} \frac{X}{(1+X^2)^{5/2}} \vec{e}_x$. La force est bien l'opposée de celle calculée avant, ce qui était attendu par le principe des actions réciproques.

16. Si l'on se place du point de vue de la spire, le flux qu'elle reçoit est la somme de son flux propre et du flux de l'aimant qualifié de **flux mutuel** et le flux propre sera négligeable devant le flux mutuel. Pour l'aimant, la situation est la même, il y a un flux propre, un flux mutuel et le flux mutuel domine le flux propre.

B. Interaction électromécanique entre un aimant et un bloc de cuivre

Modélisation et expérience

17. La force \vec{F} dont nous avons établi l'expression décroît assez rapidement avec X , on peut prévoir que l'induction se fera majoritairement dans une couche de taille limitée **au niveau de la surface** du bloc conducteur. On peut donc dire qu'un bloc de cuivre de quelques longueurs caractéristiques d'évolution spatiale de la force suffit.

18. L'origine de l'induction est le moment magnétique de l'aimant \vec{M} qui est orienté sur l'axe Ox . Tous les plans contenant l'axe Ox sont des plans d'antisymétrie des courants¹ à l'origine de ce moment magnétique. Les courants à l'origine du moment magnétique sont donc des cercles d'axe Ox . Les courants qui naissent dans le bloc de cuivre par induction sont donnés par la loi d'OHM locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où le champ électrique induit est donné par $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_a}{\partial t}$. Tous les plans contenant l'axe étant des plans d'antisymétrie, les courants induits seront aussi à **géométrie circulaire**.

19. Cette question nous incite à penser qu'il y aura un empilement de spires de courant dans le bloc de cuivre. Tous les effets de ces courants vont aller dans le même sens, ils vont contribuer au freinage, on peut imaginer qu'il y aura un **renforcement** de l'effet de freinage qui agit sur l'aimant.

20. La partie magnétique de la force de LORENTZ permet d'exprimer la dimension du champ magnétique. En effet, on a $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}$. On voit que sur le plan dimensionnel, on peut écrire que $\frac{m}{\tau} \equiv qB$. On peut conclure que B^* s'exprime en **kg · C⁻¹ · s⁻¹**. Pour la conductivité électrique, c'est un peu plus long. On peut utiliser la loi d'OHM $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ pour écrire que $\frac{C}{s \cdot m^2} \equiv \sigma E$. Ensuite, on utilise l'autre partie de la force de LORENTZ pour obtenir $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}$ ce qui permet d'écrire que $E \equiv \frac{kg \cdot m}{C \cdot s^2}$. En rapprochant les deux expressions, on peut écrire que : **$\sigma \equiv C^2 \cdot s \cdot m^{-3} \cdot kg^{-1}$** .

21. On voit que δ^* et D sont deux distances qui possèdent la même dimension : **$\Phi(W)$ est sans dimension**. De la même façon, $\frac{D}{v_0}$ est le rapport d'une distance sur une vitesse, le résultat est de toute évidence une durée comme τ^* . On peut donc conclure que **$\Psi(W)$ est sans dimension**. Plaçons les unités des différentes grandeurs intervenant dans W : $W \equiv \frac{kg \cdot m \cdot s^{-1}}{C^2 \cdot s \cdot m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot kg^2 \cdot C^{-2} \cdot s^{-2} \cdot m^4}$. On constate que toutes les dimensions finissent par se simplifier. **W est sans dimension**.

22. Cette question évoque le théorème de Mathématique de VASCHY-BUCKINGHAM ou théorème Π . Chaque variable s'exprime dans le système (kg, m, s, C). Il y a en fait 7 variables ($m, v_0, \sigma, B^*, D, \delta^*, \tau^*$), le théorème nous dit que l'on peut **construire 3 nombres adimensionnés** avec cette liste de 7 grandeurs. C'est ce que l'énoncé effectue en proposant le trio ($W, \frac{\delta^*}{D}, \frac{\tau^* |v_0|}{D}$). Mais le théorème ne nous permet pas de prévoir la forme des fonctions Φ et Ψ .

