Analyse de Fourier

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence

Synthèse de Fourier

Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie

Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes

Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac

Applications au filtrage analogique

Analyse de Fourier

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

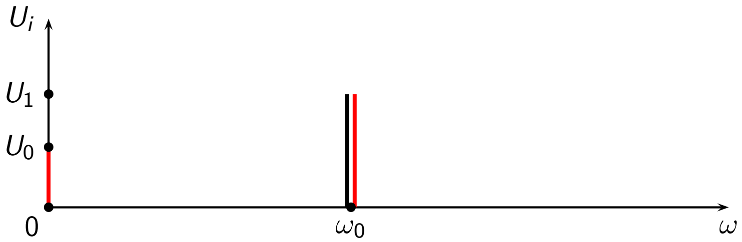
September 5, 2024

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

En 1806, le physicien et mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830) étudiait les transferts thermiques. Il développa la théorie des *séries de Fourier*. À l'heure actuelle, les séries de Fourier et les transformées de Fourier constituent un des moyens mathématiques les plus utilisés en Physique.

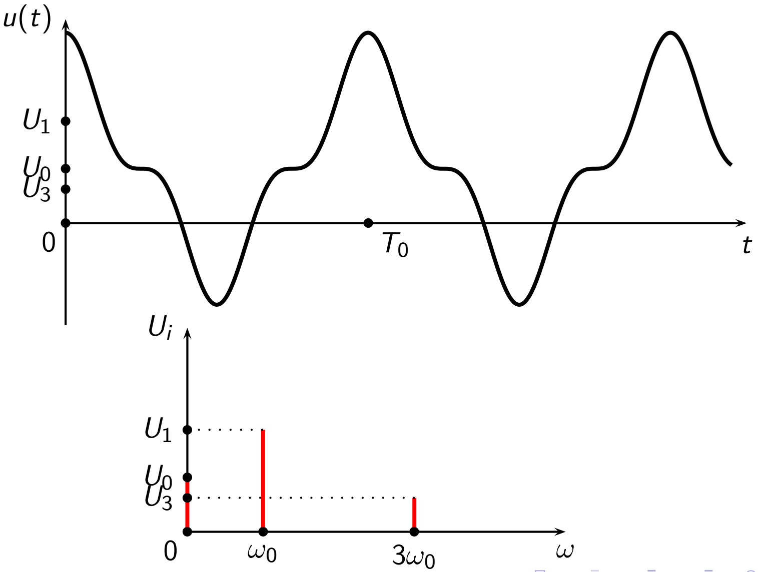
1. Généralités
   - Notion de spectre
   - Temps - fréquence
2. Synthèse de Fourier
3. Série de Fourier
   - Définitions
   - Exemple
   - Énergie
4. Transformée de Fourier
   - Définitions
   - Créneau solitaire
   - Durée - fréquence
   - Train d'ondes
5. Distributions de Dirac
   - Pic de Dirac
   - Peigne de Dirac
6. Applications au filtrage analogique

Spectre de $u_a(t) = U_1 \cos \omega_0 t$ et de $u_b(t) = U_0 + U_1 \cos \omega_0 t$:

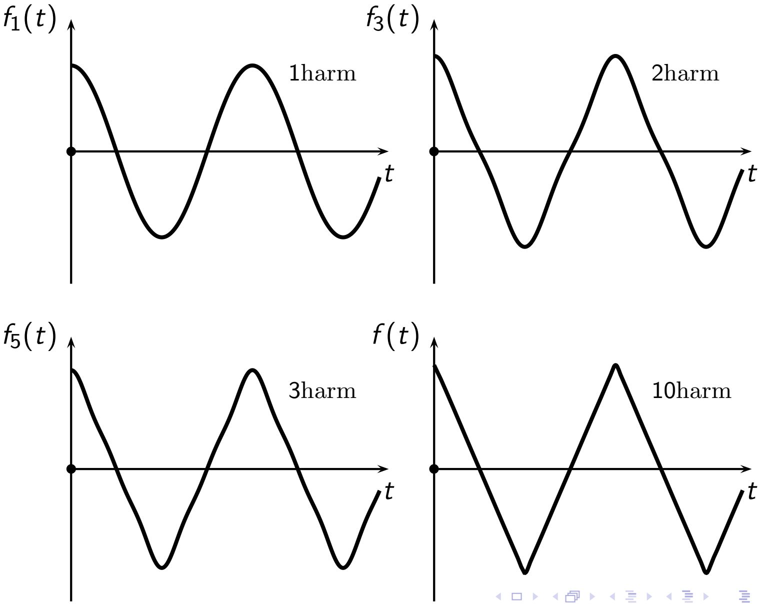


Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

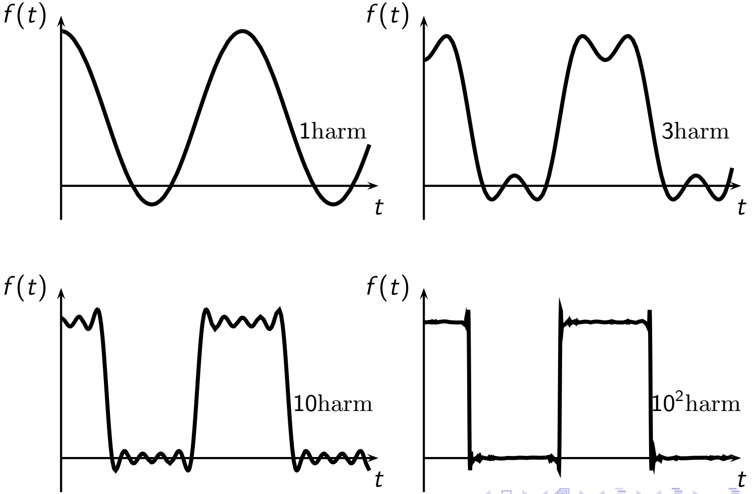
Représentations temporelle et fréquentielle : deux images du même signal $u(t) = U_0 + U_1 \cos \omega_0 t + U_3 \cos 3\omega_0 t$!



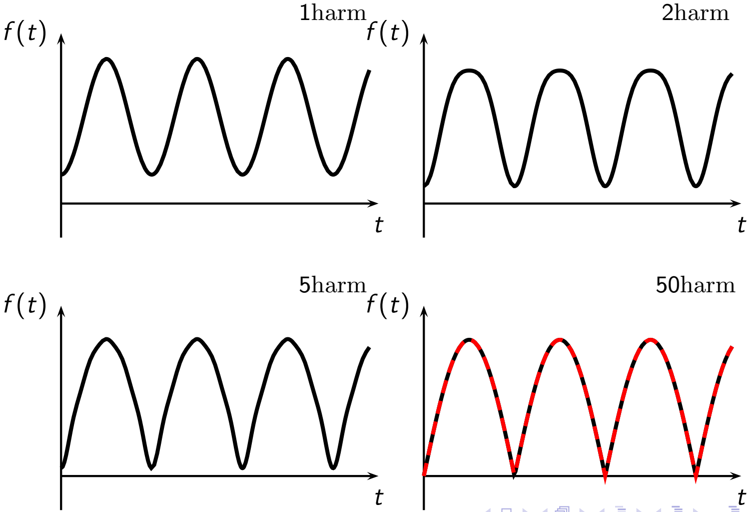
$$f(t) = F_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\omega_0 t$$



$$f(t) = F_0 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n\frac{\pi}{2}} \cos n\omega_0 t \right)$$



$$f(t) = F_0 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos n\omega_0 t \right) = F_0 |\sin \omega_0 t|$$



La forme générale d'une série de Fourier d'une périodique est :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right]$$

avec :

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t \mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \mathrm{d}t$$

Analyse de Fourier
JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes
Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

Autres formes d'une série de Fourier

On peut encore trouver les séries de Fourier sous une forme d'écriture différente de celle proposée avant :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

avec $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et φ_n tel que $\tan\varphi_n = -\dfrac{b_n}{a_n}$

L'écriture en complexes se pratique aussi, elle utilise alors les entiers de $\mathbb{Z}$:

$$f(t) = \sum_{n \,\mathrm{de}\, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n \exp in\omega_0 t$$