23. On peut voir sur les graphiques que la vitesse est constante (et négative) lorsque l'aimant est loin de la spire. L'induction électromagnétique est un phénomène marginale pour que l'on puisse en mesurer l'effet sur la vitesse de l'aimant. Ensuite l'effet de freinage est perceptible car la vitesse diminue assez rapidement. On peut voir qu'entre 0,05 s et 0,15 s le freinage a permis l'arrêt de l'aimant. On peut donc proposer **$\delta t = \tau^* = 0,1 \text{ s}$** . Pour la distance d'arrêt, il faut regarder l'abscisse entre les mêmes dates. On passe de 25 mm à 5 mm. Cela signifie que l'on peut prendre **$\delta s = \delta^* = 20 \text{ mm}$** .

24. Le champ magnétique vu par les différentes spires n'est pas le même car, une spire va créer un champ magnétique qui tend à s'opposer au champ à l'origine de l'induction. On a aura donc tendance à avoir une situation où une spire tend à **masquer** le champ magnétique de l'aimant aux spires situées après elle.

25. Cette question évoque l'effet de peau qui se produit dans un conducteur. On se place dans l'ARQS, on a $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ avec $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. D'après l'équation de MAXWELL-FARADAY, on a $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On pratique $\text{rot} \text{rot} \vec{B} = \text{grad} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$ puisque $\text{div} \vec{B} = 0$. En combinant ces équations, on obtient $-\Delta \vec{B} = \mu_0 \text{rot} \vec{j} = \mu_0 \sigma \text{rot} \vec{E}$. On peut donc retrouver l'équation de diffusion du champ magnétique dans le bloc conducteur : $\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En transposant les opérateurs sur le plan dimensionnel, on obtient $\frac{\delta_B}{\delta t} = \mu_0 \sigma \frac{\delta_B}{\tau_B}$.

La distance caractéristique de l'effet de peau est donc donnée par : **$\delta_B = \sqrt{\frac{\tau_B}{\mu_0 \sigma}}$** .

26. Pour l'application numérique, on retient $\tau_B \simeq 0,1 \text{ s}$ et $\sigma = 6 \times 10^{-7} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. On trouve $\delta_B \simeq 3,6 \text{ cm}$. Cette distance est du même ordre de grandeur que celui du déplacement de l'aimant et de la variation de son

1. Ces courants sont fictifs en réalité car le moment magnétique est une propriété quantique, mais on peut quand même imaginer des courants qui auraient pour résultat la création de \vec{M} .

abscisse lors du freinage qui est d'environ 2 cm. L'hypothèse H_B n'est pas tout à fait fondée.

27. Il faut transposer $s \rightarrow u$ mais la spire possède un rayon a variable. Il faut construire des spires élémentaires. Compte tenu du repérage de la position de la spire, on note son épaisseur sur la direction Ox comme étant du et comme le rayon est a , on lui donne une épaisseur da dans la direction Oy . La section de la spire est donc $duda$, elle joue le rôle de $e \times e$ que nous avons avant. N'oublions pas que ce rôle est important car c'est la section qui influence la résistance électrique et donc influence le courant induit. Dans ces conditions, pour une spire élémentaire, on peut définir l'expression de la force élémentaire : $d^2 F_{a/b} = G \frac{a^3 da du u^2}{(a^2 + u^2)^5} v$.

28. Il faut intégrer en ayant un peu réorganisé la formule. On constate que les deux intégrales sont, en quelque sorte, imbriquées. On obtient : $F_{a/b} = Gv \int_{u=s}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{a^3 da}{(a^2 + u^2)^5} \right) u^2 du$. On pose $x = a/u$ d'où $da = u dx$, on obtient alors $\frac{1}{(a^2 + u^2)^5} = \frac{1}{u^{10} (1+x^2)^5}$. La force devient alors $F_{a/b} = Gv \int_{u=s}^{\infty} \frac{u^4}{u^{10}} \left(\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^5} \right) u^2 du$. L'intégrale fournie par l'énoncé est bienvenue puisque, finalement, il ne reste que $F_{a/b} = \frac{Gv}{24} \int_s^{\infty} \frac{du}{u^4} = \frac{Gv}{24} \left[-\frac{1}{3u^3} \right]_s^{\infty} = \frac{1}{72} \frac{Gv}{s^3}$. Le coefficient numérique demandé est donc : $\alpha = \frac{1}{72}$.

Étude du mouvement dans l'espace des phases

29. Il suffit d'écrire le principe fondamental de la Dynamique dans le référentiel galiléen du laboratoire à l'aimant qui subit la force opposée - par le principe des actions réciproques - de celle que nous venons de calculer. On a donc en projection sur l'axe Ox : $m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha \frac{Gv}{s^3}$. En écrivant cette équation différentielle uniquement en fonction de s ou de ses dérivées, on obtient : $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha \frac{G}{s^3} \frac{ds}{dt}$.

30. On utilise la notation Q proposée, l'équation différentielle est $-Q \frac{2}{s^3} \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$. On peut aisément trouver une primitive chaque membre. On a donc $\frac{Q}{s^2} = \frac{ds}{dt} + Cte$. On écrit $-\frac{ds}{dt} + \frac{Q}{s^2} = Cte$ et on peut identifier la fonction recherchée : $A(s, v) = -v + \frac{Q}{s^2}$.

31. L'allure du portrait de phase ($v = v(s)$) correspondant qualitativement à la situation expérimentale est fournie à la figure 6. On retient que $v_0 = -0,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et que l'arrêt de l'aimant se produit à $s = 6 \text{ mm}$ alors qu'on est parti de $s_0 = 45 \text{ mm}$. Avec les définitions de G et de Q , on peut effectuer l'application numérique et obtenir $G \simeq 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q = 1,7 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. On constate avec ces valeurs que $\frac{Q}{s_0^2} = 8,4 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Comme $|v_0| = 350 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$, on peut en déduire que $\frac{Q}{s_0^2} \ll |v_0|$.

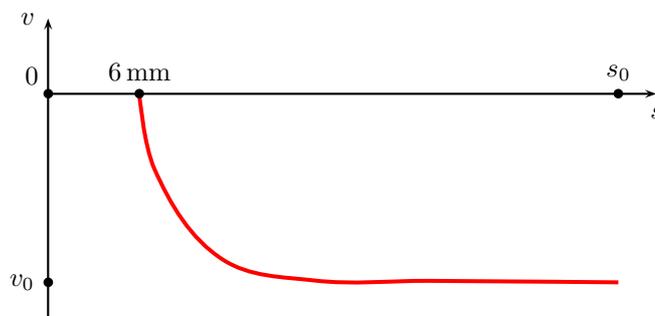


FIGURE 6 – Portrait de phase obtenu expérimentalement avec l'enregistrement de $s(t)$ et de $v(t)$

32. D'après l'intégrale première mise en évidence avant, on a $-v + \frac{Q}{s^2} = -v_{0c} + \frac{Q}{s_0^2}$. Pour qu'il n'y ait pas de collision, il faut que l'aimant ne se rapproche pas du bloc de cuivre à moins que la moitié de son diamètre D puisque depuis le début du problème, s est repéré depuis le centre de la boule-aimant. On doit avoir dans le pire des cas $v = 0$ pour $s = \frac{D}{2}$. Cela nous donne la relation $\frac{4Q}{D^2} = -v_{0c} + \frac{Q}{s_0^2}$. La vitesse critique pour une position de départ d'abscisse s_0 est donc $v_{0c} = Q \left(\frac{1}{s_0^2} - \frac{4}{D^2} \right)$. N'oublions pas que $v_{0c} < 0$. La vitesse critique la plus élevée - en valeur absolue - est donc : $v_{0c} = -\frac{4Q}{D^2}$.

33. On utilise l'expression précédente $|v_{0c}| = \frac{4Q}{D^2} = \frac{2\alpha G}{m D^2}$. Avec l'expression de $G = \frac{\pi}{32} B^{*2} D^6 \sigma$, on arrive à l'expression $|v_{0c}| = \frac{\pi \alpha}{16} \frac{B^{*2} D^4 \sigma}{m}$. On peut constater que plus la masse m est élevée plus la vitesse critique est faible, cela est logique car plus la masse de l'objet lancé est élevée, plus il est difficile de l'arrêter. L'influence de B^* est dans l'autre sens, plus le champ magnétique est élevé plus le moment magnétique de l'aimant est élevé (toutes choses égales par ailleurs) et donc plus le freinage par induction sera important, on peut tolérer une

vitesse de lancement plus élevée. L'influence de D est à mettre sur le même plan que celle de B^* car plus D est grand, plus le moment magnétique de l'aimant sera grand mais n'oublions pas qu'il y a pas mal de chance que la masse augmente alors ce qui aurait alors un effet déjà discuté. Pour l'influence de la conductivité σ , on a bien une vitesse critique plus élevée. Là, encore, si σ est plus grande, on a beaucoup plus de courants induits et donc de freinage même si les courants induits seront plus d'autant proches de la surface que la conductivité électrique est importante. En écrivant $|v_{0c}| = v_0 \Omega(W)$ avec une identification immédiate qui conduit à $\Omega(W) = \frac{\pi \alpha}{16} \frac{1}{W}$. La fonction est donc la fonction inverse à une constante près.