Le lien s'effectue avec l'expression réelle si on prend $\underline{c}_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n^* = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

Compréhension de la formule des coefficients a_n et b_n

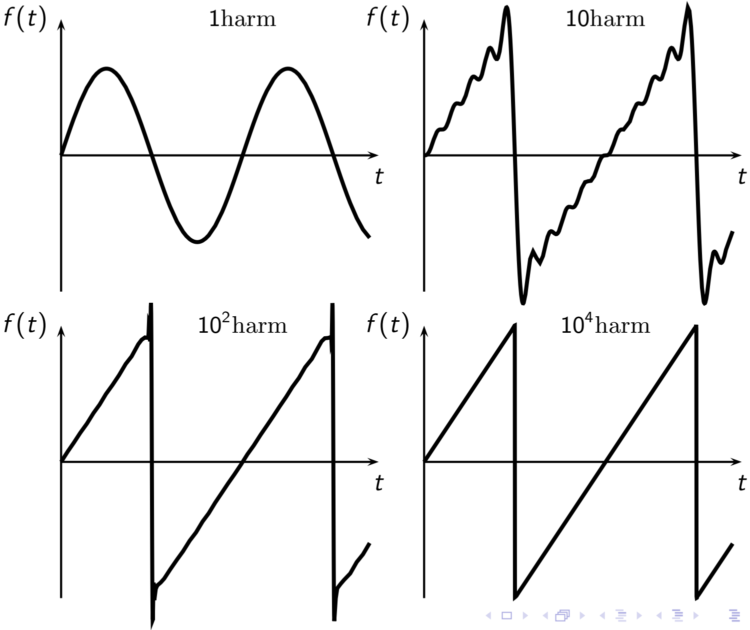
$$\left\{\begin{array}{l}\langle\cos n\omega_0 t\cos p\omega_0 t\rangle = 0 \qquad \text{avec} \qquad p\neq n\\[2ex] \langle\sin n\omega_0 t\sin p\omega_0 t\rangle = 0 \qquad \text{avec} \qquad p\neq n\\[2ex] \langle\cos n\omega_0 t\sin p\omega_0 t\rangle = 0\\[2ex] \langle\cos^2 n\omega_0 t\rangle = \langle\sin^2 n\omega_0 t\rangle = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\langle f(t)\cos n\omega_0 t\rangle = \frac{a_n}{2}$$

$$\langle f(t)\sin n\omega_0 t\rangle = \frac{b_n}{2}$$

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

$$f(t) = F_0\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\omega_0 t\right)$$



Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

Soit la grandeur $f(t)$ intervenant à raison de son carré dans une énergie. On parle alors de forme quadratique[1].

L'énergie moyenne sera proportionnelle au carré de la valeur efficace de $f(t)$:

$$F_{\text{eff}}^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = f_{moy}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

L'expression de $F_{\text{eff}}^2 = \langle f^2(t) \rangle$ constitue le théorème de Parseval

[1] Les formes quadratiques seront importantes dans notre étude de la Physique statistique. . .

Analyse de Fourier

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence

Synthèse de Fourier

Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie

Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes

Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac

Applications au filtrage analogique

La transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ non périodique est la fonction complexe $g(\omega)$ donnée par :

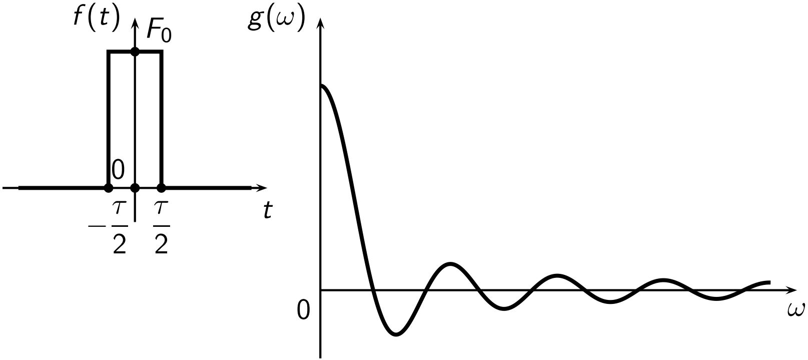
$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t \,\mathrm{de}\, -\infty}^{\infty} f(t) \exp -i\omega t \, \mathrm{d}t$$

La fonction $f(t)$ présente un spectre $g(\omega)$ continu.

Elle peut alors s'écrire comme :

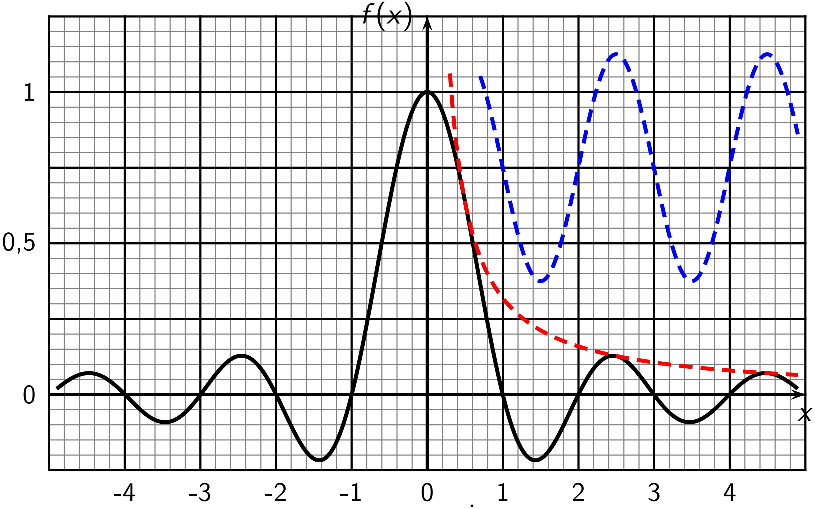
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega \,\mathrm{de}\, -\infty}^{\infty} g(\omega) \exp +i\omega t \, \mathrm{d}\omega$$

Cette fonction présente un grand intérêt en physique car c'est un modèle fréquemment rencontré. De plus, le calcul de sa transformée de Fourier est de difficulté raisonnable :



On peut observer le spectre continu $g(\omega)$ de la fonction $f(t)$ créneau solitaire.

Fonction sinuscardinal



La fonction sinuscardinal : $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

Durée - fréquence

durée $\times$ intervalle de fréquence est de l'ordre de 1

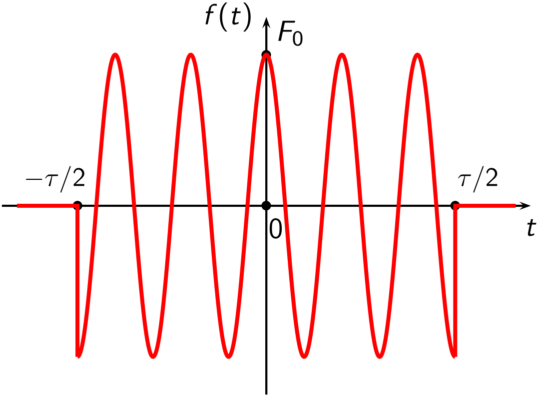
$$\Delta t \times \Delta f \simeq 1$$

Anticipons un peu !

La fonction $\cos 2\pi f_0 t$ possède une durée illimitée :
son spectre de fréquence est monochromatique : $f = f_0$ et $\Delta f = 0$

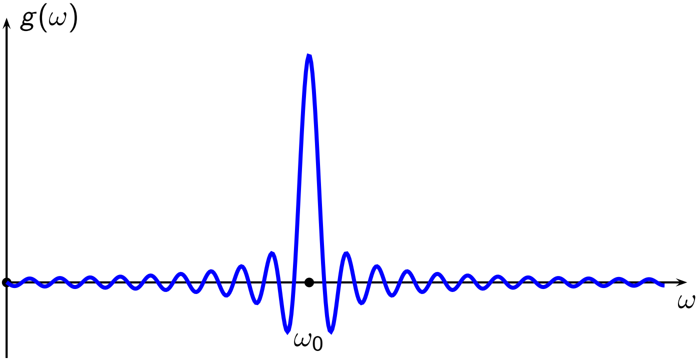
La fonction $\cos 2\pi f_0 t$ possède une durée limitée τ :
son spectre de fréquence est polychromatique : $f \simeq f_0 \pm \dfrac{1}{2\tau}$ et $\Delta f \simeq \dfrac{1}{\tau}$

Représentation temporelle



Cette fonction est importante dans le domaine de l'optique car l'émission de la lumière par une source est modélisée par le train d'ondes.