34. On possède toutes les valeurs numériques permettant de calculer² la valeur de la vitesse critique obtenue dans le cadre du modèle étudié : $|v_{0c}| \simeq 0,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

35. Comme on peut le voir sur le graphique, pour une vitesse initiale d'environ $-0,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'aimant se retrouve à l'abscisse $s = 5 \text{ mm}$ avec une vitesse non nulle de $-0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et comme le diamètre de l'aimant est $D = 10 \text{ mm}$, cela signifie que l'aimant a heurté le bloc de cuivre. Cette vitesse est au-delà de la vitesse critique. Si on prend l'autre vitesse initiale à $-0,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on voit que pour l'abscisse $s = 5,1 \text{ mm}$, il reste une petite vitesse résiduelle de $-0,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il y a un petit choc de l'aimant sur le bloc de cuivre. Mais on n'est pas très loin de la vitesse critique. D'ailleurs, si l'on s'intéresse à la troisième courbe pour une vitesse initiale de $-0,37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on constate que l'arrêt de l'aimant se produit à $s = 7 \text{ mm}$. Cette vitesse (en valeur absolue) est donc inférieure à la valeur absolue de la vitesse critique. Compte tenu de l'ensemble de ces observations, on proposera une vitesse critique telle que : $|v_{0c}| = 0,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ce résultat est un peu inférieur à celui de la modélisation mais on n'est pas si loin.

36. L'évaluation de δ^* sur les trois courbes passe par le tracé d'une tangente à l'origine ou d'une tangente au point d'arrêt. On cherche l'intersection entre cette tangente et l'asymptote de la vitesse initiale, un peu comme on le fait sur une loi exponentielle du premier ordre. On peut situer facilement δ^* sur la courbe de plus grande vitesse et voir que $\delta^* \simeq 2 \text{ mm}$. Sur la courbe intermédiaire, c'est assez difficile car la droite tangente est très verticale, elle est aussi située vers $2 - 3 \text{ mm}$. Pour la courbe où l'aimant est le plus lent au départ, on a un tracé nettement plus aisé à effectuer car il y a beaucoup de points dans la courbe et on apprécie mieux la courbure et on situera plus la distance caractéristique du freinage vers $3 - 4 \text{ mm}$. Le constat est que δ^* est décroissante avec $|v_0|$. δ^* est une fonction décroissante de la vitesse $|v_0|$. Compte tenu de la définition de W qui fait intervenir la vitesse au numérateur, on peut tenter de proposer une fonction inverse. Il est vraisemblable que $\Phi(W) = \frac{\beta}{W}$ mais toute puissance négative de W peut aussi convenir. Il faudrait une étude plus précise de δ^* en fonction de $|v_0|$ pour conclure avec plus d'assurance. Il n'est pas forcément facile d'évaluer l'abscisse à partir de laquelle début un freinage significatif. Il semble quand même que l'on puisse dire que cela comme à $s = 25 \text{ mm}$. Pour la vitesse la plus rapide, on a jusqu'au choc avec le bloc de cuivre on a $\tau^* \simeq 7T_e$ où T_e est le pas de temps ou durée d'échantillonnage du signal de position. Pour la vitesse intermédiaire, on a $\tau^* \simeq 12T_e$. Enfin pour l'aimant lancé le plus lentement, on a $\tau^* \simeq 23T_e$. On voit à nouveau que τ^* augmente lorsque la vitesse diminue. On peut aussi proposer une loi de la forme $\Psi(W) = \frac{\beta'}{W}$ avec les mêmes réserves que pour δ^* . On pourrait essayer de trouver la période d'échantillonnage même si cela n'est pas indispensable pour répondre à la question. En prenant la courbe de l'aimant le plus rapide, on note - en étudiant la partie de la courbe sans freinage au début - que l'aimant parcourt environ $\ell = 14 \text{ mm}$ en $4T_e$. Comme sa vitesse est connue, on peut écrire que $\ell = |v_0|4T_e$. On a donc $T_e = \frac{\ell}{4|v_0|} \simeq 4 \text{ ms}$.

2. Sans calculatrice, c'est faisable mais on risque de se contenter de l'ordre de grandeur à savoir $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui est imprécis par rapport à la question suivante.