Représentation fréquentielle - Spectre



Une source qui émet un signal sinusoïdal pendant une durée finie n'est pas monochromatique. Son spectre est centré sur la fréquence de la sinusoïde mais il peut s'étendre de part et d'autre de façon non négligeable.

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

Pic de Dirac

$$\delta(t) = 0 \qquad \text{si} \qquad t \neq 0$$

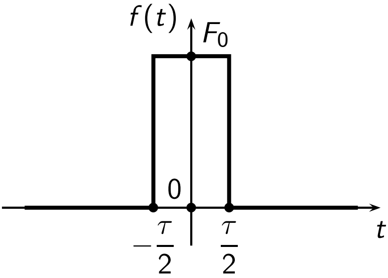
$$\delta(t) \neq 0 \qquad \text{si} \qquad t = 0$$

$$\text{et surtout : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

Propriété supplémentaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-u) f(u)\mathrm{d}u = f(t)$$

Cas limite du créneau ?



Cas limite lorsque $\tau \to 0$?

Attention : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = F_0\tau$ tend, elle aussi, vers 0 lorsque $\tau \to 0$!

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

Autre approche du pic de Dirac

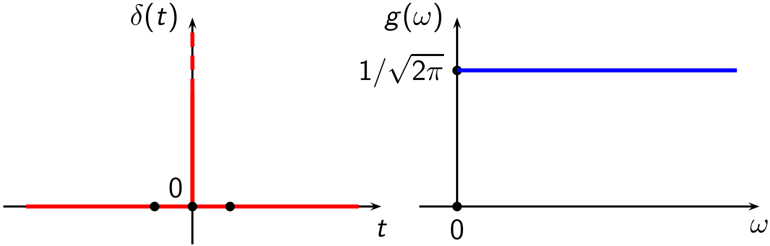
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{F_0 \tau} f(t)$$

où $f(t)$ est la fonction créneau de hauteur F_0 définie entre $[-\frac{\tau}{2}; +\frac{\tau}{2}]$

Propriété mathématique de la Transformée de Fourier :

$$TF\left(\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{F_0 \tau} f(t)\right) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{F_0 \tau} TF\ f(t)$$

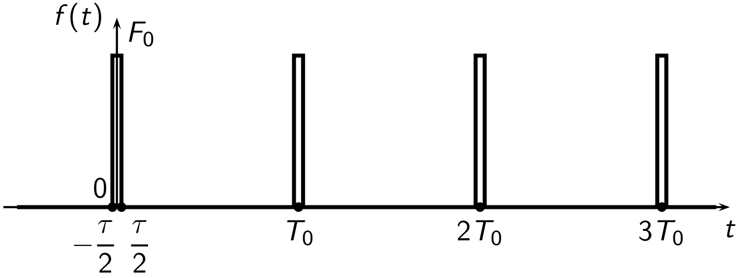
Spectre de la distribution de Dirac



Le spectre de la distribution de Dirac est qualifié de BLANC car toutes les fréquences y sont représentées avec une égale amplitude.

Peigne de Dirac

Succession périodique de N impulsions brèves $\tau \ll T_0$



Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence

Synthèse de Fourier

Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie

Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes

Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac

Applications au filtrage analogique

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est la somme de N intégrales sur les intervalles de temps $[nT_0 - \frac{\tau}{2}; nT_0 + \frac{\tau}{2}]$:

$$g_1(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{nT_0-\tau/2}^{nT_0+\tau/2} \exp -i\omega t \,\mathrm{d}t \right)$$

On trouve :

$$g_1(\omega) = \frac{F_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{sinc}\, \frac{\omega\tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \exp -i\omega n T_0$$

Passage au peigne de Dirac

On fait tendre τ vers 0 et on étudie $\dfrac{f(t)}{F_0\tau}$:

$$g_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\tau\to 0} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \exp -i\omega n T_0$$

On trouve :

$$g_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} \exp -i\omega n T_0$$

Cette expression apparaît comme la somme de N termes d'une suite géométrique de raison $\exp -i\omega T_0$

On obtient :

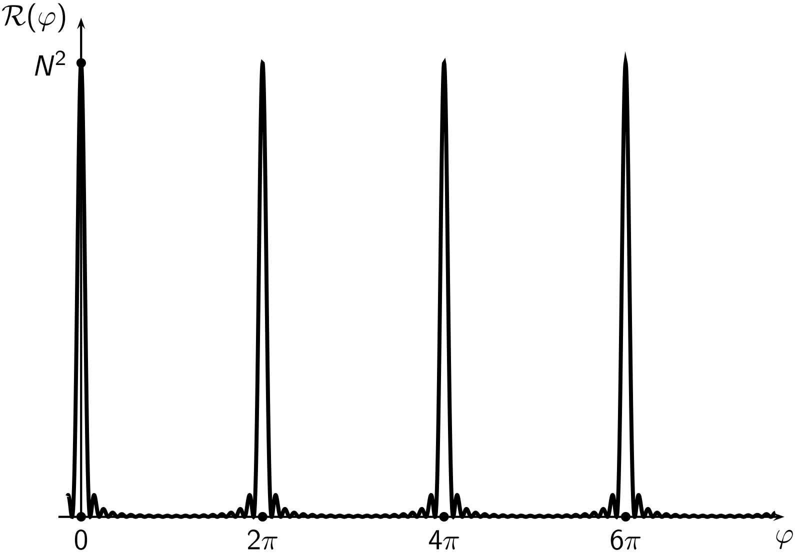
$$g_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -i(N-1)\frac{\omega T_0}{2} \, \frac{\sin N\dfrac{\omega T_0}{2}}{\sin \dfrac{\omega T_0}{2}}$$

Cette transformée de Fourier possède le module carré suivant :

$$|g_2(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \, \frac{\sin^2 N\dfrac{\omega T_0}{2}}{\sin^2 \dfrac{\omega T_0}{2}}$$

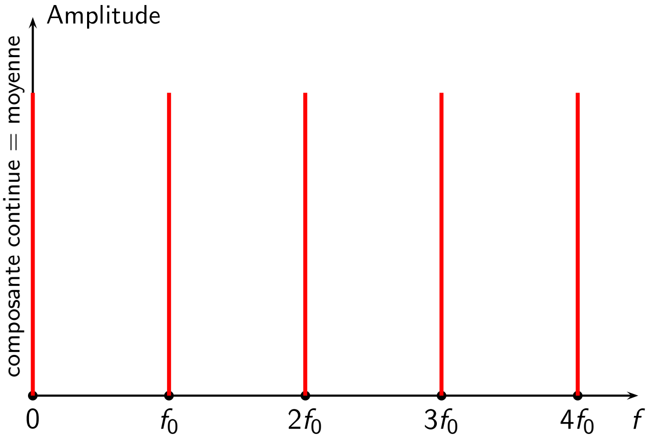
$\mathcal{R}(\varphi) = \dfrac{\sin^2 N\dfrac{\varphi}{2}}{\sin^2 \dfrac{\varphi}{2}}$ est appelée fonction de réseau

Fonction de réseau



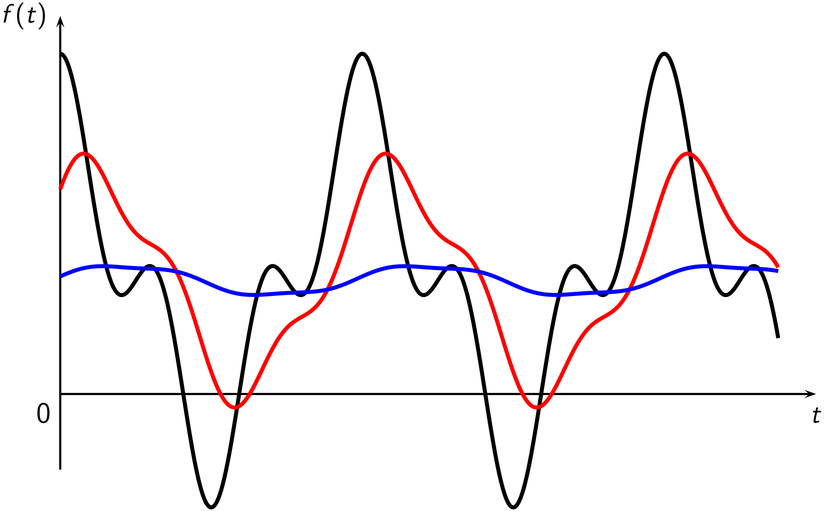
Spectre du peigne de Dirac

Le spectre du peigne est un **spectre discret** comportant toutes les fréquences nf_0 à la même amplitude :



Passe-Bas d'ordre 1

Tension d'entrée : $e(t) = 1,5 + 2\cos 2\pi 100 t + 1\cos 2\pi 300 t$

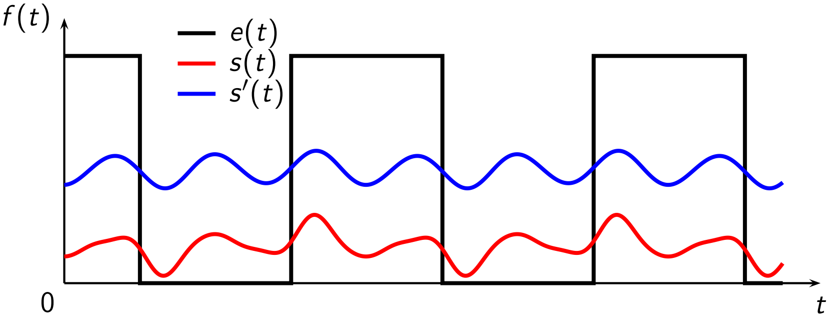


Pour $s(t)$, on $f_c = 100\,\mathrm{Hz}$ alors que pour $s'(t)$, on a $f_c = 10\,\mathrm{Hz}$.

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

Passe-Bande

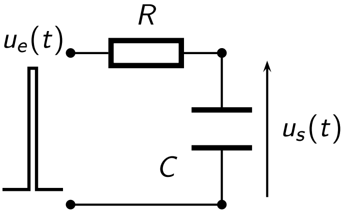
Tension d'entrée : créneau périodique de fréquence $f_e = 100\,\mathrm{Hz}$



Le filtre passe-bande était centré sur l'harmonique : $f_0 = 3f_e = 300\,\mathrm{Hz}$.

Pour $s(t)$, on a $Q = 2$ alors que pour $s'(t)$, on a $Q = 10$.

Utilisation du pic de Dirac



$u_e(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega) \exp i\omega t \, \mathrm{d}\omega$ où $g_e(\omega)$ est la transformée de Fourier de $u_e(t)$. Pour l'impulsion de Dirac :

$$g_e(\omega) = g_0 \qquad \forall \omega$$

Le filtre linéaire traite chaque pulsation par $\underline{H}(i\omega)$:

$$\begin{array}{ccc} g_0 \exp i\omega t & \longrightarrow & g_0 \underline{H}(i\omega) \exp i\omega t \\ \text{entrée} & \longrightarrow & \text{sortie} \end{array}$$

Généralités
Notion de spectre
Temps - fréquence
Synthèse de Fourier
Série de Fourier
Définitions
Exemple
Énergie
Transformée de Fourier
Définitions
Créneau solitaire
Durée - fréquence
Train d'ondes
Distributions de Dirac
Pic de Dirac
Peigne de Dirac
Applications au filtrage analogique

Transfert du filtre

Le filtre est linéaire, on somme les réponses :

$$u_s(t) = \frac{g_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(i\omega) \exp i\omega t \mathrm{d}\omega = g_0 \, \mathrm{TF}(\underline{H}(i\omega))$$

La fonction de transfert est à une constante près la Transformée de Fourier de la tension de sortie :

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{1}{g_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_s(t) \exp -i\omega t \mathrm{d}t$$

La transformée de Fourier de la sortie donne la fonction de transfert et ses caractéristiques.